



**JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ**

Submitted by
Maria Heigl
k11812575

Submitted at
**Institut für Numerische
Mathematik**

Supervisor and First
Examiner
DI Dr. **Clemens
Hofreither**

9. August 2021

BERNSTEIN- KOLLOKATION



Für ein Problem der nichtlinearen Elastizität

**JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ**
Altenbergerstraße 69
4040 Linz, Österreich
www.jku.at
DVR 0093696

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Die vorliegende Arbeit ist mit dem elektronisch übermittelten Textdokument identisch.

Linz, 9. August 2021

Kurzfassung

In dieser Bachelorarbeit betrachten wir große Verschiebungen hyperelastischer Materialien, bei denen geometrisch nichtlineare Terme nicht länger vernachlässigt werden können. Folglich erschwert sich dadurch die Modellierung und Numerik.

Wir behandeln zunächst elementare Begriffe der Elastizitätstheorie, wie den Lagrange'schen Verzerrungstensor und widmen uns im Speziellen großen Verschiebungen, die in nichtlinearen Termen resultieren. Darauf aufbauend betrachten wir ein eindimensionales Modellproblem, welches die Herausforderungen der nichtlinearen Elastizität andeuten soll. Dabei untersuchen wir als mögliche Materialgesetze sowohl das Hooke'sche Gesetz als auch das St. Venant-Kirchhoff-Modell und erhalten letztendlich eine nichtlineare Differentialgleichung.

Zentrales Thema stellt schließlich die Diskretisierung und Lösung dieser nichtlinearen Differentialgleichung dar. Zur Diskretisierung unseres Problems verwenden wir Kollokation anhand Bernsteinpolynomen. Mittels einem iterativen, nichtlinearen Richardson-Verfahren können wir folglich eine Näherungslösung berechnen. Zudem betrachten wir ein vereinfachtes Newtonverfahren und stellen die numerischen Resultate hinsichtlich der benötigten Anzahl an Iterationen dem nichtlinearen Richardson-Verfahren gegenüber. Zusammen, mit Kenntnis der exakten, analytischen Lösung und der beiden iterativen Verfahren, können wir die numerischen Ergebnisse diskutieren. Ziel dabei ist es, Aussagen über das Verhalten des numerischen Fehlers, insbesondere des Diskretisierungsfehlers, treffen zu können.

Wir kommen zu dem Schluss, dass sich der Diskretisierungsfehler mit zunehmenden Polynomgrad exponentiell verringert.

Abstract

This bachelor thesis deals with large displacements in hyperelastic bodies, where geometrically nonlinear terms are not negligible any more. Doing so, modelling and calculating get more difficult and laborious compared to the case of small displacements.

To begin with, we discuss elementary terms and definitions of the theory of elasticity. In particular we focus on the Lagrangian strain tensor and big displacements which result in nonlinear terms. Further we present a one-dimensional problem which points out the difficulties of nonlinear elasticity. The basis for our investigations are two material laws, the Hooke's law and the Saint Venant-Kirchhoff model. The application of these material laws results in a nonlinear differential equation.

Central subject is the discretization and solution finding of this nonlinear differential equation. For the discretization we use the method of collocation with Bernstein polynomials. Further, we compute an approximated solution by nonlinear Richardson-Iteration. Moreover, we do a simplified Newton-Method and compare the results in regard to the amount of iterations needed with the results of the prior method. By means of our constructed model we do some numerical experiments as well as calculating the exact analytical solution. Finally, we chart, compare and discuss the outcomes of both the exact and the iterating methods. The focus is on the determination of the discretization error of the numerical method.

We can conclude that the discretization error falls exponentially with rising polynomial degree.

Inhaltsverzeichnis

1	Elastizitätstheorie	1
1.1	Kinematik	1
1.1.1	Polarer Zerlegungssatz	4
1.2	Oberflächenkräfte	5
1.2.1	Cauchy'scher Spannungstensor	6
1.2.2	1. und 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor	6
1.3	Impulserhaltungssatz	8
1.4	Materialgesetze	9
2	Modellproblem	11
2.1	Hyperelastische Materialien	12
2.1.1	Hooke'sche Gesetz	13
2.1.2	St. Venant-Kirchhoff Modell	14
3	Diskretisierung und Lösung	17
3.1	Bernstein-Kollokation	17
3.2	Chebyshev-Knoten	20
3.3	Richardson-Verfahren	21
3.4	Vereinfachtes Newtonverfahren	22
4	Numerische Experimente	24
4.1	Diskretisierungsfehler	30
4.1.1	Analytische Lösung	30
4.1.2	Bestimmung des Diskretisierungsfehlers	36
5	Conclusio	39

Abbildungsverzeichnis

1.1	Verschiebung	2
1.2	Infinitesimale Deformation	2
1.3	Polare Zerlegung	5
2.1	Gespannte Saite (undeformiert (grün), deformiert (blau))	12
3.1	Monome, Lagrange- und Bernsteinpolynome vom Grad $p=3$ für $[0,1]$	17
3.2	Polynomiale Kurven bzgl. Lagrange- und Bernsteinpolynome	18
4.1	approx. Lösung, $2 \leq p \leq 7$	27
4.2	Residuum, $4 \leq p \leq 8$	29
4.3	analytische Lösung, bis $2 \leq p \leq 7$	32
4.4	Auslenkung für $f=-\frac{1}{2}, -1,-3,-5$ und $2 \leq p \leq 4$	33
4.5	max. Auslenkung bei $x=0.5, 2 \leq p \leq 9$	34
4.6	max. Auslenkung bei $x=0.5, 9 \leq p \leq 13$	35
4.7	Fehlerfunktion $2 \leq p \leq 7$ (links), $9 \leq p \leq 13$ (rechts)	36
4.8	Fehler in Max-Norm und L2-Norm	37
4.9	Diskretisierungsfehler im Vergleich mit Residuumsfehler	38

Tabellenverzeichnis

4.1	Anzahl der benötigten Iterationen	25
4.2	Konditionszahl von A	26

1 Elastizitätstheorie

1.1 Kinematik

Im folgenden gehen wir immer von einem Kontinuumsmodell aus. Wenn wir von Partikel sprechen, dann meinen wir damit das infinitesimale Volumen eines Materials. Mit Hilfe dieser Annahme kann genau ein Materialpartikel repräsentiert werden. Darüber hinaus nimmt man an, dass für jeden Zeitpunkt der euklidische Raum mit Partikel ausgefüllt ist, weshalb die Größen der Kontinuumsmechanik im Allgemeinen Funktionen des Ortes und der Zeit entsprechen. Somit können wir die Bahnkurve, die ein Partikel zur Referenzzeit t_0 zurücklegt, mittels einer vektorwertigen Funktion ausdrücken, etwa

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \text{ mit } \mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0).$$

Die Bahnkurve \mathbf{x} beschreibt die Position des Vektors zur Zeit t eines Partikels, der zur Zeit t_0 an der Stelle \mathbf{X} war. Dabei wird mit \mathbf{X} die Materialkoordinate beschrieben. Wir betrachten also Lagrange-Koordinaten, d.h. ein Beobachter ist mit dem Teilchen verbunden und misst die Veränderungen der jeweiligen Eigenschaften. Dem gegenüber steht die räumliche bzw. lokale Betrachtungsweise, die in Euler-Koordinaten gemessen wird.

Wird ein Körper von einer Position auf eine andere verschoben (wie etwa durch äußere Krafteinwirkung), so entsteht eine Verschiebung der einzelnen Partikel.

Der Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ eines Partikels im Kontinuumsmodell beschreibt die Verschiebung des Punktes P an der Stelle t_0 nach $P(t)$ mit

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}.$$

Anders ausgedrückt heißt das, wenn ein Partikel verschoben wird, dann kommt dieser an der neuen Position

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \tag{1.1}$$

an.

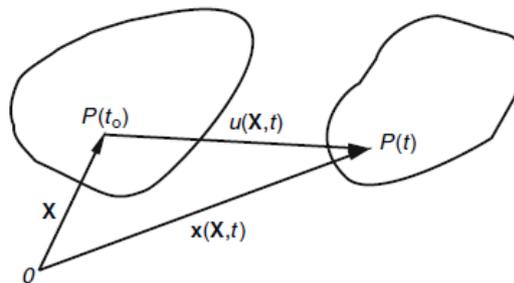


Abbildung 1.1: Verschiebung
[5, Kap. 3]

Betrachten wir einen zweiten Punkt Q , der an der Stelle $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ liegt, dann befindet sich dieser Punkt nach einer Verschiebung an der Stelle

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t). \quad (1.2)$$

Möchten wir nun die Änderung der infinitesimalen Verschiebung in den zwei Punkten P und Q berechnen, so können wir dies durch einfache Subtraktion der beiden Terme (1.2) - (1.1) tun und erhalten

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t).$$

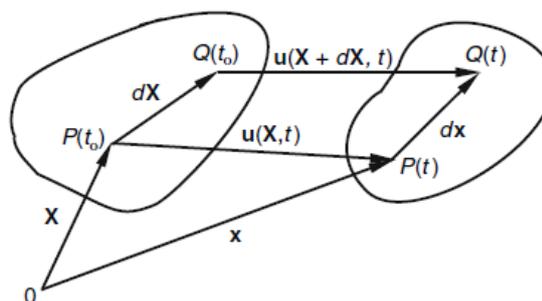


Abbildung 1.2: Infinitesimale Deformation
[5, Kap. 3]

Die beiden Verschiebungsterme \mathbf{u} können wir mittels Taylor-Approximation durch den Gradienten von \mathbf{u} ausdrücken, da wir zunächst nur an der infinitesimalen Verschiebungen in $d\mathbf{X}$ interes-

sirt sind. Wir erhalten also in diesem Fall eine gleichwertige Beziehung mit

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla \mathbf{u})d\mathbf{X}, \quad (1.3)$$

wobei $(\nabla \mathbf{u})$ ein Tensor 2. Stufe ist und wir diesen im folgenden als Verschiebungsgradient bezeichnen werden.

Schreiben wir (1.3) um zu

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X},$$

wobei

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (1.4)$$

ist, so erhalten wir eine Ausdruck für den Deformationstensor \mathbf{F} . Mit \mathbf{I} bezeichnen wir in Folge den Einheitstensor.

Der Rechte Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} , auch Green'scher Deformationstensor genannt, ergibt sich aus der Beziehung

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \mathbf{u}) \quad (1.5)$$

\Leftrightarrow

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + 2\mathbf{E}, \quad (1.6)$$

wobei

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \mathbf{u})) \quad (1.7)$$

ist.

Die Darstellung in (1.6) suggeriert bereits folgenden Zusammenhang: Da \mathbf{I} als Einheitstensor keine Längenänderung und insbesondere keine Deformation eines Körpers bewirkt, zählt $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ zu dem Raum der linearen Starrkörperverschiebungen (rigid body modes (RBM)) [4].

Das heißt, der Tensor \mathbf{E} alleine charakterisiert die Größe der Änderung bezüglich der stattfindenden Verschiebung (und somit Längenänderung). Dieser ist bekannt als Lagrange'scher Verzerrungstensor.

Nehmen wir an, dass die Änderung der Verschiebung sehr viel kleiner als die entsprechende Änderung im Punkt selbst ist (d.h. $\|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1$), so können wir den nichtlinearen Term $(\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \mathbf{u})$

vernachlässigen und folglich eine linearisierte Form des Verzerrungstensors angeben [4]

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u})^\top + \nabla \mathbf{u}).$$

Geht jedoch eine Verzerrung mit einer großen Verschiebung einher, so geht das nicht mehr. Im Folgenden möchten wir auf große Verschiebungen und deren Auswirkungen eingehen, weshalb wir insbesondere den nichtlinearen Verzerrungstensor verwenden werden.

1.1.1 Polarer Zerlegungssatz

Der polare Zerlegungssatz [5] [2] sagt uns, dass wir den Deformationstensor \mathbf{F} als Produkt zweier Tensoren anschreiben können

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R},$$

wobei mit \mathbf{R} ein orthogonaler Tensor bezeichnet wird und \mathbf{U} und \mathbf{V} positiv definite symmetrische Tensoren sind. \mathbf{U} und \mathbf{V} werden in der Literatur oft auch als rechter und linker Verzerrungstensor benannt.

Jedes Materialelement $d\mathbf{X}$ an der Stelle \mathbf{X} wird durch den Deformationstensor \mathbf{F} in einen Vektor $d\mathbf{x}$ transformiert

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{U}d\mathbf{X}.$$

$\mathbf{U}d\mathbf{X}$ beschreibt dabei eine reine Streckung und \mathbf{R} bewirkt eine reine Drehung des Körpers. Aus der oben beschriebenen Zerlegung folgt, dass $\mathbf{U} = \mathbf{R}^\top \mathbf{V}\mathbf{R}$, was bedeutet, dass es geometrisch gesehen keinen Unterschied macht, ob man zuerst die Streckung und dann die Rotation eines Objekts betrachtet oder zuerst eine Rotation mit anschließender Streckung (siehe Abbildung 1.3).

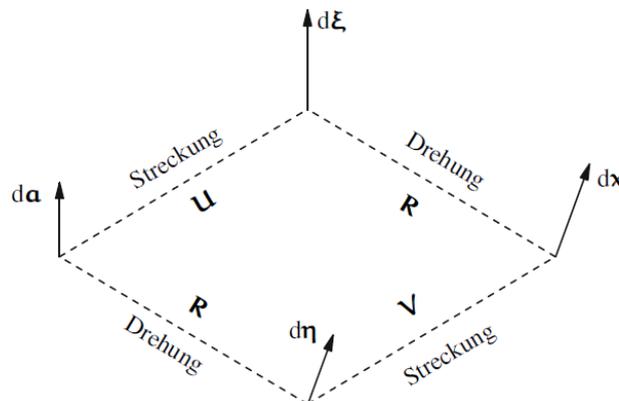


Abbildung 1.3: Polare Zerlegung
 [2, S. 95]

Basierend auf diesen Betrachtungen ist es uns nun möglich, zwei Tensoren zu definieren:
 Den Rechten Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

und den Linken Cauchy-Green Tensor (auch: Finger'scher Deformationstensor)

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T.$$

Obwohl beide Tensoren eine Streckung beschreiben und den Eindruck vermitteln ein und dasselbe zu sein, gibt es einen wesentlichen Unterschied. Der Linke Cauchy-Green Tensor \mathbf{B} , der sich aus dem linken Verzerrungstensor \mathbf{V} zusammensetzt, ist ein objektiver Tensor, also unabhängig von der Wahl der Bezugspunkte im Koordinatensystem. Das kommt daher, dass bei der Deformation eines Partikels, dem Polaren Zerlegungssatz nach, zuerst die Deformation durch Streckung und dann erst die Rotation stattfindet. Der rechte Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} ist nicht objektiv, was aus ähnlicher Überlegung heraus gefolgert werden kann, da ja zuerst eine Rotation des Koordinatensystems stattfindet.

Die Objektivität eines Tensors spielt bei den Konstitutivgleichungen eine Rolle. Wir wollen also bei der Modellierung eines Problems Gleichungen formulieren, die möglichst allgemein gültig sind. Diese sollen daher unabhängig vom Material und insbesondere unabhängig vom Beobachter, also dem gewählten Koordinatensystem, sein.

1.2 Oberflächenkräfte

Neben den kinematischen Größen wollen wir auch Kräfte betrachten, die als Folge äußerer Krafteinwirkung im Inneren eines Objekts wirken und zu Deformationen führen können. Durch äußere

Krafteinwirkung entsteht ein Beanspruchungszustand im Inneren des Körpers, was auch Spannung genannt wird. Wir sprechen hier also von Oberflächenkräften.

1.2.1 Cauchy'scher Spannungstensor

Die Oberflächenkraft, die an einem Punkt auf einer Fläche wirkt, wird üblicherweise durch den Spannungsvektor \mathbf{t}_n beschrieben.

Der Vektor

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \quad (1.8)$$

beschreibt die Spannungskraft, die auf eine Oberfläche in Richtung der Außennormale wirkt, d.h. der Spannungsvektor ist abhängig vom Ort, der Zeit und der Orientierung zur Schnittfläche. Der Spannungsvektor \mathbf{t}_n kann daher als Maß für die innere Kraft, die in einem Punkt eines Körpers herrscht, betrachtet werden. Der Spannungszustand an einem Punkt wird gänzlich durch den Spannungstensor \mathbf{T} bestimmt. Dieser Tensor \mathbf{T} wird als Cauchy'scher Spannungstensor bezeichnet und hängt nur linear vom Normalenvektor \mathbf{n} ab. Insbesondere bezieht sich der Cauchy'scher Spannungstensor auf die Änderung einer Fläche in der Momentankonfiguration.

Um die Oberflächenkraft eines Körpers von der Referenzkonfiguration aus betrachten zu können, führen wir weitere Tensoren ein: Den 1. und 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor.

1.2.2 1. und 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor

Zunächst unterscheiden wir zwischen \mathbf{n}_0 , dem Einheitsnormalvektor der undeformierten Fläche und \mathbf{n} , dem Einheitsnormalvektor der deformierten Fläche. Außerdem beschreiben wir eine beliebige Fläche mittels einem Vektor, wie etwa $d\mathbf{A}_0 = d\mathbf{A}\mathbf{n}_0$ und $d\mathbf{A} = d\mathbf{A}\mathbf{n}$.

Sei nun $d\mathbf{f}$ die Kraft, die auf einer deformierten Fläche $d\mathbf{A} = d\mathbf{A}\mathbf{n}$ wirkt.

Für den Cauchy'schen Spannungsvektor gilt

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}_n dA,$$

da dieser insbesondere auf einer beliebigen Fläche dA wirkt.

Betrachten wir nun eine undeformierte Fläche $d\mathbf{A}_0 = d\mathbf{A}\mathbf{n}_0$, so können wir einen neuen Spannungsvektor \mathbf{t}_0 und Spannungstensor \mathbf{T}_0 einführen

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{T}_0\mathbf{n}_0, \quad (1.9)$$

wobei \mathbf{t}_0 als Pseudo-Spannungsvektor bezeichnet wird, da dieser sich ja auf die undeformierte Fläche bezieht.

Mit \mathbf{T}_0 erhalten wir einen Ausdruck für den 1. Piola-Kirchhoff Tensor, der ähnlich wie der

Cauchy'sche Spannungstensor, den Spannungszustand an einem Punkt beschreibt. Insbesondere handelt es sich dabei um eine lineare Transformation.

Wir können nun folgenden Zusammenhang zwischen den beiden Spannungsvektoren herstellen [5]

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}_n dA = \mathbf{t}_o dA_o,$$

wobei mit dA_o die undeformierte Fläche bezeichnet wird.

Formen wir diesen Ausdruck auf \mathbf{t}_o um, so erhalten wir

$$\mathbf{t}_o = \left(\frac{dA}{dA_o} \right) \mathbf{t}_n.$$

Unter Verwendung von Gleichung (1.8) und (1.9) ergibt sich daraus

$$\mathbf{T}_o \mathbf{n}_o = \left(\frac{dA}{dA_o} \right) \mathbf{T} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{T}(dA\mathbf{n})}{dA_o}. \quad (1.10)$$

Zwischen der deformierten und undeformierten Fläche besteht der Zusammenhang

$$dA\mathbf{n} = dA_o J(\mathbf{F}^{-1})^\top \mathbf{n}_o,$$

siehe (3.27.12) in [5]. Wir haben dabei bereits implizit verwendet, dass $J = |\det \mathbf{F}|$ gilt.

Diesen Ausdruck können wir nun weiter umformen zu

$$\frac{dA\mathbf{n}}{dA_o} = J(\mathbf{F}^{-1})^\top \mathbf{n}_o.$$

Nützen wir diese gewonnene Relation und setzen diese in die Gleichungskette (1.10) ein, so erhalten wir

$$\mathbf{T}_o \mathbf{n}_o = J \mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^\top \mathbf{n}_o.$$

Da diese Gleichung für alle \mathbf{n}_o erfüllt ist, gilt insbesondere

$$\mathbf{T}_o = J \mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^\top. \quad (1.11)$$

Mit Gleichung (1.11) erhalten wir nun einen expliziten Ausdruck für den 1. Piola-Kirchhoff Tensor in Abhängigkeit vom Cauchy'schen Spannungstensor \mathbf{T} und dem Deformationstensor \mathbf{F} .

Für den 2. Piola-Kirchhoff Tensor $\tilde{\mathbf{T}}$ gilt ebenfalls ein linearer Zusammenhang zwischen der Änderung des Kraftvektors und dem Spannungsvektor mit der Änderung der undeformierten Fläche

$$d\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{t}} dA_o \quad (1.12)$$

mit der Beziehung

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}d\tilde{\mathbf{f}}. \quad (1.13)$$

Das heißt, die Änderung der Kraft $d\tilde{\mathbf{f}}$ transformiert sich unter Einfluss des Deformationstensors \mathbf{F} in die aktuelle Kraftänderung $d\mathbf{f}$ an der deformierten Position. Daraus folgt, dass der Spannungsvektor $\tilde{\mathbf{t}}$ im Allgemeinen eine von \mathbf{t}_n verschiedene Richtung besitzt.

Der 2. Piola-Kirchhoff Tensor stellt ebenfalls eine lineare Transformation dar, sodass folgender Zusammenhang gilt

$$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{n}_o. \quad (1.14)$$

Wie auch der Pseudo-Spannungsvektor \mathbf{t}_o , basiert auch der Spannungsvektor $\tilde{\mathbf{t}}$ auf einer undefor-mierten Fläche und beschreibt die Oberflächenkraft, die an einem Punkt in Richtung der Außen-normale \mathbf{n}_o wirkt.

Unter Verwendung von Gleichung (1.12) und (1.14) können wir (1.13) anschreiben als

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{n}_o dA_o. \quad (1.15)$$

Aus der vorher hergeleiteten Beziehung

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}_o dA_o = \mathbf{T}_o \mathbf{n}_o dA_o$$

und aus dem Vergleich zu 1.15 ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{n}_o = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_o\mathbf{n}_o.$$

Da dies wieder für alle \mathbf{n}_o gilt, erhalten wir eine Beziehung zwischen 1. und 2. Piola-Kirchhoff Tensor

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_o, \quad (1.16)$$

sowie eine Beziehung zwischen 2. Piola-Kirchhoff Tensor und Cauchy'schen Spannungstensor

$$\tilde{\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^\top. \quad (1.17)$$

1.3 Impulserhaltungssatz

Um Bewegungsgleichungen eines Kontinuums beschreiben zu können, benötigen wir den Impulserhaltungssatz (IES), auch zweites Newtonsche Gesetz genannt, der uns den geeigneten Rahmen

dafür schafft.

Der Impulserhaltungssatz in differentieller Form

$$\text{Div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{B} = \rho \mathbf{a} \quad (1.18)$$

führt nun alle wichtigen Größen zusammen.

Wir bezeichnen mit \mathbf{T} den Spannungstensor, ρ die Massendichte, \mathbf{B} die Volumskraft pro Einheit und mit \mathbf{a} die Beschleunigung.

Der IES wird üblicherweise in Koordinaten der Momentankonfiguration beschrieben, da der darin vorkommende Cauchy'sche Spannungstensor \mathbf{T} ein wahrer Spannungstensor ist.

Da wir vorher aber Spannungstensoren in Referenzkonfiguration kennen gelernt haben, können wir nun den Impulserhaltungssatz in differentieller Form auch bezüglich der Referenzkonfiguration anschreiben

$$\text{Div } \mathbf{T}_0 + \rho_0 \mathbf{B} = \rho_0 \mathbf{a}, \quad (1.19)$$

wobei mit ρ_0 die Dichte im Referenzzustand beschrieben wird.

1.4 Materialgesetze

Materialgesetze dienen vor allem dazu, einen Zusammenhang zwischen Spannungstensor und Deformationstensor herzustellen. Dies ist wesentlich, damit wir die Anzahl der Unbekannten reduzieren und in Folge das durch den IES entstandene Gleichungssystem lösen können.

Im Folgenden werden wir zwei wichtige Materialgesetze kennen lernen. Wir betrachten dabei die recht allgemeine Form, nämlich hyperelastische Materialien [4].

Zum einen betrachten wir das **Hooke'sche Gesetz** für isotrop linear elastische Materialien

$$\mathbf{T} = \alpha \mathbf{B}.$$

Dabei steht \mathbf{T} für den Cauchy'schen Spannungstensor, α ist eine Konstante und mit \mathbf{B} wird der Linke Cauchy-Green Tensor bezeichnet.

Das Hooke'sche Gesetz beschreibt ein linear-elastisches Verhalten. Die Verformung eines Materials verhält sich proportional zur einwirkenden Belastung, welche durch den Cauchy'schen Spannungstensor \mathbf{T} charakterisiert wird.

Zum anderen betrachten wir das **St. Venant-Kirchhoff Modell**. Das St. Venant-Kirchhoff-Modell

ist das einfachste hyperelastische Materialgesetz und wird verwendet, um das linear isotrope Materialgesetz auf den geometrisch nichtlinearen Fall zu übertragen. Dieses Materialgesetz bringt insbesondere den vorhin eingeführten Verzerrungstensor \mathbf{E} (siehe 1.7) und den 2. Piola-Kirchhoff Tensor $\tilde{\mathbf{T}}$ in Beziehung

$$\tilde{\mathbf{T}} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}. \quad (1.20)$$

Mit \mathbf{I} bezeichnen wir den Einheitstensor und die Konstanten λ und μ sind Materialparameter, welche oft auch als Lamé-Parameter bezeichnet werden.

Der 2. Piola-Kirchhoff Tensor ist, im Gegensatz zum Rechten Cauchy-Green Tensor, ein objektiver Tensor. Da in einem Modell stets das Prinzip der Materialindifferenz gilt, was bedeutet, dass eine Konstitutivgleichung invariant unter Transformationen des Koordinatensystems sein muss, ist der 2. Piola-Kirchhoff Tensor $\tilde{\mathbf{T}}$, aufgefasst als Funktion vom Rechten Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} , eine gültige Konstitutivgleichung.

2 Modellproblem

Die Motivation des folgenden Modellproblems ist, ein Modell mit großen Verformungen zu untersuchen und folglich die Auswirkungen eines nichtlinearen Elastizitätsproblems modellieren und betrachten zu können. Dabei gehen wir von einem Modellproblem aus, wo die Nichtlinearität entsprechend zum Tragen kommt und dennoch relativ einfach zu berechnen ist.

Konkret betrachten wir ein eindimensionales Modellproblem mit einer gespannten Saite, die sich auf einer Strecke $[0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ im Rechengebiet $\Omega = (0, 1)$ befindet.

Die angeführten Koordinaten beziehen sich immer auf die Referenzkonfiguration. Der Einfachheit halber wird auch nicht zwischen den verschiedenen Schreibweisen X und x , welche zu Beginn eingeführt wurden, unterschieden.

Um das eingeführte Modell zu vereinfachen, gehen wir davon aus, dass alle Größen nur von einer Koordinate, $x_1 = x$ abhängen. Des Weiteren betrachten wir eine konstante Verformung, die etwa durch Schwerkraft verursacht wird, welche auf das Objekt wirkt. Folglich wird der Massenpunkt von $(x, 0)$ auf $(x, 0) + \mathbf{u}(x) \subset \mathbb{R}^2$ verschoben.

Zur weiteren Vereinfachung nehmen wir an, dass die Deformation nur in x_2 -Richtung stattfindet und erhalten die, durch die Verschiebung resultierende Position

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v(x) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Wir haben den Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(x)$ durch $\begin{pmatrix} 0 \\ v(x) \end{pmatrix}$ ersetzt, da wir ja nur Deformationen in der 2. Komponente betrachten. Dabei bezeichnet $v(x)$ eine skalare Funktion mit einem Argument x .

Zusätzlich stellen wir Dirichlet-Randbedingungen. Wir betrachten also den Fall, wo das Objekt am Rand fix eingespannt ist (siehe Abb. 2.1)

$$v(0) = v(1) = 0.$$

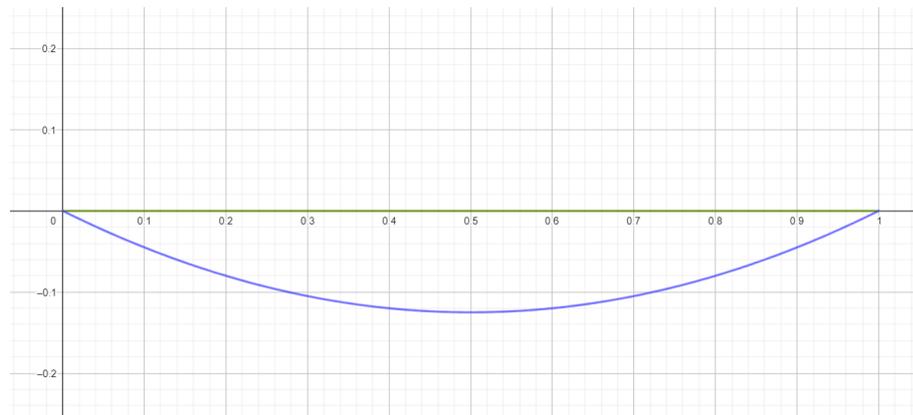


Abbildung 2.1: Gespannte Saite (undeformiert (grün), deformiert (blau))

2.1 Hyperelastische Materialien

Hyperelastische Materialien stellen in der Elastizitätstheorie eine recht allgemeine Form elastischer Materialien dar. Wir werden uns im Folgenden mit solchen beschäftigen.

Zunächst betrachten wir die wichtigsten kinematischen Größen unseres Modellproblems und rechnen diese anhand unserer Annahmen nach. Später wollen wir darauf zurück kommen.

- $\nabla \mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} & 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial v(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} & 1 \end{pmatrix}$
- $J = |\det \mathbf{F}| = 1$

Als nächstes schreiben wir den Impulserhaltungssatz (IES) aus (1.19) um zu:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{Div } \mathbf{T}_0 = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

wobei mit $\mathbf{f} := \rho_0 \mathbf{B}$ die Volumskraft bezeichnet wird.

Jetzt können wir unsere Materialgesetze verwenden, um die Anzahl der Unbekannten zu reduzie-

ren.

2.1.1 Hooke'sche Gesetz

Wir gehen zunächst vom Hooke'schen Gesetz aus

$$\mathbf{T} = \alpha \mathbf{B} \quad (\alpha \text{ konst.}).$$

Unter Verwendung von Gleichung (1.11) können wir die linke Seite umschreiben zu

$$\frac{1}{J} \mathbf{T}_0 \mathbf{F}^\top = \alpha \mathbf{B}$$

und auf ein Ausdruck von \mathbf{T}_0 umformen

$$\mathbf{T}_0 = \alpha J \mathbf{B} (\mathbf{F}^{-1})^\top$$

Zusammen mit (2.1) ergibt sich daraus

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{Div} (\alpha J \mathbf{B} (\mathbf{F}^{-1})^\top) = \mathbf{f}.$$

Verwenden wir nur die Darstellung vom linken Cauchy-Green Tensor mit $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^\top$ und ziehen die Konstanten α und J vor den Divergenzterm, so erhalten wir

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \alpha J \text{Div} \mathbf{F} = \mathbf{f}.$$

Wir betrachten nun den stationären Fall mit konstant wirkender Kraft $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$, die nur einen Beitrag in der 2. Komponente liefert, da wir uns ja auf eine Deformation in x_2 -Richtung beschränkt haben. Des weiteren verwenden wir an dieser Stelle die Resultate aus den vorhergehenden Berechnungen der kinematischen Größen. Folglich vereinfacht sich der Impulserhaltungssatz zu

$$-\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ v''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Da die erste Gleichung trivialerweise erfüllt ist, betrachten wir lediglich die 2. Komponente mit

$$v''(x) = \frac{-f}{\alpha}.$$

Die Differentialgleichung (DG) 2. Ordnung in v erfüllt die allgemeine Form

$$\Phi(v(x), v'(x), v''(x)) = f(x), \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$v(0) = v(1) = 0$$

mit einer Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir erhalten die Lösung der DG 2. Ordnung durch zweifaches Integrieren und können die dabei entstehenden Integrationskonstanten unter Verwendung der Randbedingungen ermitteln

$$v(x) = \frac{f}{2\alpha} x(1-x). \quad (2.2)$$

Wir haben diesen Fall also auf ein lineares Gleichungssystem zurückführen können.

Das liegt zum einen an der starken Vereinfachung des Modellproblems, etwa durch Einschränkungen der Abhängigkeit bei Deformation in nur eine Koordinatenrichtung x_2 und Betrachten des stationären Falls. Im Speziellen resultiert diese lineare Form aber daher, dass die Determinante von \mathbf{F} einen konstanten Ausdruck annimmt ($J = |\det \mathbf{F}| = 1$) und wir unter Verwendung des Hooke'schen Gesetzes eine lineare Formulierung des Spannungstensors erhalten haben.

2.1.2 St. Venant-Kirchhoff Modell

Betrachten wir nun unser Modellproblem unter dem 2. Materialgesetz, dem von St. Venant-Kirchhoff

$$\tilde{\mathbf{T}} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}.$$

Durch Einsetzen von (1.16) in die linke Seite der Gleichung erhalten wir das Materialgesetz in Abhängigkeit vom 1. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_0 = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}.$$

Umformen auf den 1. Piola-Kirchhoff Tensor ergibt

$$\mathbf{T}_0 = \lambda \mathbf{F} \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{F} \mathbf{E}. \quad (2.3)$$

Wir beschränken uns auch hier wieder auf den stationären Fall.

Der Impulserhaltungssatz vereinfacht sich daher zu

$$-\operatorname{Div} \mathbf{T}_0 = \mathbf{f}. \quad (2.4)$$

Setzt man das Materialgesetz (2.3) in die obige Gleichung (2.4) ein, erhält man

$$- \operatorname{Div} (\lambda \mathbf{F} \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{F} \mathbf{E}) = \mathbf{f},$$

wobei \mathbf{E} und \mathbf{F} nur von \mathbf{u} abhängen und λ und μ (homogene) Materialparameter sind.

Verwenden wir nun die bereits anfangs berechneten Resultate und setzen für die entsprechenden Größen ein, so sehen wir, dass das Gleichungssystem schon eine etwas kompliziertere Form annimmt. Auch der nichtlineare Term in \mathbf{E} kommt dieses mal zu Tragen.

$$\begin{aligned} & - \operatorname{Div} \left(\lambda \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} + E_{22} & 0 \\ 0 & E_{11} + E_{22} \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & E_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & - \operatorname{Div} \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial v(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & - \operatorname{Div} \left(\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 & 0 \\ \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^3 & \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial v(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} + \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^3 & \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & - \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \\ 3 \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + 3 \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten zwei Gleichungen mit nur einer Unbekannten $v(x)$. Wir haben es hier also mit einem überbestimmten Gleichungssystem zu tun.

Da wir in unserem Modellproblem angenommen haben, dass die Deformation nur in x_2 -Richtung wirkt, reduzieren wir unser Problem auf einen eindimensionalen Unterraum und betrachten im Folgenden die zweite, interessantere Gleichung:

$$-\frac{3\lambda}{2} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} - \mu \left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + 3 \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right) = f(x).$$

Eine Umordnung der Terme in einen linearen Teil und nichtlinearen Anteil liefert uns

$$-\mu v''(x) - 3 \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) v'(x)^2 v''(x) = f(x). \quad (2.5)$$

Es ergibt sich also eine skalare, nichtlineare Differentialgleichung (2. Ordnung) in v der Form

$$\Phi(v(x), v'(x), v''(x)) = f(x), \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$v(0) = v(1) = 0$$

mit einer Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Nichtlinearität dieser Differentialgleichung beruht in diesem Fall darauf, dass der nichtlineare

Verzerrungstensor \mathbf{E} im Materialgesetz entsprechend berücksichtigt wird.

Wir haben jetzt zwei verschiedene Ansätze betrachtet und eine lineare sowie eine nichtlineare DG erhalten. Die Lösung der linearen DG ist trivial, wir konnten sie sofort hinschreiben. Die Lösung der nichtlinearen DG ist jedoch schon etwas komplizierter. Deshalb wollen wir uns im Folgenden mit der Lösung einer solchen nichtlinearen Differentialgleichung beschäftigen.

3 Diskretisierung und Lösung

Unser Ziel ist es, eine Approximation v_h für die gesuchte Lösung $v(x)$ zu berechnen. Dazu betrachten wir einen diskretisierten Raum, nämlich einen Polynomraum.

Konkret suchen wir $v_h \in \mathcal{P}_p$, vom Grad höchstens p . Besonders gut eignen sich dafür Bernsteinpolynome, da diese viel besser konditioniert sind als die gewöhnliche, monomiale Basis $(x^j)_{j=0}^p$.

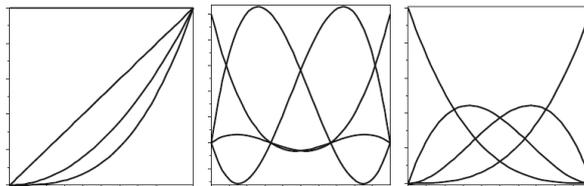


Abbildung 3.1: Monome, Lagrange- und Bernsteinpolynome vom Grad $p=3$ für $[0, 1]$

Die Abbildung 3.1 stellt Monome, Lagrange- und Bernsteinpolynome gegenüber und suggeriert bereits einige günstige geometrische Eigenschaften der Bernsteinpolynome.

3.1 Bernstein-Kollokation

Die Bernsteinpolynome besitzen mehrere vorteilhafte Eigenschaften [1]. Zum einen ist die Darstellung der Kurven mittels Bernsteinpolynome affin invariant (d.h. Zerlegung der Eins). Die Funktionen im Intervall $[a, b]$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$ sind nicht negativ und das Kurvenstück liegt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte (siehe dazu Abbildung 3.2). Des weiteren sind die Bernsteinpolynome symmetrisch, falls Knotenpunkte symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes $(a + b)/2$ des Parameterbereiches gewählt wurden.

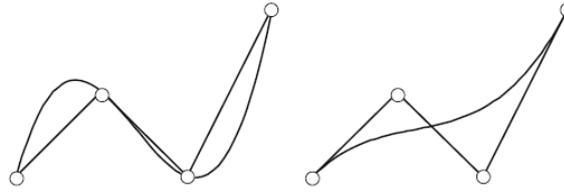


Abbildung 3.2: Polynomiale Kurven bzgl. Lagrange- und Bernsteinpolynome

Die Basis der Bernsteinpolynome wird durch folgende Funktionen gebildet

$$b_{jp}(x) = \binom{p}{j} x^j (1-x)^{p-j}, \quad \forall j \in \{0, \dots, p\}. \quad (3.1)$$

Mit Hilfe des reellen Koeffizientenvektor $(v_j)_{j=0}^p \in \mathbb{R}^{p+1}$ können wir $v_h(x)$ als Linearkombination von Bernsteinbasispolynomen darstellen

$$v_h(x) := \sum_{j=0}^p v_j b_{jp}(x) = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} v_j x^j (1-x)^{p-j}.$$

Da für $v_h(0) = v_0$ und $v_h(1) = v_p$ gilt und wir homogene Dirichlet-Randbedingungen vorgeschrieben haben, können wir $v_0 = v_p = 0$ setzen.

Es genügt daher den Vektor $\mathbf{v} := (v_j)_{j=1}^{p-1}$ niedriger Dimension zu betrachten und den Summenausdruck entsprechend anzupassen

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} v_j x^j (1-x)^{p-j}.$$

Um nun die Differentialgleichung (2.5) approximativ lösen zu können, verwenden wir Kollokation.

Wir wählen also Knotenpunkte $(\xi_j)_{j=1}^{p-1}$ im Intervall $(0, 1)$ und fordern, dass die Gleichung in diesen Punkten exakt erfüllt ist.

$$\Phi(v_h(\xi_j), v_h'(\xi_j), v_h''(\xi_j)) = f(\xi_j), \quad \forall j \in \{1, \dots, p-1\} \quad (3.2)$$

Mit Hilfe dessen können wir eine neue vektorwertige Funktion $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}^{p-1}$ einführen

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) := (f(\xi_j) - \Phi(v_h(\xi_j), v_h'(\xi_j), v_h''(\xi_j)))_{j=1}^{p-1}$$

sodass das diskrete Gleichungssystem die einfache Form

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = 0 \quad (3.3)$$

besitzt.

Wir berechnen uns also zuerst die 1. und 2. Ableitung von v_h .

Setzen wir die entsprechenden Knotenpunkte ξ_j ein, so erhalten wir

$$v'_h(\xi_j) = \sum_{j=1}^{p-1} v_j b'_{jp}(\xi_j),$$

$$v''_h(\xi_j) = \sum_{j=1}^{p-1} v_j b''_{jp}(\xi_j),$$

wobei wir für diese Darstellung ebenfalls die erste und zweite Ableitung der Bernsteinbasispolynome benötigen.

Zur Herleitung der 1. Ableitung betrachten wir zunächst die Darstellung der Bernsteinbasispolynome (3.1) und leiten diese nach x ab

$$\begin{aligned} b'_{jp}(x) &= (b_{jp}(x))' \\ &= \frac{p!}{j!(p-j)!} j x^{j-1} (1-x)^{p-j} + \frac{p!}{j!(p-j)!} (-1)(p-j) x^j (1-x)^{p-j-1} \\ &= p \frac{(p-1)!}{(j-1)!((p-1)-(j-1))!} x^{j-1} (1-x)^{(p-1)-(j-1)} - p \frac{(p-1)!}{j!(p-j-1)!} x^j (1-x)^{p-j-1} \\ &= p(b_{j-1,p-1}(x) - b_{j,p-1}(x)). \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass $b_{jp} = 0$ für die Fälle $j < 0$ oder $j > p$ gilt.

In der obigen Herleitung haben wir zudem folgende Identität des Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \forall i, n \in \mathbb{N}$$

und der Faktoriellen

$$n! = n(n-1)! \quad \forall i, n \in \mathbb{N}$$

verwendet.

Insgesamt erhalten wir den entsprechenden Ausdruck für die 1. Ableitung

$$b'_{jp}(\xi_j) = p(b_{j-1,p-1}(\xi_j) - b_{j,p-1}(\xi_j)). \quad (3.4)$$

Die 2. Ableitung lässt sich nun gemeinsam mit (3.1) und (3.4) herleiten

$$\begin{aligned}
 b_{jp}''(x) &= (b_{jp}'(x))' = (p(b_{j-1,p-1}(x) - b_{j,p-1}(x)))' = p(b_{j-1,p-1}'(x) - b_{j,p-1}'(x)) \\
 &= p((p-1)(b_{j-2,p-2}(x) - b_{j-1,p-2}(x)) - (p-1)(b_{j-1,p-2}(x) - b_{j,p-2}(x))) \\
 &= p(p-1)(b_{j-2,p-2}(x) - b_{j-1,p-2}(x) - b_{j-1,p-2}(x) + b_{j,p-2}(x)) \\
 &= p(p-1)(b_{j-2,p-2}(x) - 2b_{j-1,p-2}(x) + b_{j,p-2}(x)) \\
 &= (p^2 - p)(b_{j-2,p-2}(x) - 2b_{j-1,p-2}(x) + b_{j,p-2}(x)).
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also folgenden Ausdruck für die 2. Ableitung der Bernsteinbasispolynome

$$b_{jp}''(\xi_j) = (p^2 - p)(b_{j-2,p-2}(\xi_j) - 2b_{j-1,p-2}(\xi_j) + b_{j,p-2}(\xi_j)).$$

Durch einsetzen in unsere nichtlineare Differentialgleichung (2.5) ergibt sich die zu lösende Differentialgleichung

$$-\mu v_h''(\xi_j) - 3\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)(v_h'(\xi_j))^2 v_h''(\xi_j) = f(\xi_j)$$

\Leftrightarrow

$$f(\xi_j) + \mu v_h''(\xi_j) + 3\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)(v_h'(\xi_j))^2 v_h''(\xi_j) = 0.$$

Also

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = (f(\xi_j) + \mu v_h''(\xi_j) + 3\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)v_h'(\xi_j)^2 v_h''(\xi_j))_{j=1}^{p-1}. \quad (3.5)$$

3.2 Chebyshev-Knoten

Als Knotenpunkte (ξ_j) wählen wir im Speziellen Chebyshev-Knoten 1. Art, da die Nullstellen eines Chebyshev-Polynoms einfache Nullstellen sind und sich somit gut als Knoten in der Polynom-Interpolation eignen. Zudem besitzen diese einige vorteilhafte Symmetrieeigenschaften.

$$\tilde{\xi}_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2(p-1)}\pi\right), \quad j = 1, \dots, p-1$$

Da diese im Intervall $(-1, 1)$ liegen, wir aber in unserem Modell das Intervall $(0, 1)$ betrachten, transformieren wir diese Knoten auf das entsprechende Intervall, mit $\xi_j = \frac{1}{2}(1 - \tilde{\xi}_j) \in (0, 1)$.

Wir erhalten also die Knotenpunkte ξ der Form

$$\xi_j = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2j-1}{2(p-1)}\pi\right) \right), \quad j = 1, \dots, p-1.$$

3.3 Richardson-Verfahren

Wir können nun unser Gleichungssystem (3.3) mittels einem einfachen iterativen nichtlinearen Richardson-Verfahrens lösen.

Die iterative Lösung des Gleichungssystems beruht auf der Umformung des Problems (2.5) (und insbesondere (3.3)) in eine Fixpunktgleichung

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \tau \mathbf{G}(\mathbf{v}), \tag{3.6}$$

woraus man folgende Fixpunktiteration erhält

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + \tau \mathbf{G}(\mathbf{v}^k). \tag{3.7}$$

Die entsprechende Iteration lautet:

1. Setze einen beliebigen Startvektor, wie etwa: $\mathbf{v}^0 = (0, \dots, 0)^\top$
2. Für $k = 1, 2, \dots$ berechne

$$\mathbf{v}^k := \mathbf{v}^{k-1} + \tau \mathbf{G}(\mathbf{v}^{k-1}),$$

wobei mit $\tau > 0$ ein Dämpfungsparameter bezeichnet wird.

In diesem Pseudo-Algorithmus entspricht $\mathbf{G}(\mathbf{v}^{k-1})$ dem Residuum r_{k-1} des Richardson-Verfahrens. Im 2. Schritt wird die neue Näherung $\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + \tau r_k$ berechnet, und zwar so oft, bis die aktuelle Näherung die Bedingung $\mathbf{G}(\mathbf{v}) = 0$ annähernd erreicht hat, was mittels der euklidischen Norm gemessen wird

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{v})\| \leq \epsilon.$$

In der folgenden Implementierung wird das Abbruchkriterium $\epsilon = 10^{-6}$ gewählt. Der Lösungsvektor der Gleichung (3.3) entspricht genau dem Fixpunkt der obigen Fixpunktiteration.

Die Heranziehung eines iterativen Verfahrens zur approximativen Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (2.5), wie in diesem Fall das Richardson-Verfahren, bringt einige Vorteile mit sich:

- Geringer Speicherplatz-Bedarf
- Geringer bzw. unbedeutender Rundungsfehlereinfluss
- Geringer Aufwand pro Iteration

Es ergibt sich jedoch auch ein Nachteil:

- Verfahrensfehler, welcher durch Abbruch der Iteration entsteht.

Um folglich einen kleinen Verfahrensfehler mit geringem Aufwand erreichen zu können, muss das Verfahren schnell konvergieren (d.h. die Anzahl der Iterationen darf nicht zu groß sein). Wie die Konvergenzrate aussieht, werden wir anhand numerischer Experimente evaluieren.

3.4 Vereinfachtes Newtonverfahren

Um die Anzahl der Iterationen zu verringern und damit auch die Rechenzeit zu verkürzen gibt es weitere Möglichkeit, nämlich das Iterationsverfahren (3.7) zu präkonditionieren.

Für nichtlineare Funktionen bietet es sich an, ein Newton-Verfahren durchzuführen, welches in gewisser Hinsicht auch einer Präkonditionierung des Iterationsverfahren entspricht.

Um zunächst die Newtonrichtung [3] mit $\mathbf{p}^k = -\mathbf{G}'(\mathbf{v}^k)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{v}^k)$ berechnen zu können, benötigen wir die Jacobimatrix von $\mathbf{G}(\mathbf{v})$

$$\mathbf{G}'(\mathbf{v}) = \frac{\partial(\mathbf{G}(\mathbf{v}))_i}{\partial v_j} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{v})}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{v})}{\partial v_{p-1}} \right]$$

mit

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = (f + \mu v_h''(\xi_j) + 3(\frac{\lambda}{2} + \mu)v_h'(\xi_j)^2 v_h''(\xi_j))_{j=1}^{p-1}$$

⇔

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \left(f + \mu \sum_{j=1}^{p-1} v_j b''_{jp}(\xi_j) + 3 \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) \left(\sum_{j=1}^{p-1} v_j b'_{jp}(\xi_j) \right)^2 \sum_{j=1}^{p-1} v_j b''_{jp}(\xi_j) \right)_{j=1}^{p-1}$$

Wir leiten also die i -te Komponente von $\mathbf{G}(\mathbf{v})$ ab und erhalten zunächst die Jacobi-Matrix an der Stelle \mathbf{v}

$$\mathbf{G}'(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mu b''_{1p}(\xi_i) + 6 \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) v_1 b'_{1p}(\xi_i) \left(\sum_{j=1}^{p-1} v_j b''_{jp} \right) + 3 \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) \left(\sum_{j=1}^{p-1} v_j b'_{jp} \right)^2 b''_{1p}(\xi_i) \\ \vdots \\ \mu b''_{(p-1)p}(\xi_i) + 6 \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) v_{p-1} b'_{(p-1)p}(\xi_i) \left(\sum_{j=1}^{p-1} v_j b''_{jp} \right) + 3 \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) \left(\sum_{j=1}^{p-1} v_j b'_{jp} \right)^2 b''_{(p-1)p}(\xi_i) \end{bmatrix}^T.$$

Setzen wir nun den Startvektor $\mathbf{v}^0 = (0, \dots, 0)$ des Iterationsverfahren ein, so erhalten wir

$$\mathbf{G}'(0) = \begin{bmatrix} \mu b''_{1p}(\xi_i) \\ \vdots \\ \mu b''_{(p-1)p}(\xi_i) \end{bmatrix}^T.$$

Mit der Wahl von $\mu := 1$ ergibt sich unsere Approximation der Jacobimatrix \mathbf{A} , also

$$\mathbf{A}_{i,j} = b''_{jp}(\xi_i) \quad \text{mit } i = 1 \dots p-1 \quad \text{und } j = 1 \dots p-1.$$

Wir können nun also die diskretisierte Lösung unser nichtlinearen DG 2. Ordnung mittels der adaptierten Iterationsvorschrift

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + \tau \mathbf{p}^k = \mathbf{v}^k + \tau - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{v}^k)$$

mit fester Matrix \mathbf{A} berechnen.

Dabei entspricht die Suchrichtung \mathbf{p}^k der Form $\mathbf{p}^k = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{v}^k)$ und als Schrittweite wählen wir den Parameter τ . Wir nennen dieses Iterationsverfahren ein vereinfachtes Newtonverfahren [3].

Für den Fall $p = 2$ erhalten wir einen Sonderfall. In unserem Diskretisierungsmodell wird nur ein einziger Knotenpunkt an der Stelle $x = 0.5$ ausgewertet. Da dieser genau das globale Minimum unserer Polynomfunktion bildet, ist die 1. Ableitung gleich null. Wir können also unser Gleichungssystem mit dem linearen Fall gleichsetzen und erhalten nach nur einem Schritt des vereinfachten Newtonverfahrens mit der regulären Matrix \mathbf{A} und der Wahl $\tau = 1$ die exakte Lösung

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{v}^k) = \mathbf{v}^k + \mathbf{A}^{-1} (f - \mathbf{A} \mathbf{v}^k) = \mathbf{v}^k + \mathbf{A}^{-1} f - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{v}^k = \mathbf{A}^{-1} f = \mathbf{v}.$$

4 Numerische Experimente

Sämtliche Programme wurden in matlab implementiert. Falls nichts anderes angemerkt wird, gilt folgende Setzung der vorkommenden Konstanten:

- $f = -1$
- $\alpha = 1$
- $\lambda = 1$
- $\mu = 1$

Wir können nun unter den bisher hergeleiteten Resultaten eine diskretisierte Näherungslösung v_h der nichtlinearen Differentialgleichung berechnen und führen zunächst das nichtlineare Richardson-Verfahren durch.

Zunächst erhalten wir für den Polynomgrad $2 \leq p \leq 13$ brauchbare Resultate, wobei mit steigendem p der Dämpfungsparameter τ entsprechend angepasst bzw. verkleinert werden muss. Geeignete Werte für τ , für die das Verfahren konvergiert, liegen zwischen 0.01 und 0.005.

So ergeben sich etwa für $p = 5$ und $\tau = 0.01$ 155 Iterationen, für gleiches p und $\tau = 0.005$ erhalten wir 316 Iterationen bis das Abbruchkriterium erfüllt ist (also unsere Näherungslösung akzeptiert wird). Für die Wahl $p = 13$ und $\tau = 0.005$ konvergiert das Verfahren nach 481 Iterationen (siehe Tabelle 4.1).

Glücklicherweise sind bei Anwendung eines Richardson-Verfahrens solche hohen Iterationszahlen mit verhältnismäßig wenig Rechenaufwand verbunden, da wir ein relativ einfaches Gleichungssystem mit wenig Unbekannten betrachten.

p	Richardson	vereinfachtes	
		Newtonverfahren	τ
2	339	1	0.01/1
3	121	371	0.01/1
4	226	214	0.01/1
5	155	52	0.01/1
6	182	53	0.01/1
7	150	55	0.01/1
8	204	55	0.01/1
9	144	54	0.01/1
10	688	54	0.005/1
11	287	55	0.005/1
12	1493	55	0.005/1
13	481	55	0.005/1
14		55	1
15		55	1
16		55	1
17		56	1
18		56	1
19		56	1
20		56	1

Tabelle 4.1: Anzahl der benötigten Iterationen

Die Anzahl der benötigten Iterationen reduzieren sich unter Verwendung des vereinfachten Newtonverfahrens für $p = 5$ und $\tau = 0.1$ auf 98 und für ein $\tau = 1$ benötigt das Verfahren sogar nur mehr 52 Iterationen (siehe Tabelle 4.1). Unter Verwendung des vereinfachten Newtonverfahrens wird mit 155 Iterationen nur mehr etwa ein Drittel der Anzahl an Iterationen des Richardson-Verfahrens benötigt.

Wählt man $p = 13$ und $\tau = 1$, so erhält man 55 Iterationen. Das Verfahren konvergiert also schneller als das Richardson-Verfahren und die Anzahl der Iterationen bleibt auch noch für hohe Ordnungen verhältnismäßig klein und stabil. Neben der deutlich geringeren Anzahl an benötigten Iterationen, können wir einen viel größeren Dämpfungsparameter (etwa $\tau = 1$) wählen und das Verfahren konvergiert auch noch für viel höhere Polynomordnungen, wie z.B. für $p = 20$. Für das nichtlineare Richardson-Verfahren erhalten wir für $p \geq 14$ keine entsprechenden Resultate mehr, da die maximale Iterationsanzahl von 1500 überschritten wird. Das bedeutet insbesondere, dass experimentell in dieser Implementierung des Iterationsverfahrens kein passendes τ gefunden werden kann, sodass das Verfahren konvergiert. In Tabelle 4.1 werden die Resultate bezüglich der Anzahl an Iterationen beider Iterationsverfahren (nichtlineares Richardson und vereinfachtes

Newtonverfahren) gegenüber gestellt.

Zudem benötigt das vereinfachte Newtonverfahren nicht nur weniger Iterationen pro Ordnung, sondern ist auch schneller als das nichtlineare Richardson-Verfahren. Werten wir etwa die approximative Lösung für $p = 8$ aus, so erhalten wir eine Differenz von 0.08 Sekunden.

Um ein Gefühl für die Performance des vereinfachten Newtonverfahrens zu bekommen, betrachten wir die Konditionszahl unserer Präkonditionsmatrix \mathbf{A} .

In Tabelle 4.2 sehen wir, dass für Polynomordnung $p = 2$ unser Problem sehr gut konditioniert ist, die Konditionszahl von \mathbf{A} beträgt 1. Für steigende Ordnungen p , wächst auch die Konditionszahl stark an. Konkret bekommen wir für $p = 13$ eine Konditionszahl von $6,2 \cdot 10^2$ und für $p = 20$ ist $\text{cond}(\mathbf{A}) = 7,7 \cdot 10^4$. Obwohl dieser Wert schon recht hoch ist, stellt diese Konditionszahl keine Einschränkung an der Genauigkeit unserer Resultate dar, da wir uns unter Verwendung einer Maschinengenauigkeit von 10^{16} noch unterhalb der Größenordnung des zu erwartenden numerischen Fehlers befinden.

p	$\text{cond}(\mathbf{A})$
2	1
3	2.1
4	4.1
5	6.4
6	9.5
7	13
8	20.7
9	40.3
10	79.3
11	156.6
12	310.5
13	616.6
14	1226.3
15	2441.3
16	4864
17	9696.3
18	19339
19	38583
20	77003

Tabelle 4.2: Konditionszahl von \mathbf{A}

In der Abbildung 4.1 wird die approximative Lösung v_h der nichtlinearen Differentialgleichung 2. Ordnung (3.5) unter Verwendung von Kollokationspunkten ξ_j , mit $j = 1, \dots, p - 1$ bis Ordnung $p = 7$ im Vergleich mit der exakten Lösung der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung (2.2) dargestellt.

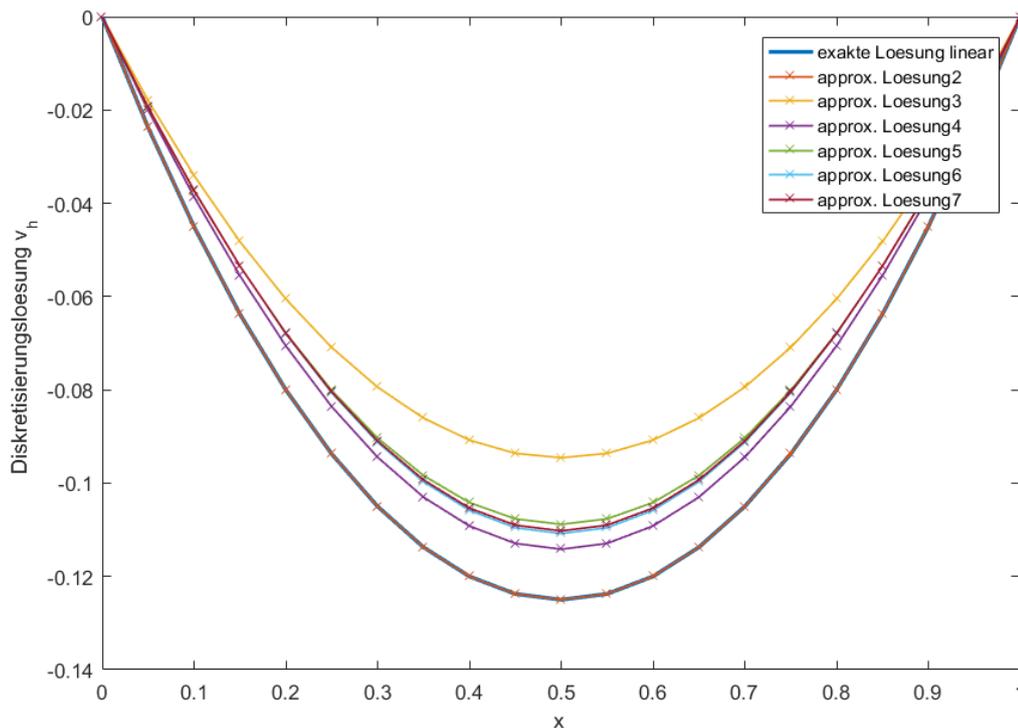


Abbildung 4.1: approx. Lösung, $2 \leq p \leq 7$

Im Fall $p = 2$ entspricht im approximativen Verfahren die lineare DG genau der nichtlinearen DG, da die Gleichung $\mathbf{G}(\mathbf{v})$ nur an einem einzigen Knotenpunkt $\xi_1 = 0.5$ ausgewertet wird. Folglich ist die 1. Ableitung von v null, da sich an der Stelle $\xi_1 = 0.5$ das globale Minimum befindet (siehe Abbildung 4.1).

Per Konstruktion ist die Näherungslösung $v_h \in \mathcal{P}_p$ abhängig von den gewählten Kollokationspunkten, insbesondere von der Ordnung p . Deshalb können wir für jeden Polynomgrad $p \geq 2$ eine Näherungslösung v_h berechnen, wobei mit größer werdendem p eine genauere Approximation an die exakte Lösung gewonnen werden kann.

Um das Verhalten des Residuums im Richardson-Verfahrens darstellen zu können, betrachten wir

eine Funktion $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$R(x) := f + \mu v_h''(x) + 3\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) (v_h'(x))^2 v_h''(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Die Residuumsfunktion entspricht quasi der Funktion $\mathbf{G}(\mathbf{v})$, nur dass hier jetzt die Funktion nicht nur an den Kollokationspunkten, sondern auch an mehreren anderen Punkten $x \in [0, 1]$ ausgewertet wird.

Wir stellen die Residuumsfunktion $R(x)$ in der folgenden Grafik (4.2) dar und können beobachten, dass mit zunehmenden Polynomgrad p die maximale Amplitude der jeweiligen Funktion immer kleiner wird. Das bedeutet, der Fehler des Residuums geht für große p gegen 0.

Zusätzlich sind in der Abbildung 4.2 die verschiedenen Stützstellen für die entsprechenden Polynomfunktionen eingezeichnet. Daraus ist ersichtlich, dass nicht alle Knotenpunkte von einer Funktion getroffen werden, sondern nur jene, die die Gleichung 3.2 erfüllen, denn genau so haben wir die Bernstein-Kollokation konstruiert.

Für verschiedene Polynomordnungen p werden also verschiedene Kollokationspunkte ξ_j berechnet und nur die Funktion, die zu diesem verwendeten p gehört, erfüllt auch die Gleichung 3.2 an den Stützstellen ξ_j . Das heißt, die jeweiligen Stützstellen entsprechen genau den Nullstellen der Residuumsfunktion.

Die Bedingung, dass der Funktionswert an der Stelle ξ gleich 0 ist, kann aber nur näherungsweise erfüllt werden, da wir die entsprechenden v_h mittels eines Iterationsverfahrens berechnet haben und das Programm eine Lösung zurück gibt, wenn die Abbruchbedingung

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{v})\| \leq 10^{-6}$$

erfüllt ist. Es ergeben sich also kleine Abweichungen von Null ($\leq 10^{-6}$) in der Nähe der verwendeten Stützstellen.

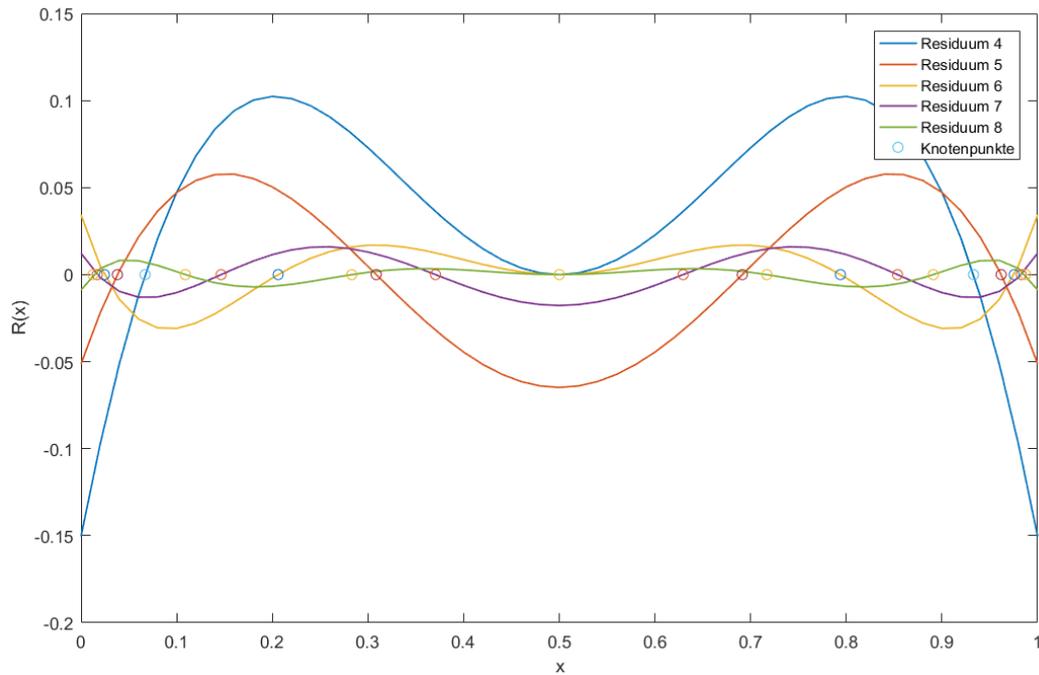


Abbildung 4.2: Residuum, $4 \leq p \leq 8$

Betrachten wir noch einmal die Fehlerkurven der Funktion $R(x)$ genauer.

Wegen

$$-\frac{v''(x)}{\alpha} = f$$

und

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = (f(\xi_j) - \Phi(v_h(\xi_j), v_h'(\xi_j), v_h''(\xi_j)))_{j=1}^{p-1},$$

mit der Bedingung

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = 0,$$

entspricht im linearen Fall die Norm des Residuums der 2. Ableitung des Fehlers von v . Im nicht-linearen Fall kommen noch weitere Terme hinzu. Dennoch kann eine Aussage über die Größenordnung des Fehlers gemacht und zur Interpretation des Fehlerverhaltens herangezogen werden. Den daraus resultierenden Residuumsfehler im nichtlinearen Fall haben wir in Abbildung 4.9 dargestellt und werden im nächsten Kapitel darauf zurück kommen.

4.1 Diskretisierungsfehler

4.1.1 Analytische Lösung

Bisher haben wir uns mit einer Approximation der nichtlinearen Differentialgleichung 2. Ordnung beschäftigt. Um nun den Diskretisierungsfehler bestimmen zu können, benötigen wir die exakte Lösung.

Wir lösen die nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung analytisch mit Hilfe eines Computer Algebra Systems (CAS) und erhalten somit eine exakte Lösung.

Da die nichtlineare DG 2. Ordnung unseres Modellproblems aber nicht direkt per Mathematica gelöst werden kann, reduzieren wir unser Problem (2.5) zunächst auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung, etwa

$$-w'(x) - \frac{3}{\mu} \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) w(x)^2 w'(x) = \frac{f}{\mu}$$

mit

$$\begin{aligned} w(x) &= v'(x) \\ w'(x) &= v''(x). \end{aligned}$$

Substituieren wir den Ausdruck $\frac{3}{\mu} \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right)$ durch die Variable a und setzen $\mu := 1$, so erhalten wir

$$-w'(x) - aw(x)^2 w'(x) = f.$$

Diese einfachere Form der nichtlinearen DG 1. Ordnung kann nun mittels Mathematica gelöst werden. Durch eine geeignete Wahl der Integrationskonstanten, erfüllt die Gleichung die nötigen Symmetrieeigenschaften, insbesondere $v(0) = v(1)$.

Für die exakte Lösung ergibt sich folgende Darstellung:

solution =

$$\begin{aligned}
 & - (-8(\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)} - 9a^2y)(\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)} + 3a^2y)^{2/3} \\
 & + (62^{1/3}a\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)}(48a^2y^2 + 27a^3(y^2)^2 + 8\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)}y \\
 & + a(32 + 9\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)}y^3)))/(16a + 9a^2y^2 + 3\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)}y) \\
 & - (2^{1/3}a(\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)} + 3a^2y)(432a^2y^2 + 81a^3(y^2)^2 + 120\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)}y \\
 & + a(224 + 27\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)}y^3)))/(8a + (9a^2y^2 + 3\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)}y)) \\
 & / (128 \cdot 2^{2/3}a^3f(\sqrt{a^3(16 + 9ay^2)} + 3a^2y)^{1/3}),
 \end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $y = f(2x - 1)$ und $a = (3/\mu)(\lambda/2 + \mu)$ verwendet haben.

Diese Darstellung der Lösung lässt sich anschließend in matlab als Funktion implementieren und kann somit für weitere Berechnungsschritte herangezogen werden.

Da durch Reduktion der Ordnung die Randbedingungen nicht berücksichtigt werden können, muss im Nachhinein der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ subtrahiert werden. Folglich erfüllt unsere analytische Lösung wieder die homogenen Dirichlet-Randbedingungen unseres Modellproblems.

Mit Kenntnis der exakten analytischen Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung 2. Ordnung ist es nun möglich Überlegungen hinsichtlich des Diskretisierungsfehlers anzustellen.

Die Abbildung 4.3 stellt die analytische Lösung im Vergleich mit der approximativen Lösung v_h der nichtlinearen Differentialgleichung mit Kollokationspunkten ξ_j , mit $j = 1, \dots, p - 1$ bis zur Ordnung $p = 7$ dar. Für kleine Ordnungen, wie etwa für $p = 4$, ergeben sich große Unterschiede zur exakten Lösung. Für größer werdende p hingegen, nähert sich die approximative Lösung der analytischen Lösung immer mehr an (siehe Abbildung 4.3).

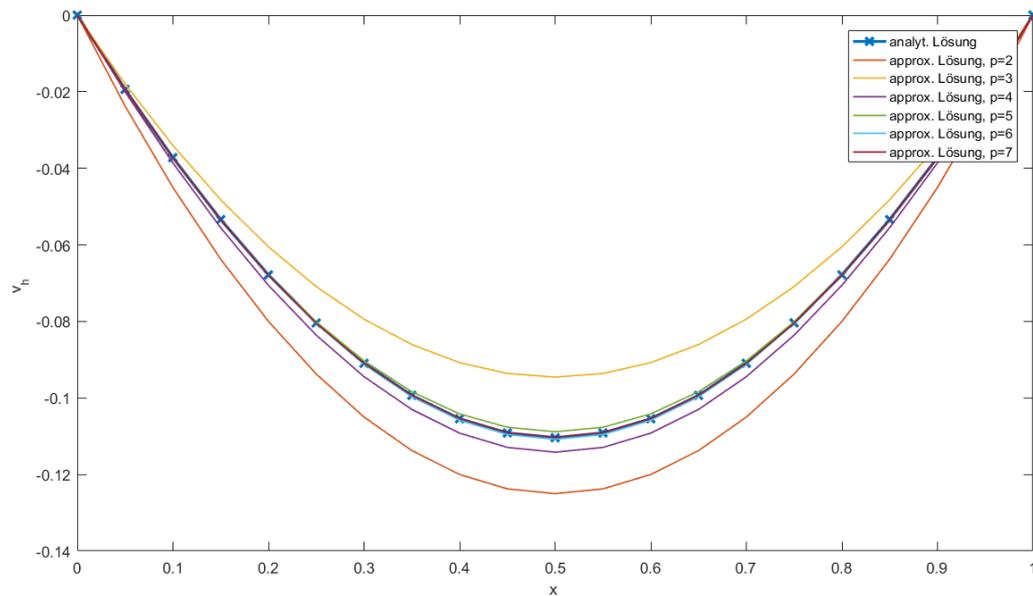


Abbildung 4.3: analytische Lösung, bis $2 \leq p \leq 7$

Bisher wurde stets die vereinfachte Annahme mit Setzung der Materialkonstanten λ und μ gleich 1 und Schwerkraft $f = -1$ getroffen. Im Folgenden untersuchen wir die Auswirkung unterschiedlicher Kräfteinwirkung auf unser Modellproblem und dessen Lösung.

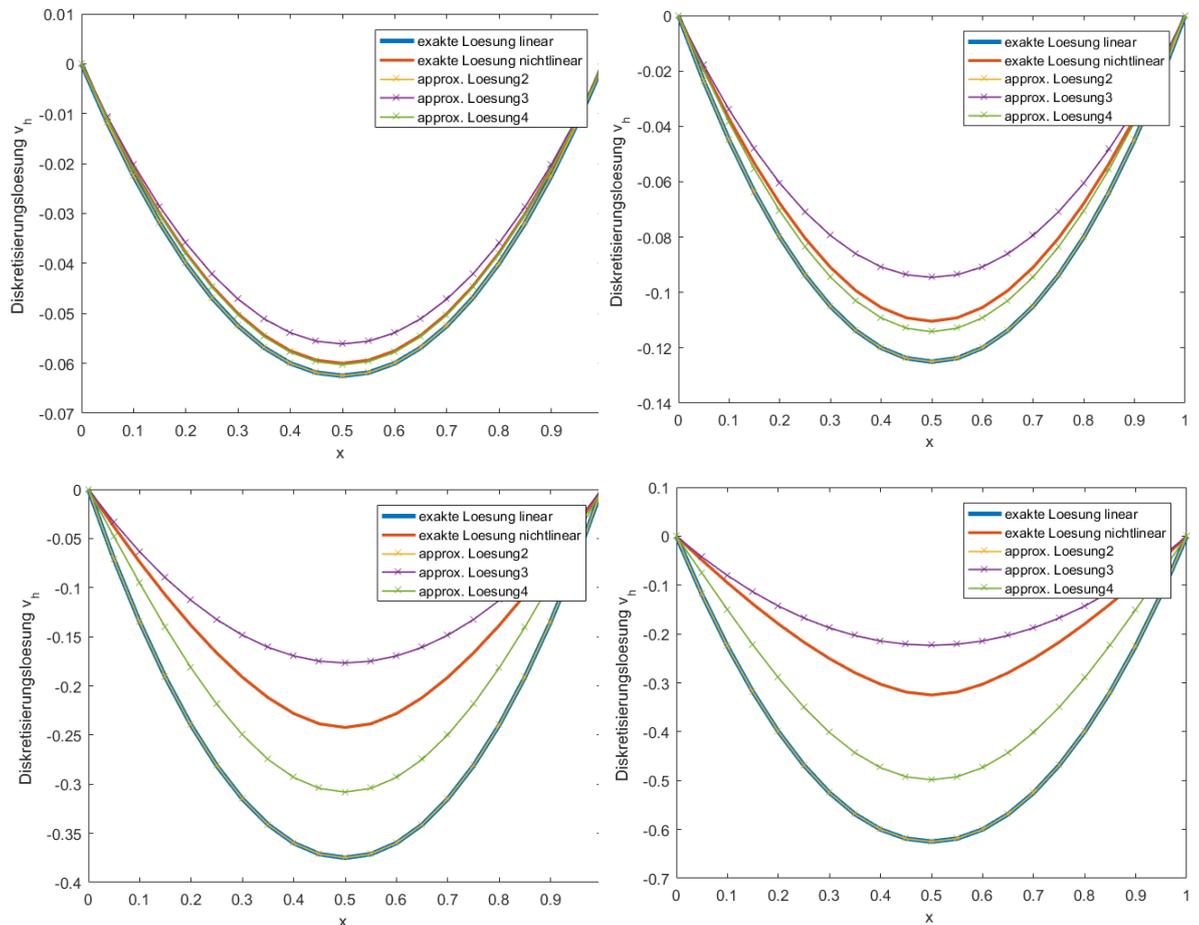


Abbildung 4.4: Auslenkung für $f = -\frac{1}{2}, -1, -3, -5$ und $2 \leq p \leq 4$

Wie man in Abbildung 4.4 beobachten kann, entspricht die diskretisierte, nichtlineare Lösung für $f = -\frac{1}{2}$ nahezu der linearen Lösung. Mit zunehmender Kraftereinwirkung driften die Lösungskurven immer weiter auseinander.

Da für eine kleine rechte Seite f die Lösungen sehr eng beieinander liegen, erreichen wir mit einem Bernsteinpolynom 4. Ordnung mittels dem Kollokationsverfahren bereits eine gute Approximation an die nichtlineare Lösung unserer Differentialgleichung. Für eine einwirkende Kraft $f = -1$ werden wir im nächsten Abschnitt das Fehlverhalten unseres Diskretisierungsverfahrens noch genauer betrachten.

Zunächst wollen wir uns aber mit den Resultaten aus Abbildung 4.4 für größere Ordnungen beschäftigen. Dazu betrachten wir die maximale Auslenkung der Kurve an der Stelle $x = 0.5$ für ein p zwischen Polynomgrad 2 und 9.

In Abbildung 4.5 skalieren wir die x -Achse mit ansteigenden Werten der Schwerkraftereinwirkung auf die gespannte Saite. Entlang der y -Achse wird die jeweilige maximale Auslenkung an der Stelle $x = 0.5$ aufgetragen.

Folglich bekommen wir eine schöne Veranschaulichung unseres nichtlinearen Modellproblems. Wir können einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Krafteinwirkung und maximaler Auslenkung für $p > 2$ beobachten.

Für Grad $p = 2$ entspricht die Berechnung wieder dem linearen Fall. Wir erhalten also einen linearen Zusammenhang. Für größer werdende p 's hingegen, verläuft die Strecke der maximalen Auslenkungen unter Einfluss verschieden großer Krafteinwirkungen nicht mehr linear. Mit höherem Polynomgrad p nähern wir uns sukzessive der strichlierten Linie an, die als Referenzlinie dient und anhand der analytischen Lösungen konstruiert wurde (siehe Abbildung 4.5).

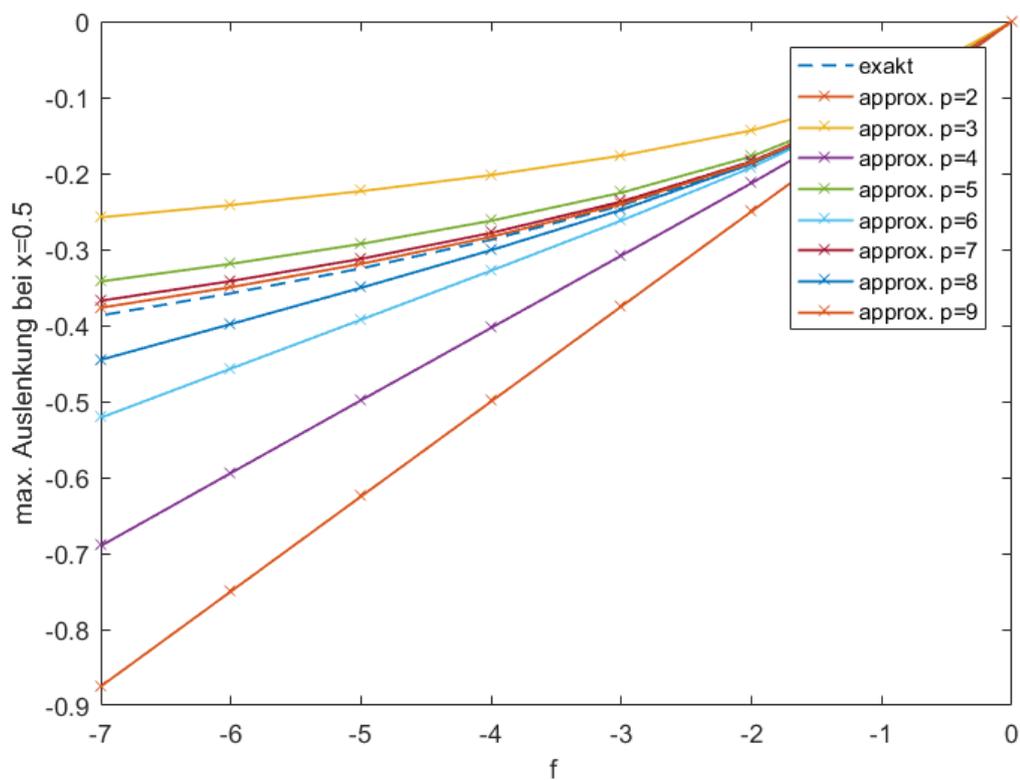


Abbildung 4.5: max. Auslenkung bei $x=0.5$, $2 \leq p \leq 9$

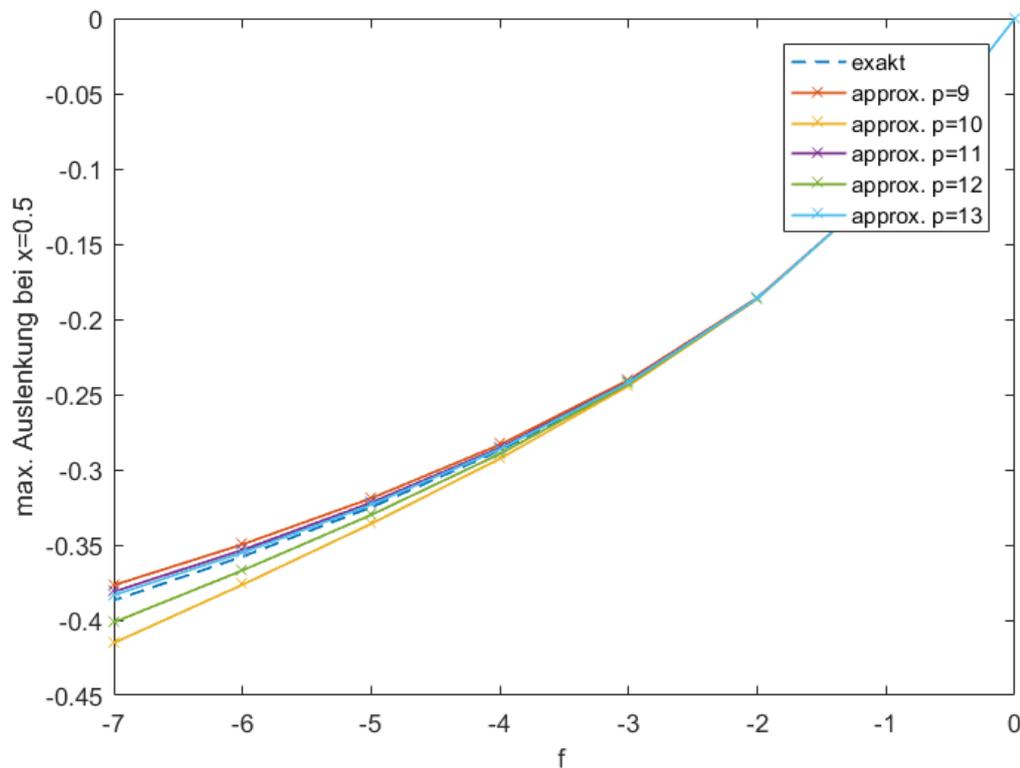


Abbildung 4.6: max. Auslenkung bei $x=0.5$, $9 \leq p \leq 13$

Zusätzlich sehen wir in Abbildung 4.6, dass wir für große p eine gute Approximation der exakten Lösung erhalten. Für eine Kräfteinwirkung $f \geq -3$ können wir anhand der Grafik keinen Unterschied zwischen approximativer und exakter Lösung erkennen. Obwohl für $f = -7$ sehr große, nichtlineare Deformationen stattfinden, ist die diskretisierte Lösung für $p = 13$ sehr nahe an der Referenzlösung.

4.1.2 Bestimmung des Diskretisierungsfehlers

Zunächst betrachten wir die Fehlerkurven für verschiedene Polynomordnungen. Anhand der Abbildung 4.7 (links) erkennt man ein bestimmtes Muster. Für gerade Polynomordnungen $p = 2, 4, 6$ erhalten wir eine max. Fehlerabweichung entlang der negativen y-Achse, wohingegen für ungerade Ordnungen $p = 3, 5, 7$ die Fehlerkurve in der positiven Hälfte der y-Achse verläuft und eine größere Amplitude besitzt (Abbildung 4.7, rechts). Das heißt, der maximale Fehler alterniert zwischen positiver und negativer y-Halbachse und pendelt sich mit Verfeinerung der Diskretisierung entlang der horizontalen Referenzlinie bei $y = 0$ ein.

Für eine feinere Diskretisierung mit höherer Polynomordnung, konkret für $p = 13$, besitzt der Fehler bereits eine Größenordnung von ca. 10^{-6} (siehe Abbildung 4.8).

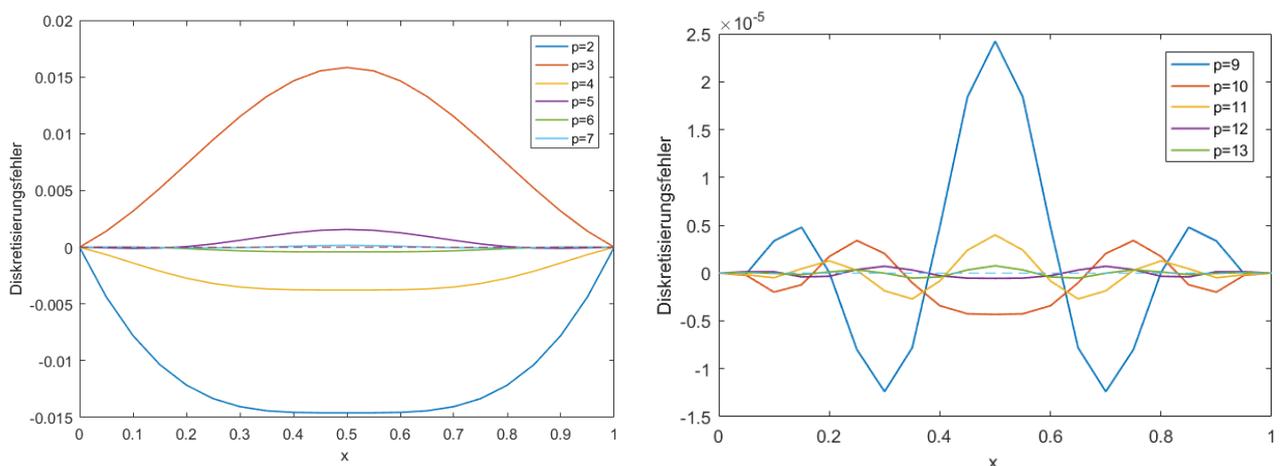


Abbildung 4.7: Fehlerfunktion $2 \leq p \leq 7$ (links), $9 \leq p \leq 13$ (rechts)

Betrachten wir nun den Diskretisierungsfehler genauer.

Dazu verwenden wir die obigen Resultate der Fehlerkurven. Es bietet sich an, den maximalen Fehler im Punkt x jeder Kurve, also pro Ordnung p , zu messen. Dazu verwenden wir die Maximumsnorm.

Alternativ dazu betrachten wir auch den Fehler in L_2 Norm, für deren näherungsweise Berechnung zunächst eine Quadraturformel mit Trapezregel angewendet werden kann. Diese Fehlernorm gibt dann Aufschluss über den mittleren Diskretisierungsfehler, welcher somit auch wesentlich kleiner ausfällt (siehe Abbildung 4.8).

In den folgenden Abbildungen des Diskretisierungsfehlers ist die y-Achse logarithmisch (mit Basis 10) und die x-Achse linear skaliert. Anhand der Abbildungen (4.8, 4.9) erkennen wir also, dass sich der Diskretisierungsfehler mit wachsender Ordnung p exponentiell verringert.

Für $p = 2$ erhalten wir beispielsweise einen Fehler von $1,46 \cdot 10^{-2}$ und für $p = 13$ einen Fehler von

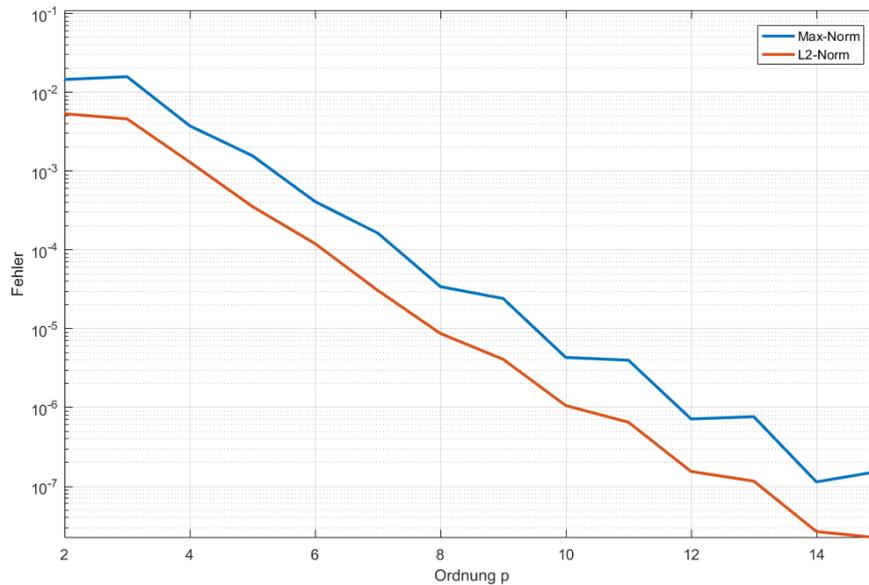
$7,71 \cdot 10^{-7}$.


Abbildung 4.8: Fehler in Max-Norm und L2-Norm

Vergleichen wir nun die Resultate mit denen des Residuumsfehlers im vorhergehenden Abschnitt, so sehen wir, dass der Fehler, welcher anhand des Residuums berechnet wurde, deutlich langsamer konvergiert (siehe Abbildung 4.9).

Der Fehler des Residuums in der euklidischen Norm gibt lediglich einen Trend vor und kann als Anhaltspunkt dienen, wenn man die exakte Lösung nicht kennt. Das ist natürlich in der Praxis immer dann der Fall, wenn ein numerisches Verfahren zur Anwendung kommt.

Zudem ist es etwas irreführend den Diskretisierungsfehler mit dem Residuumsfehler gegenüber zu stellen, wie es in Abbildung 4.9 suggeriert wird, da beide Fehlerberechnungen verschiedene Parameter heranziehen. Der Diskretisierungsfehler ergibt sich eben aus Berechnung der Näherungslösung v_h minus der exakten Lösung v , wohingegen der Residuumsfehler Auskunft darüber gibt, wie weit der im Iterationsverfahren berechnete Koeffizientenvektor \mathbf{v} die Bedingung $\mathbf{G}(\mathbf{v}) = 0$ in verschiedenen Punkten $x \in (0, 1)$ erfüllt. Er entspricht also näherungsweise der 2. Ableitung des Fehlers.

Abschließend können wir festhalten, dass wir mit den numerischen Resultaten unter Zuhilfenahme eines vereinfachten Newtonverfahrens eine gute Näherungslösung für unser nichtlineares Diskretisierungsproblem erhalten. Durch die exponentielle Konvergenzrate des Diskretisierungsfehlers können wir für eine entsprechend hohe Polynomordnung die exakte Lösung beliebig genau annähern.

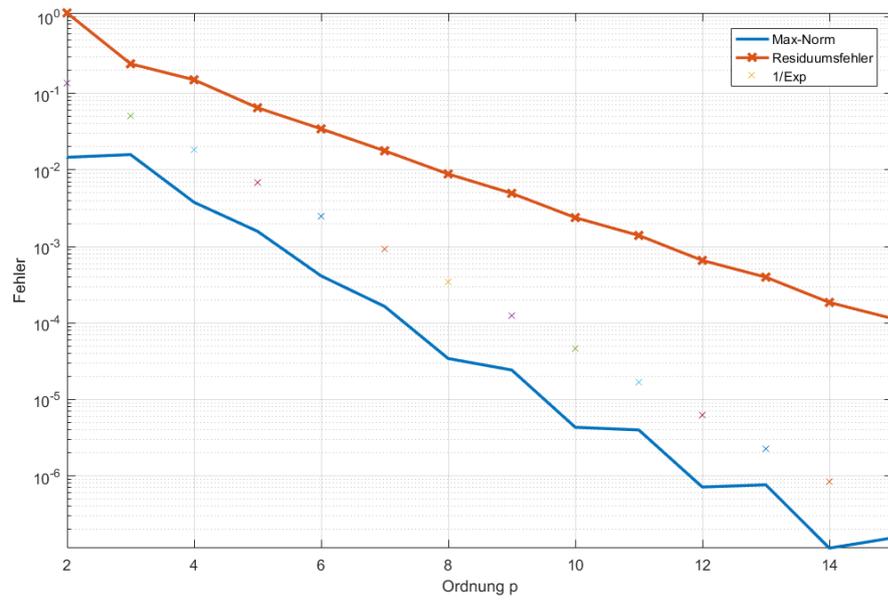


Abbildung 4.9: Diskretisierungsfehler im Vergleich mit Residuumsfehler

5 Conclusio

Mit Hilfe eines vereinfachten eindimensionalen Modellproblems konnten wir ein nichtlineares Verhalten eines am Rand fix eingespannten, hyperelastischen Materials untersuchen.

Im Mittelpunkt stand die Berechnung einer numerischen Näherungslösung mittels Kollokation von Bernsteinpolynomen. Dafür betrachteten wir im Speziellen zwei verschiedene Iterationsverfahren näher, zum einen ein nichtlineares Richardson-Verfahren und zum anderen ein vereinfachtes Newtonverfahren. Wir untersuchten die benötigte Anzahl an Iterationen und stellten fest, dass das vereinfachte Newtonverfahren schneller gegen die Näherungslösung konvergiert und unsensibler bezüglich der Wahl des Dämpfungsparameters τ ist.

Zusätzlich zur Näherungslösung konnten wir auch die exakte Lösung berechnen, welche für die nachfolgend angestellten Fehlerabschätzungen von Bedeutung war.

Neben verschiedenen Experimenten mit unterschiedlichem Polynomgrad p untersuchten wir auch das nichtlineare Verhalten bei steigender negativer Krafteinwirkung an der Stelle $x = 0.5$. Für die Polynomordnung $p = 2$ konnten wir einen linearen Zusammenhang feststellen und diesen Fall auf den linearen Fall unseres Modellproblems zurück führen.

Schließlich beschäftigten wir uns eingehend mit der Berechnung des Diskretisierungsfehlers unserer Näherungslösung und konnten anhand der Ergebnisse eine exponentielle Konvergenzrate des Fehlers feststellen.

Literatur

- [1] Oswin Aichholzer und Bert Jüttler. Einführung in die angewandte Geometrie. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013, Kapitel 3.2. ISBN: 978-3-034-60651-6.
- [2] Holm Altenbach. Kontinuumsmechanik - Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2015. ISBN: 978-3-662-47070-1.
- [3] Helmut Gfrerer. Skriptum zur Vorlesung Numerische Analysis. Linz: Johannes Kepler Universität, 2019, S. 42–50.
- [4] Clemens Hofreither und Jörg Willems. Mathematische Modelle in der Technik. Linz: Johannes Kepler Universität, 2020, Kapitel 3.
- [5] W. Michael Lai u. a. Introduction to Continuum Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2009, S. 351–365. ISBN: 978-0-080-94252-0.