NUMERIK II

Numerische Verfahren für Randwertaufgaben

Ulrich Langer
Institut für Analysis und Numerik
Johannes–Kepler–Universität Linz

Sommersemester 2000

Vorwort

Das vorliegende Vorlesungsskriptum entstand aus Vorlesungen, die der Autor im Sommersemester 1994 und im Sommersemester 1996 an der Johannes Kepler Universität Linz gehalten hat. Die Lehrveranstaltung „Numerik II“ ist die zweite Vorlesung in einem Zyklus von drei Vorlesungen zur „Höheren Numerischen Mathematik“.
Die Vorlesung „Numerik I“ stellt das Handwerkszeug zur numerischen Behandlung linearer und nichtlinearer Operatorgleichungen in Banach- bzw. Hilbert–Räumen bereit und gibt eine Einführung in die Theorie moderner Funktionenräume (Sobolev-Räume, Räume von Distributionen) [26]. In der vorliegenden Vorlesung „Numerik II“ werden Randwertaufgaben (RWA) für partielle Differentialgleichungen (PDgl.) und die wichtigsten Techniken (FEM, FDM, FVM) zu ihrer Diskretisierung betrachtet. Im einem abschließenden Kapitel der Vorlesung „Numerik II“ wird ein Überblick über moderne Verfahren zur Auflösung der bei der Diskretisierung entstehenden Gleichungssysteme gegeben (siehe auch Spezialvorlesung [25]). Zur Vorlesung gehört das Praktikum „Rechentechnische Realisierung der Methode der finiten Elemente (FEM)“. Im Praktikum wird die Modellierung von Anwendungsproblemen geübt, es werden die wichtigsten Bausteine von Finite-Elemente-Programmen betrachtet und es wird mit einem FE-Programm ein praktisches Beispiel auf dem Rechner simuliert. Dieses praktische Beispiel wird durch ein Team von zwei Studenten in seiner Ganzheit (Modellierung, Analysis, numerische Analysis, Implementierung, Simulation, Ergebnisbewertung) bearbeitet. Die einzelnen Teams präsentieren ihre Ergebnisse in seminaristischer Form.

Die vorliegende Vorlesung setzt Kenntnisse aus den Grundvorlesungen zur linearen Algebra, zur Analysis und zur Numerischen Mathematik, sowie die in der Vorlesung „Numerik I“ [26] vermittelten Lehrinhalte voraus. Zum anderen liefert die Lehrveranstaltung „Numerik II“ Vorkenntnisse für die nachfolgenden Vorlesungen zur Numerischen und Angewandten Mathematik, insbesondere für die Vorlesung „Numerik III“, die sich mit der numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben (AWA) und Anfangsrandwertaufgaben (ARWA) für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen befaßt [28].

Das Skriptum wurde bewußt im Stile eines Vorlesungsmanuskriptes gehalten. Im Gegensatz zu vielen Lehrbüchern wurde auf „belletristische“ Ausschmückungen verzichtet. Die Lehrinhalte sollen schnell und kompakt erfaßbar sein. Es wird eine Vielzahl von Abkürzungen eingeführt. Die Abkürzungen **Ü x.x** und **(mms)** bedeuten harte Arbeit an der Materie. Das Lösen von Übungsaufgaben und das „Mach-Mal-Selbst“ ist angesagt. Das vorliegende Skriptum ist ein Arbeitspapier. Es ist kein Ersatz für den Vorlesungsbesuch und auch kein Ersatz für ein Lehrbuch, aber eine gute Vorbereitung auf die allfällige Prüfung.

Der Autor möchte an dieser Stelle Frau Marion Gneiger für die Erstellung des LaTeX–Files und Frau Doris Holzer für die umfangreiche technische Überarbeitung des LaTeX–Files recht herzlich danken.

Ulrich Langer

Linz, den 1. Juli 1996

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Modellierung von RWA und ARWA für partielle Differentialgleichungen

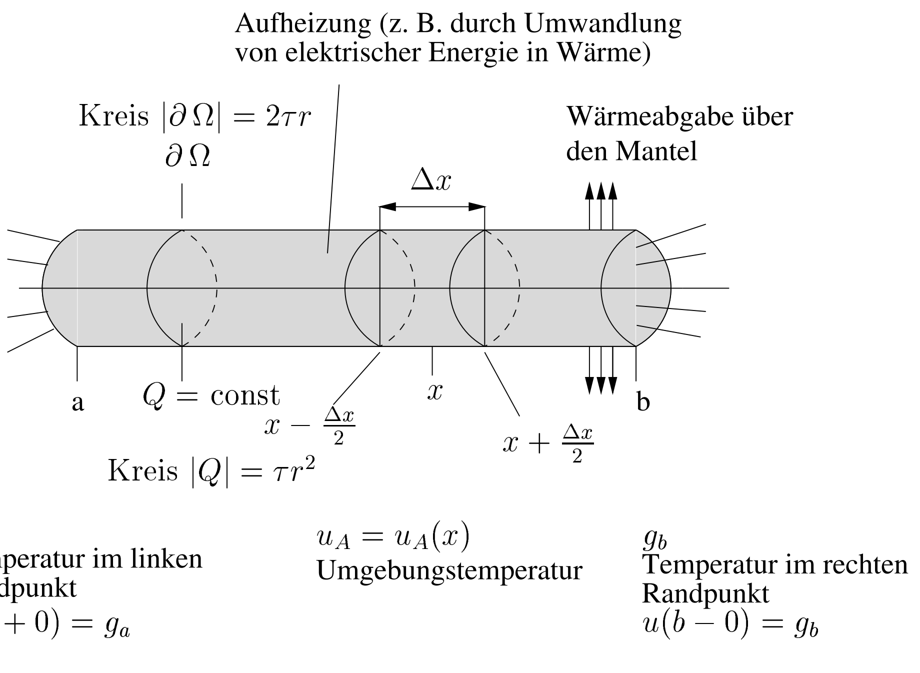
- **Lehrbücher:** [5], [22].

1.1 Beispiel: Wärmeleitung

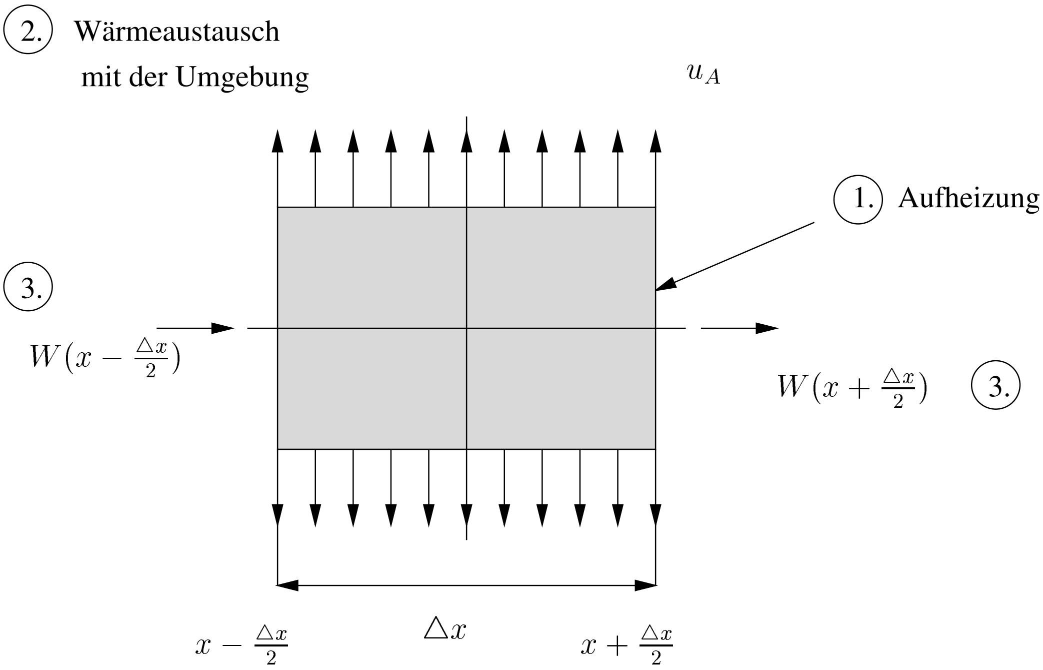
1.1.1 Stationäre Wärmeleitprobleme (RWA für elliptische PDgl. 2. Ordnung)

- **Betrachten zunächst das stationäre 1D–Wärmeleitproblem:**

  - Physikalisches Problem:
    Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x)$, $x \in (a,b)$, in einem hinreichend dünnen Stab der Länge $l = b - a$ mit konstantem Querschnitt Q (z.B. Draht), wobei $l \gg \oslash Q$ ist.



- Betrachten die Wärmemengebilanz an einem „kleinen“ Stabstück „Δx“ der Länge Δx (später $\Delta x \to 0$):



1. Aufheizung:

$$W = \text{ Wärmemenge} = |Q| \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} f(\xi)\, d\xi,$$

wobei $f(\xi)$ – Intensität der Wärmequelle.

2. Wärmeaustausch mit der Umgebung über den Mantel:

$$|\partial Q| \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} q(\xi)\,(u(\xi) - u_A(\xi))\, d\xi \;=\; |Q| \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \underbrace{\frac{|\partial Q|}{|Q|}\, q(\xi)}_{\bar{q}(\xi)}\,(u(\xi) - u_A(\xi))\, d\xi\,,$$

wobei $\bar{q}(\xi) = \frac{|\partial Q|}{|Q|} q(\xi) =$ oberflächenspezifischer und materialabhängiger Wärmeaustauschkoeffizient.

3. Fouriersches Gesetz:

$$W(x) \approx -u'(x)|Q| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W(x) = -\lambda(x)u'(x)|Q|}$$

wobei $\lambda(x)$ – Wärmeleitzahl (materialabhängig).

Wärmemengenbilanz:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Wärmemenge,}\\ \text{die im Punkt}\\ x-\frac{\Delta x}{2}\text{ in „}\Delta x\text{“}\\ \text{hineinfließt}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{l}\text{Wärmemenge,}\\ \text{die im Punkt}\\ x+\frac{\Delta x}{2}\text{ aus}\\ \text{„}\Delta x\text{“ heraus-}\\ \text{fließt}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{l}\text{Wärmemenge,}\\ \text{die über den}\\ \text{Mantel abge-}\\ \text{geben wird}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{Wärmemenge,}\\ \text{die durch Auf-}\\ \text{heizung ent-}\\ \text{steht}\end{array}} = 0$$

$$W(x-\tfrac{\Delta x}{2}) \;-\; W(x+\tfrac{\Delta x}{2}) \;-\; |Q| \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \bar{q}(\xi)(u(\xi)-u_A(\xi))\,d\xi \;+$$

$$+\; |Q| \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} f(\xi)\,d\xi \;=\; 0 \tag{1.1}$$

$\Downarrow$

- Wärmeleitgleichung in integraler Form:

$$\boxed{\begin{array}{l} -\lambda(x-\frac{\Delta x}{2})u'(x-\frac{\Delta x}{2}) + \lambda(x+\frac{\Delta x}{2})u'(x+\frac{\Delta x}{2}) - \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \bar{q}(\xi)u(\xi)d\xi = \\ \qquad = -\int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \bar{q}(\xi)u_A(\xi)\,d\xi \\ \forall\ \Delta x > 0 \;:\; [x-\frac{\Delta x}{2}, x+\frac{\Delta x}{2}] \subset (a,b)\,,\ \forall x \in (a,b) \\ \text{und Randbedingungen } u(a) = g_a,\ u(b) = g_b. \end{array}} \tag{1.2}$$

- Die differentielle Form der Wärmeleitgleichung bei homogenem Material und stetiger Quelle:

  Vor.:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ q \in C(a,b) \;:\; q(x) \geq 0,\ \text{z.B. } q = \text{const.} \geq 0 \\ \quad (q = 0 \ \widehat{=}\ \text{Isolation}), \\ 2.\ \lambda \in C^1(a,b) \;:\; \lambda(x) \geq \underline{\lambda} = \text{const.} > 0, \\ \quad \text{z.B. } \lambda = \text{const.} > 0, \\ 3.\ f \in C(a,b), \\ 4.\ u_A \in C(a,b). \end{array}\right\} \overset{1)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} W \in C^1 \\ \Downarrow \text{ Fourier:} \\ u \in C^2 \end{array} \tag{1.3}$$

Setzen $\Delta y = \Delta x/2$ und dividieren (1.2)/($-2\Delta y$):

$$-\frac{\lambda(x+\Delta y)u'(x+\Delta y)-\lambda(x-\Delta y)u'(x-\Delta y)}{2\Delta y} + \frac{1}{2\Delta y}\int_{x-\Delta y}^{x+\Delta y} \bar{q}u\,d\xi = \frac{1}{2\Delta y}\int_{x+\Delta y}^{x-\Delta y}(f+\bar{q}u_A)\,d\xi$$

$$\Delta y \to 0 \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \leftarrow \boxed{\text{Ü 1.1}}$$

$$-(\lambda(x)u'(x))' \quad + \quad \bar{q}(x)u(x) \quad = \quad f(x)+\bar{q}(x)u_A(x)$$

Resultat: Klassische differentielle Form der Wärmeleitgleichung

(1.4)

Gesucht $u \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$:
$-(\lambda(x)u'(x))' + \bar{q}(x)u(x) = f(x) + \bar{q}(x)u_A(x),\ x \in (a,b),$
mit den Randbedingungen: $u(a) = g_a,\ u(b) = g_b$.

Ü 1.1 Zeigen Sie, daß für $f \in C(a,b)$ und $x \in (a,b)$ gilt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} f(\xi) = f(x).$$

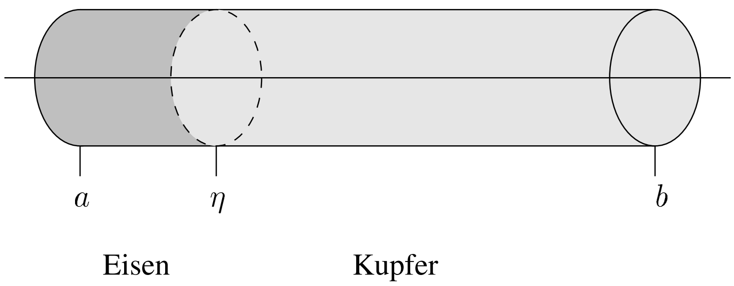
Ü 1.2 Zeigen Sie:

$$\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} (1.4)\ d\xi \Rightarrow\ (1.2).$$

- Die differentielle Form der Wärmeleitgleichung bei stückweise homogenem Material und stückweise stetiger Quelle:

  Wir betrachten o. B. d. A. einen Stab aus zwei Materialien.

  Analoges Vorgehen wie oben liefert (mms):



$x = a$	Randbedingung	: $u(a) = g_a$.
$x \in (a, \eta)$	Differentialgleichung	: $-(\lambda_1 u')' + \bar{q}_1 u = f_1 + \bar{q}_1 u_{A1}$.
$x = \eta$	Interfacebedingung	: $u(\eta - 0) = u(\eta + 0)$, $W(\eta - 0) = W(\eta + 0)$, $-\lambda_1(\eta - 0)u'(\eta - 0) = -\lambda_2(\eta + 0)u'(\eta + 0)$! Dies folgt direkt aus (1.2) für $x = \eta$ und $\Delta x \to 0$.
$x \in (\eta, b)$	Differentialgleichung	: $-(\lambda_2 u')' + \bar{q}_2 u = f_2 + \bar{q}_2 u_{A2}$.
$x = b$	Randbedingung	: $u(b) = g_b$.

Ü 1.3 Berechnen Sie das Temperaturfeld $u(x)$ für den Fall:

$$a = 0,\ b = 1,\ \eta \in (0,1),\ q \equiv 0,\ f \equiv 0,$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1 = \text{const.} > 0 & \text{für } x < \eta \\ \lambda_2 = \text{const.} > 0 & \text{für } x > \eta \end{cases}$$

mit $\lambda_1 > \lambda_2 > 0,\ g_a = 0, g_b = 1.$

Bemerkung 1.1: Punktquellen.
Im Punkt $x = y$ sei eine Wärmequelle konzentriert:

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) = f_y \delta(x-y)} \quad \curvearrowright \quad \int\limits_{y-\frac{\Delta x}{2}}^{y+\frac{\Delta x}{2}} f(\xi)\, d\xi \overset{!}{=}: \; < f_y \delta(\xi - y), \varphi(\xi) >$$

$f_y = \text{const.} =$ Intensität der Punktquelle

$$= \; f_y \varphi(y) = f_y$$

$$\forall \varphi \in D(a,b) : \varphi(x) = 1 \quad \forall x \in [y - \tfrac{\Delta x}{2},\; y = \tfrac{\Delta x}{2}].$$

Bemerkung 1.2: Randbedingungen.

– Randbedingungen 1. Art: (Dirichletsche RB) $\rightarrow$ wesentlich !
Vorgabe der Funktion u (Temperatur) am Rand: $u(a) = g_a,\; u(b) = g_b$.

– Randbedingungen 2. Art: (Neumannsche RB) $\rightarrow$ natürlich !
Vorgabe des Wärmeflusses am Rand:

$$\begin{aligned} \lambda(a)u'(a) &= g_a \quad (g_a = 0: \text{ Isolation}),\\ -\lambda(b)u'(b) &= g_b \quad (g_b = 0: \text{ Isolation}). \end{aligned}$$

– Randbedingungen 3. Art: (Robinsche RB) $\rightarrow$ natürlich !
Freier Wärmeübergang (d.h., Wärmefluß proportional zur Differenz zwischen dem Wert der Zustandsvariablen (Temperatur) am Rand und der Umgebung):

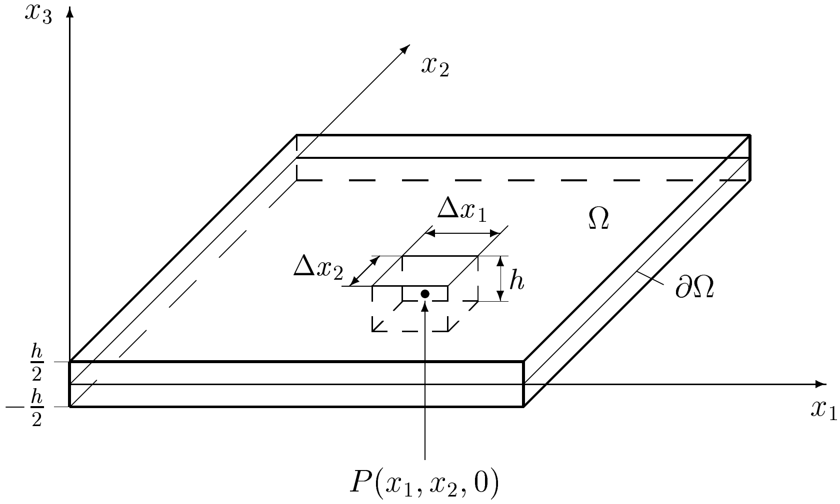
$$\begin{aligned} \lambda(a)u'(a) &= \alpha_a(u(a) - u_a),\\ -\lambda(b)u'(b) &= \alpha_b(u(b) - u_b), \end{aligned}$$

α_a, α_b – Wärmeübergangszahlen;
u_a, u_b – Außentemperatur am linken und rechten Rand.

– Gemischte Randbedingungen: z.B. $u(a) = g_a,\; u'(b) = 0$ oder
$u'(a) = 0,\; -\lambda(b)u'(b) = \alpha_b(u(b) - u_b)$.

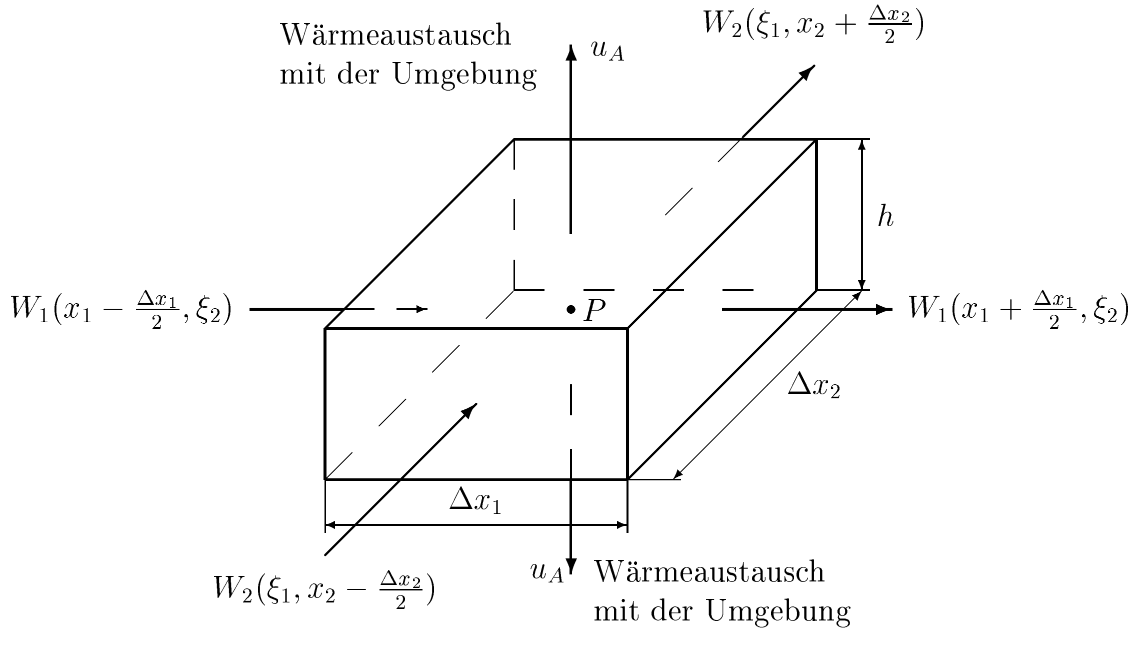
- **Betrachten nun ein stationäres 2D-Wärmeleitproblem:**

  - Physikalisches Problem:
    Gesucht ist die Temperaturverteilung $u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ in einer hinreichend dünnen Platte mit einer konstanten Dicke h.



  - Wärmebilanz an „kleinem" Quader „$\Delta x_1 \times \Delta x_2 \times h$" mit dem Schwerpunkt im Punkt $P(x_1, x_2, 0)$ für ein beliebiges $x = (x_1, x_2) \in \Omega$: „$\Delta x_1 \times \Delta x_2$ " $\subset \Omega$:

    Vor.: Wärmestrom ist über die Höhe der Platte konstant,
    d.h., $W = W(x_1, x_2)$ ist von x_3 unabhängig !



$\Rightarrow$ Wärmeleitgleichung in integraler Form:

(1.5) Gesucht $u(x_1, x_2)$:

$$h \int\limits_{x_2-\frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2+\frac{\Delta x_2}{2}} W_1(x_1 - \tfrac{\Delta x_1}{2}, \xi_2)\, d\xi_2 - h \int\limits_{x_2-\frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2+\frac{\Delta x_2}{2}} W_1(x_1 + \tfrac{\Delta x_1}{2}, \xi_2)\, d\xi_2$$

$$+ h \int\limits_{x_1-\frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1+\frac{\Delta x_1}{2}} W_2(\xi_1, x_2 - \tfrac{\Delta x_2}{2})\, d\xi_1 - h \int\limits_{x_1-\frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1+\frac{\Delta x_1}{2}} W_2(\xi_1, x_2 + \tfrac{\Delta x_2}{2})\, d\xi_1$$

$$- 2 \int\limits_{x_1-\frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1+\frac{\Delta x_1}{2}} \int\limits_{x_2-\frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2+\frac{\Delta x_2}{2}} q(\xi_1, \xi_2)(u - u_A)\, d\xi_2\, d\xi_1 +$$

$$+h \int\limits_{x_1-\frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1+\frac{\Delta x_1}{2}} \int\limits_{x_2-\frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2+\frac{\Delta x_2}{2}} f\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2\, d\xi_1 = 0.$$

$\forall x = (x_1, x_2) \in \Omega,\ \forall \Delta x_1, \Delta x_2 > 0$:

$\big\{(y_1, y_2) :\ x_i - \frac{\Delta x_i}{2} \le y_i \le x_i + \frac{\Delta x_i}{2}, i = 1, 2\big\} \subset \Omega$

+ Fouriersches Gesetz: $W_i = -\lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i},\ i = 1, 2$
mit den Wärmeleitzahlen λ_1 und λ_2
(orthotropes Material)

+ Randbedingungen: z.B. Dirichlet:
$u(x) = g_1(x),\ x = (x_1, x_2) \in \Gamma = \partial\Omega.$

- Die differentielle Form:

Vor.:

1) $q \in C(\Omega) :\ q \ge 0,$
2) $\lambda_i \in C^1(\Omega) :\ \lambda_i \ge \underline{\lambda} = \text{ const. } > 0,\ i = 1, 2,$
3) $f \in C(\Omega),$
4) $u_A \in C(\Omega),$
[5) $u \in C^2(\Omega) \rightsquigarrow W_i \in C^1(\Omega)$].

Aus

$$-\frac{1}{h\Delta x_1 \Delta x_2}\ (1.5) \qquad \text{und} \qquad \Delta x_1, \Delta x_2 \to 0$$

erhalten wir die Wärmeleitgleichung in differentieller Form:

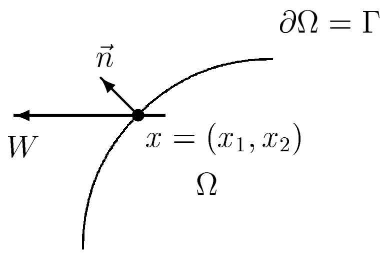
(1.6)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Gesucht } \ u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}): \\[1em] -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda_2(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right) + \bar{q}(x)u(x) = \\ \qquad\qquad\qquad = f(x) + \bar{q}(x)u_A(x) \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \Omega \\[1em] + \text{ Randbedingung: } u(x) = g_1(x) \quad \forall x \in \Gamma = \partial\Omega, \\ \text{wobei } \bar{q} = 2q/h, \ \ q \text{ – Wärmeaustauschkoeffizient.} \end{array}}$$

Bemerkung 1.3: Andere Randbedingungen.

– Randbedingungen 2. Art:
  (a) Wärmeisolation: $W(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma$,
  (b) vorgegebener Wärmestrom: $W(x) = g_2(x) \quad \forall x \in \Gamma$,
  mit

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wärmestrom}}}{W(x)} := -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konormalenableitung}}}{\frac{\partial u(x)}{\partial N}} := -\left(\lambda_1(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}n_1(x) + \lambda_2 x\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}n_2(x)\right)$$

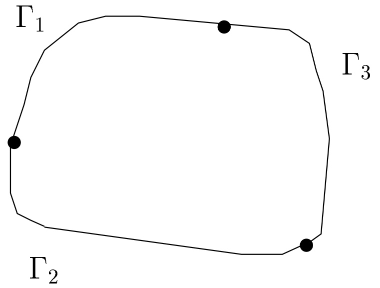


– Randbedingungen 3. Art: Freier Wärmeaustausch:

$$-\frac{\partial u}{\partial N} = \alpha(u - g_3) \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega,$$

wobei α – Wärmeaustauschkoeffizient,
g_3 – Randaußentemperatur.

– Gemischte Randbedingungen:
$\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3, \; \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
Auf Γ_1 sind Randbedingungen 1. Art, auf Γ_2 Randbedingungen 2. Art und auf Γ_3 Randbedingungen 3. Art vorgegeben:



Γ_1: 1. Art (Dirichlet),

Γ_2: 2. Art (Neumann),

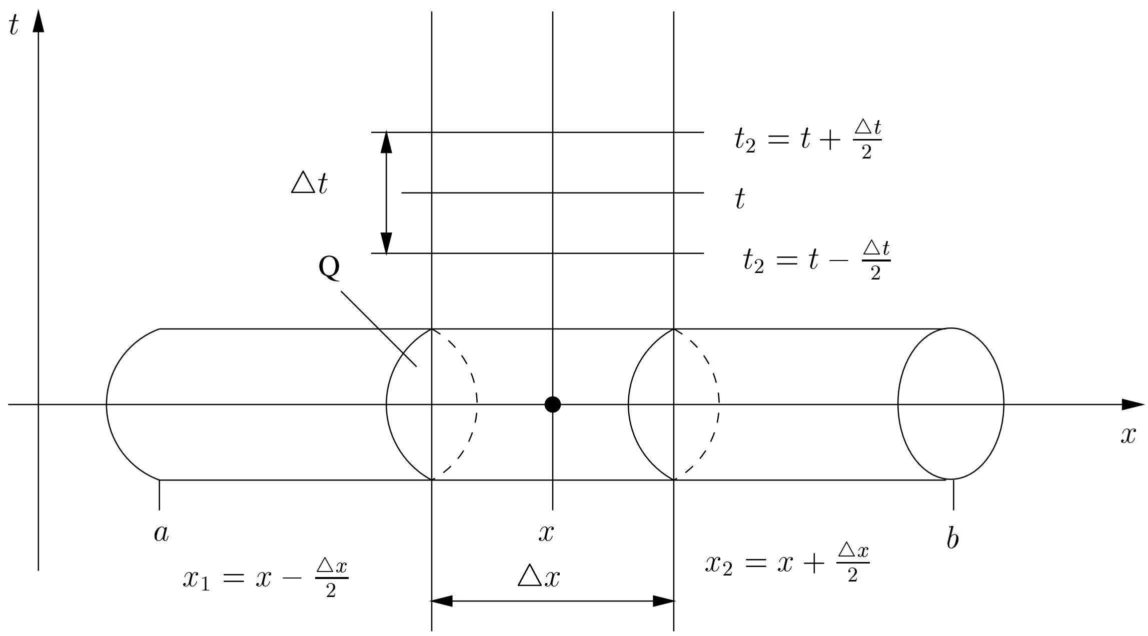
Γ_3: 3. Art (Robin).

- **Stationäres 3D-Wärmeleitproblem:** $\boxed{\text{P I}}$
- **Weitere 2D- und 1D-Spezialfälle:** $\boxed{\text{P II}}$
  $\rightarrow$ Rotationssymmetrische Probleme.

1.1.2 Instationäre Wärmeleitprobleme (Anfangs–Randwert–Aufgaben für parabolische Differentialgleichungen 2. Ordnung)

- **Betrachten zunächst wieder das instationäre 1D-Wärmeleitproblem:**
  - Physikalisches Problem

    Gesucht ist das sich zeitlich ändernde (instationäre) Temperaturfeld $u(x,t)$ in einem hinreichend dünnen Stab der Länge $l = b - a$, d.h., $x \in (a,b)$, während der Zeit $t \in (0,T) = \mathbb{T}$:



- <u>Wärmemengebilanz in Raum und Zeit:</u>
  Wir betrachten die Wärmemengebilanz an einem „kleinen“ Stabstück der Länge Δx während der Zeitspanne Δt (später „Momentaufnahme“, d.h., $\Delta t \to 0$ und $\Delta x \to 0$:)
  (1.7)

$$-|Q|\int_{t_1}^{t_2} \lambda \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1} dt \quad - \quad \left(-|Q|\int_{t_1}^{t_2} \lambda \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2} dt\right) \quad - \quad |Q|\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \bar{q}(u-u_A)\,d\xi\,dt$$

Wärmemenge, die im Punkt x_1 in „Δx“ während der Zeitspanne Δt hineinfließt	$-$	Wärmemenge, die im Punkt x_2 aus „Δx“ während der Zeitspanne Δt herausfließt	$-$	Wärmemenge, die über den Mantel während der Zeitspanne Δt abgegeben wird

$$+ \quad |Q|\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f\,d\xi\,dt \quad = \quad |Q|\int_{x_1}^{x_2} c\rho\,(u(\xi,t_2)-u(\xi,t_1))\,dx$$

$+$	Wärmemenge, die durch Aufheizung während der Zeitspanne Δt entsteht	$=$	Wärmemengendifferenz in „Δx“ zwischen End– und Anfangszeit

  Dabei bezeichnen ρ die Dichte, c die Wärmekapazität, λ den Wärmeleitkoeffizienten und $\bar{q} = \frac{|\partial Q|}{|Q|}q$ den spezifischen Wärmeaustauschkoeffizienten.

- <u>Resultat:</u> Instationäre Wärmeleitgleichung in integraler Form (Bilanzform)

(1.8) Gesucht Temperaturfeld $u(x,t)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} c\rho\,(u(\xi,t_2)-u(\xi,t_1))\,d\xi \;-\; \int_{t_1}^{t_2}\left(\lambda \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2} - \lambda \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}\right) dt \;+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \bar{q}(u-u_A)\,d\xi\,dt \;=\; \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(\xi,t)\,d\xi\,dt$$

$\forall x \in (a,b) \;\; \forall \Delta x > 0 : [x_1,x_2] \subset (a,b),\, x_1 = x - \frac{\Delta x}{2},\; x_2 = x + \frac{\Delta x}{2};$

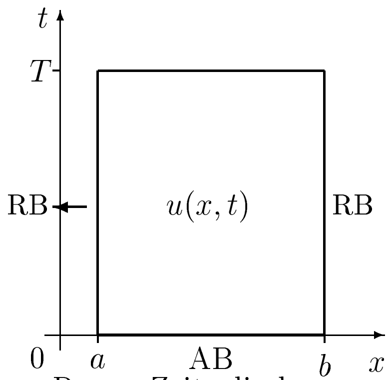
$\forall t \in (0,T) \;\; \forall \Delta t > 0 : [t_1,t_2] \subset (0,T), \quad t_1 = t - \frac{\Delta t}{2},\; t_2 = t + \frac{\Delta t}{2}$

\+ <u>Randbedingungen</u>, z.B. 1. Art

$$\left.\begin{aligned} u(a,t) &= g_a(t) \\ u(b,t) &= g_b(t) \end{aligned}\right\} \quad \forall\, t \in (0,T)$$

\+ <u>Anfangsbedingung</u>

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$$



Raum–Zeitzylinder
$Q_T = (a,b) \times (0,T)$

- Übergang zur differentiellen Form:

Vor.: Eingangsdaten $\{c, \rho, \lambda, q, f, u_A, g_a, g_b, u_0\}$ (Übung: Schreiben Sie die Voraussetzung exakt auf !) seien hinreichend glatt (z.B. homogenes Material, stetig verteilte Wärmequellen, ...).

$\frac{1}{\Delta x \Delta t}$ (8), $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$

Resultat: Differentielle Form der instationären Wärmeleitgleichung (= klassische Formulierung)

(1.9) Gesucht $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$:

$$\boxed{c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \bar{q}u = f + \bar{q}u_A(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q_T}$$

\+ RB: z.B. 1. Art: $\to$ 1. ARWA:

$$u(a,t) = g_a(t), \; u(b,t) = g_b(t) \quad \forall t \in (0,T)$$

\+ AB: $u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Bemerkung 1.4:

1. $C^{k,l}(Q_T)$:
   $k \to k$-mal stetig differenzierbar nach x,
   $l \to l$-mal stetig differenzierbar nach t.
2. RB: 2. Art, 3. Art bzw. gemischte Randbedingungen sind möglich (vergleiche Bemerkung 1.1)

   $\uparrow$
   1. ARWA
   2. ARWA
   3. ARWA
   gemischte ARWA

3. Für die Existenz einer klassischen Lösung, d.h., Lösung der ARWA (1.9), ist die Kompatibilität zwischen der Anfangsbedingung und den Randbedingungen notwendig, d.h., kein Wärmeschock:

$$\lim_{t \to +0} g_a(t) = u_0(a) \quad , \quad \lim_{t \to +0} g_b(t) = u_0(b).$$

- **Instationäre Wärmleitprobleme im 2D und 3D Fall:**

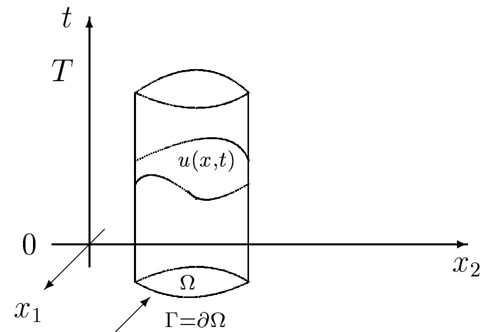
  $\Rightarrow$ Herleitung analog (vergleiche Punkt 1.1.1 und $\boxed{\text{P 1}}$)
  z.B. 1. ARWA für Wärmeleitung in 3D:

(1.10)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Gesucht } u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T):\\ c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x_3}\left(\lambda_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = f(x,t) \text{ in } Q_T = \\ \hfill = \Omega \times (0,T)\\ + \underline{\text{RB:}}\ u(x,t) = g_1(x,t), \quad \forall x \in \Gamma_1 = \Gamma = \partial\Omega,\ \forall t \in (0,T) = \mathbb{T},\\ + \underline{\text{AB:}}\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}.\end{array}}$$

Raum-Zeit-Zylinder: 2D

$Q_T = \Omega \times \mathbb{T} = \Omega \times (0,T)$



$\lim\limits_{t \to +0} g_1(x,t) = u_0(x) \quad \forall\, x \in \Gamma$!

1.1.3 Verallgemeinerungen ($\rightarrow$ differentielle Form)

- **Instationäre (stationäre) Wärmeleit–Wärmetransportprobleme:**

  z.B. Temperaturfeldberechnung in Fluiden (1. ARWA):

(1.11)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Gesucht ist } u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T):\\ c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}_{\text{Wärmeleitung}} + \underbrace{c\rho\sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\text{Wärmetransport}} + \underbrace{\bar{q}(x,t)u(x,t)}_{\substack{\text{nur im 1D– bzw.}\\ \text{im 2D–Fall}}} =\\ = f(x,t) + \underbrace{\bar{q}(x,t)u_A(x,t)}_{\substack{\text{nur im 1D– bzw.}\\ \text{im 2D–Fall}}} \qquad \forall\,(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T),\\ + \underline{\text{RB:}}\ \text{z.B. 1. Art: } u(x,t) = g_1(x,t) \quad \forall\,(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T),\\ + \underline{\text{AB:}}\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \forall\, x \in \bar{\Omega}.\end{array}}$$

wobei

$c = c(x,t)$ – Wärmekapazität,

$\rho = \rho(x,t)$ – Dichte

$\lambda = [\lambda_{ij}(x,t)]_{i,j=\overline{1,m}}$ – symmetrisch und gleichmäßig p.d. Wärmeleitzahlen–matrix, z.B. orthotrop: $\lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$,

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1(x,t) \\ \vdots \\ a_m(x,t) \end{pmatrix}^T$ – Geschwindigkeitsvektor,

$[\bar{q} = \bar{q}(x,t)$ – spezifischer Wärmeaustauschkoeffizient, $(m = 1,2)]$,

$f = f(x,t)$ – Wärmeintensitätsfunktion,

$g_1 = g_1(x,t)$ – vorgegebene Randtemperatur und

$u_0 = u_0(x)$ – Anfangstemperatur.

Bemerkung 1.5:

– $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial t} + a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ – materielle Zeitableitung.

– stationär: Eingangsdaten sind t-unabhängig ($\rightarrow$ Asymptotische Verteilung, $t \rightarrow \infty$): $\Rightarrow$ $u = u(x)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, keine AB !

$$\begin{cases} \text{PDgl.:} & -\mathrm{div}(\lambda \nabla u) + c\rho a^T \nabla u + \bar{q}u = f + \bar{q}u_A, \\ \text{RB:} & u = g_1 \text{ auf } \Gamma = \Gamma_1 = \partial\Omega. \end{cases}$$

– 1. – 4. ARWA.

■ **Typische Nichtlinearitäten in der Temperaturfeldberechnung:**

1. Temperaturabhängige Materialkoeffizienten: ($\Rightarrow$ PDgl. nichtlinear):

$$\lambda = \lambda(x,t;u) \text{ – temperaturabhängige Wärmeleitzahlen etc.}$$

2. Wärmestrahlung am Rand ($\Rightarrow$ RB nichtlinear):

$$-\frac{\partial u}{\partial N} = g(u - g_3) := \alpha(u - g_3)^4.$$

■ **Kopplung von Temperaturfeldern mit anderen Feldern:** z.B.:

– thermomechanische Probleme:
  $\rightarrow$ lineare Thermoelastizität (siehe Punkt 1.2.3):
  HOOKE $\rightarrow$ $\sigma_{ij} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elastische Konstante}}}{D_{ijkl}}\epsilon_{kl} + (u - u_r)\alpha_i \delta_{ij}$.

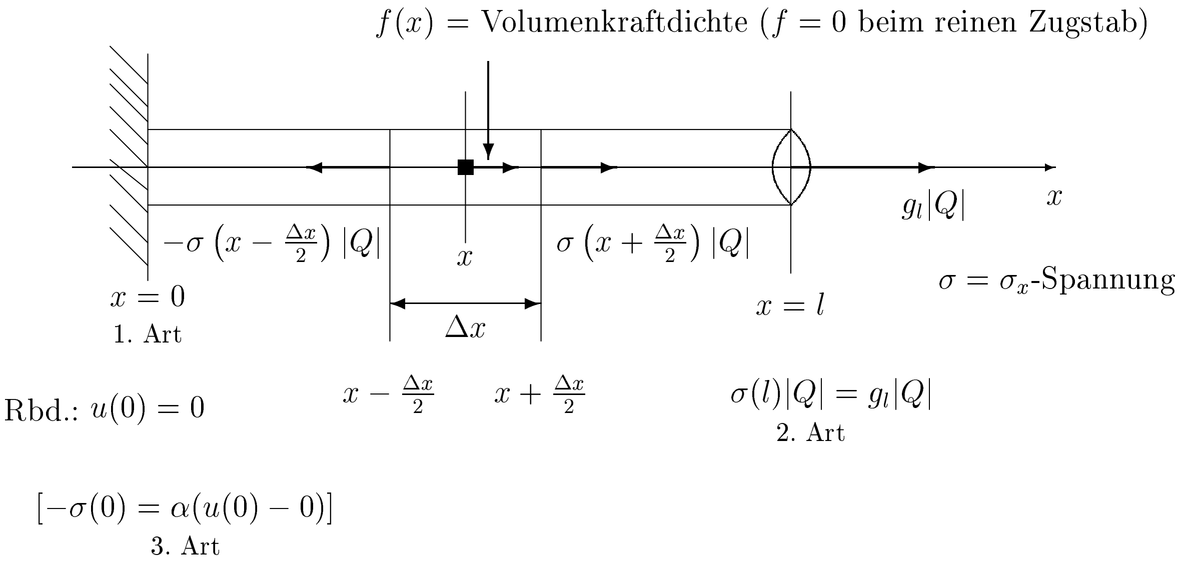
– Navier-Stokes-Gleichung + Wärmeleitung/–transport:
  $\rightarrow$ a (Geschwindigkeit), p (Druck), u (Temperatur).

1.2 Beispiel: Festkörpermechanik

1.2.1 Der statische Fall: Zugstab (RWA für elliptische Dgl. 2. Ordnung)

- **Mechanisches Problem:**

  Gesucht ist die Längsverschiebung $u(x),\ x \in (0,l)$, eines longitudinal belasteten linear elastischen Stabes konstanten Querschnitts Q der Länge l mit $l \gg \operatorname{diam} Q$ unter den Voraussetzungen kleiner Verschiebungen und Deformationen. Der Stab sei z.B. im Punkt $x=0$ fest eingespannt und im Punkt $x=l$ greife eine Flächenkraft mit der Kraftdichte g_l an:



■ **Kräftegleichgewicht am „kleinen“ Stabstück „Δx“:**

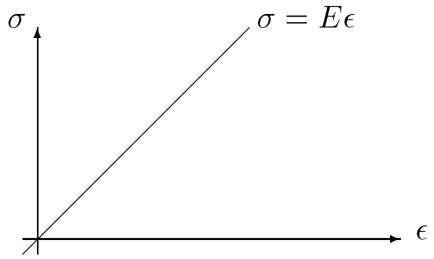
$$-\sigma\left(x-\tfrac{\Delta x}{2}\right)|Q| + \sigma\left(x+\tfrac{\Delta x}{2}\right)|Q| + |Q|\int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} f(\xi)\,d\xi = 0. \tag{1.12}$$

Dazu kommen:

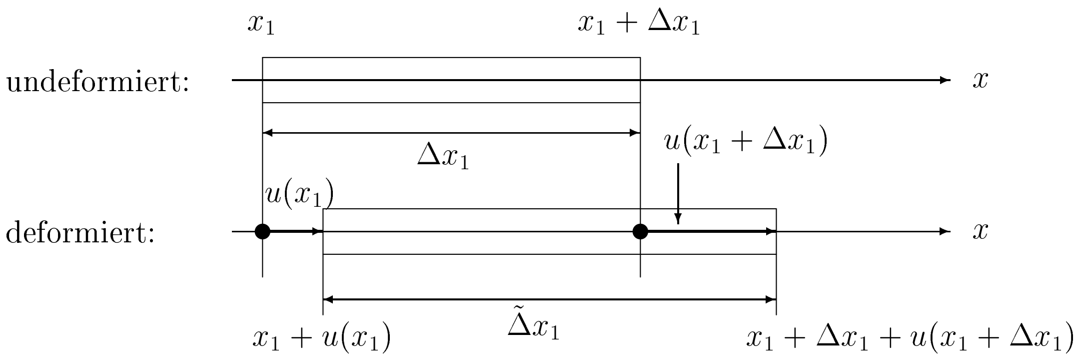
- Stoffgesetz = Hooke'sches Gesetz:
  $\Rightarrow$ Spannung $\sim$ relative Längenänderung:

  $\sigma(x) = E(x)\epsilon(x)$,

  wobei $\epsilon(x)$ – Deformation (= relative Längenänderung),
  $E(x)$ – Youngsches Elastizitätsmodul:



- Geometrische Beziehungen zwischen Deformation und Verschiebung:



  Relative Längenänderung $= \frac{(x_1+\Delta x_1+u(x_1+\Delta x_1)-u(x_1)-x_1)-\Delta x_1}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1+\Delta x_1)-u(x_1)}{\Delta x_1}$,

$$\epsilon(x) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u(x_1+\Delta x_1)-u(x_1)}{\Delta x_1} = u'(x_1).$$

- RB: $u(0) = 0,\ \sigma(l) \equiv E(l)u'(l) = g_l$.

■ **Resultat:** Integrale Form:

(1.13)
Gesucht $u(x)$:

$$\sigma(x + \tfrac{\Delta x}{2}) - \sigma(x - \tfrac{\Delta x}{2}) + \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} f(\xi)\, d\xi = 0$$

$\forall x \in (0,l) \quad \forall \Delta x > 0 : \ \left[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right] \subset (0,l)$

mit Hookeschem Gesetz: $\sigma = E\epsilon$ und geometrischer Beziehung $\epsilon = u'$;

+ RB: $u(0) = 0, E(l)u'(l) = g_l$.

■ **Differentielle Form:** $\frac{1}{\Delta x}$ (1.13), $\Delta x \to 0$, Glattheitsvoraussetzungen: $\Rightarrow$

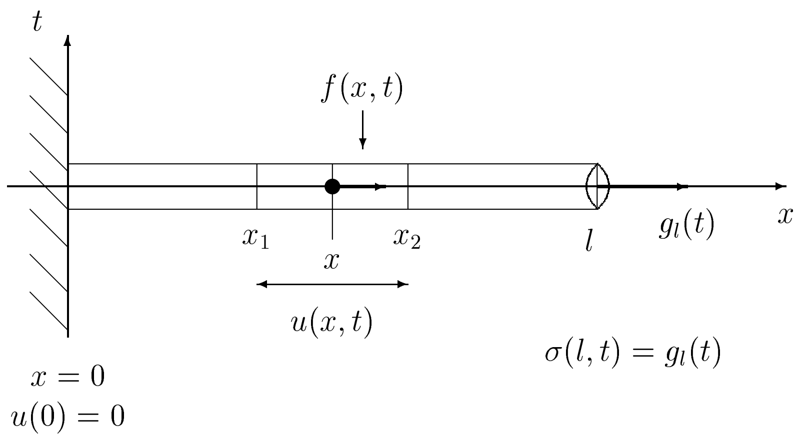
(1.14)
Gesucht $u \in C^2(0,l) \cap C^1(0,l] \cap C[0,l]$:

$$\left.\begin{array}{l} -\sigma'(x) = f(x),\ x \in (0,1) \\ \sigma(x) = E(x)\epsilon(x),\ \epsilon(x) = u'(x) \end{array}\right\} - (E(x)u'(x))' = f(x)$$

+ RB: $u(0) = 0,\ E(l)u'(l) = g_l$.

1.2.2 Der dynamische Fall: Longitudinalschwingungen des Stabes (ARWA für hyperbolische PDgl. 2. Ordnung)

■ **Mechanisches Problem:**



$x_1 = x - \frac{\Delta x}{2}$

$x_2 = x + \frac{\Delta x}{2}$

$t_1 = t - \frac{\Delta t}{2}$

$t_2 = t + \frac{\Delta t}{2}$

- **Integrale Form:**

(1.15)

Gesucht $u(x,t)$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[E(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau) - E(x_1)\frac{\partial u}{0x}(x_1,\tau)\right] d\tau + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{2. Newtonsches Gesetz}}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t_2) - \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t_1)\right] \varrho(\xi)\, d\xi$$

$$\begin{array}{lll} \forall x \in (0,l), & \forall \Delta x > 0: & \left[x_1 = x - \frac{\Delta x}{2}, x_2 = x + \frac{\Delta x}{2}\right] \subset (0,l), \\ \forall t \in (0,T), & \forall \Delta t > 0: & \left[t_1 = t - \frac{\Delta t}{2}, t_2 = t + \frac{\Delta t}{2}\right] \subset (0,T), \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} + \text{ RB:} & u(0,t) = 0, & E(l)\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = g_l(t) & \forall t \in (0,T), \\ + \text{ AB:} & u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in [0,l] & \text{(Anfangsverschiebung)}, \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in [0,l] & \text{(Anfangsgeschwindigkeit)}. \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Ü 1.4}}$ Sei $u \in C^2(Q_T), f \in C(Q_T), E \in C^1(0,l)$ und $\varrho \in C(0,l)$ mit $Q_T = (0,l) \times (0,T)$:
Man zeige, daß dann $\exists\, \xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1,x_2)$ und $t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1,t_2)$, sodaß (1.15) übergeht in:

$$\frac{\partial^2 u(\xi^*,t^*)}{\partial t^2}\varrho(\xi^*)\Delta t\Delta x = \frac{\partial}{\partial x}\left(E(\xi^{**})\frac{\partial u(\xi^{**},t^{**})}{\partial x}\right)\Delta t\Delta x + f(\xi^{***},t^{***})\Delta t\Delta x,$$

<u>Hinweis:</u> MWS !

- **Differentielle Form:** $\frac{1}{\Delta x, \Delta t}$ (1.15); $\Delta x, \Delta t \to 0$, Glattheitsvoraussetzungen: $\Rightarrow$

(1.16)

Gesucht $u \in C^2(Q_T) \cap C^{1,0}\left((0,l] \times \mathbb{T}\right) \cap C\left([0,l] \times \mathbb{T}\right) \cap C^{0,1}\left([0,l] \times [0,T)\right)$:

$$\varrho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in Q_T$$

$$\begin{array}{llll} + \text{ RB:} & u(0,t) = 0, & E(l)\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = g_l(t), & \forall t \in (0,T), \\ + \text{ AB:} & u(x,0) = u_0(x), & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in [0,l]. \end{array}$$

Ü 1.5 Seien $\varrho, E = \text{const.} > 0$ und der Stab periodisch erregt, d.h., $f(x,t) = f(x)e^{iwt}$ und $g_l(t) = g_l e^{iwt}$. Man suche die periodischen Lösungen $u(x,t)$ und bestimme die kritischen Frequenzen !
Hinweis: Man mache den Ansatz $u(x,t) = u(x)e^{iwt}$!

Lösung:

$$-\varrho\omega^2 u(x)e^{iwt} - Eu''(x)e^{iwt} = f(x)e^{iwt}$$

$$\Rightarrow u(x) : \quad \boxed{\begin{array}{l} -u''(x) - \lambda u(x) = f(x), x \in (0,l) \\ u(0) = 0,\ Eu'(l) = g_l,\ \lambda = \varrho\,\omega^2/E \end{array}}$$

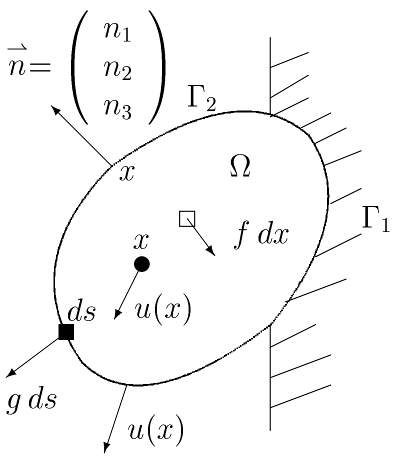
$$\Rightarrow \lambda_k : \quad \boxed{\begin{array}{rcl} -u_k''(x) & = & \lambda_k u_k(x) \\ u_k(0) & = & 0,\ u_k'(l) = 0 \end{array}}$$

1.2.3 Verallgemeinerung auf 3D (→ differentielle Form)

- **Linear elastischer Körper im statischen Gleichgewicht:**
  → [26] Numerik I: Punkt 1.1: RWA für Lamé–Naviersche Gleichung:

(1.17)

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Gesucht Verschiebungsvektor } u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)) \in X \subset [C^2(\Omega)]^3: \\
-\sum\limits_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(x) = f_i(x),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset I\!R^3\ ^{\dagger}, \\
+ \text{ Stoffgesetz: } \sigma_{ij} = \sum\limits_{k,l=1}^{3} D_{ijkl}\epsilon_{kl} \text{ (Hooke; [26] Nu I, Punkt 1.1 isotrop)}, \\
+ \text{ geometrische Beziehung: } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \\
+ \text{ RB:} \quad u(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1, \\
\qquad\quad \sum\limits_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(x) n_j(x) = g_i(x) \\
\qquad\quad \forall x \in \Gamma_2,\ i = \overline{1,3}.
\end{array}}$$



■ **Dynamisch erregter 3D linear elastischer Körper:**

(1.18)

Gesucht $u(x,t) \in X \subset [C^2(Q_T)]^3$:		
$\varrho\ddot{u} - \sigma_{ij,j} = f_i$ in $Q_T = \Omega \times (0,T)$,		$\mid \varrho\ddot{u} - \operatorname{div}\sigma = f$
+ Stoffgesetz:	$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl}$,	$\mid \sigma = D\epsilon$
+ geometrische Beziehung:	$\epsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$,	$\mid \epsilon = 0.5(\nabla u + \nabla^T u)$
+ RB:	$u = 0$ auf $\Gamma_1, \sigma_{ij}n_j = g_i$ auf $\Gamma_2, i = \overline{1,3}\ \forall t \in \mathbb{T}$,	
+ AB:	$u(x,0) = u_0(x), \dot{u}(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$.	

Bezeichnung:

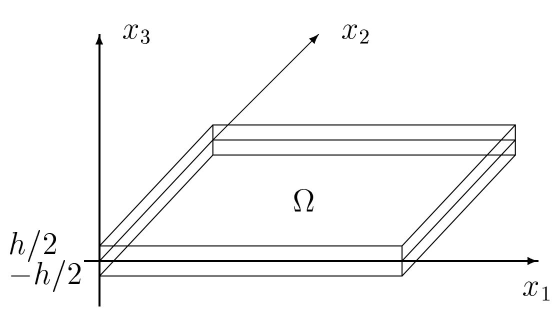
- Einsteinsche Summationskonvention: $\sigma_{ij,j} = \sum\limits_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}$.
- $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \ \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

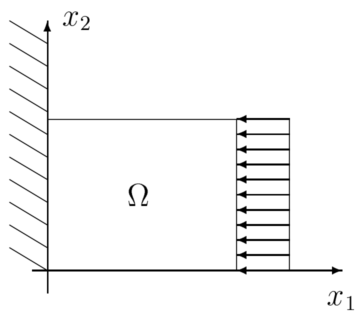
■ **Spezialfälle:** → Strukturmechanik (siehe Vorlesung [29]):

1. Ebener Spannungszustand ($\Rightarrow$ 2D):

$$\begin{array}{ll} \sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3) = \sigma_{ij}(x_1,x_2) & \forall i,j = 1,2, \\ \sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 0 & \forall i = 1,2,3, \end{array}$$

z.B.: Scheibe:

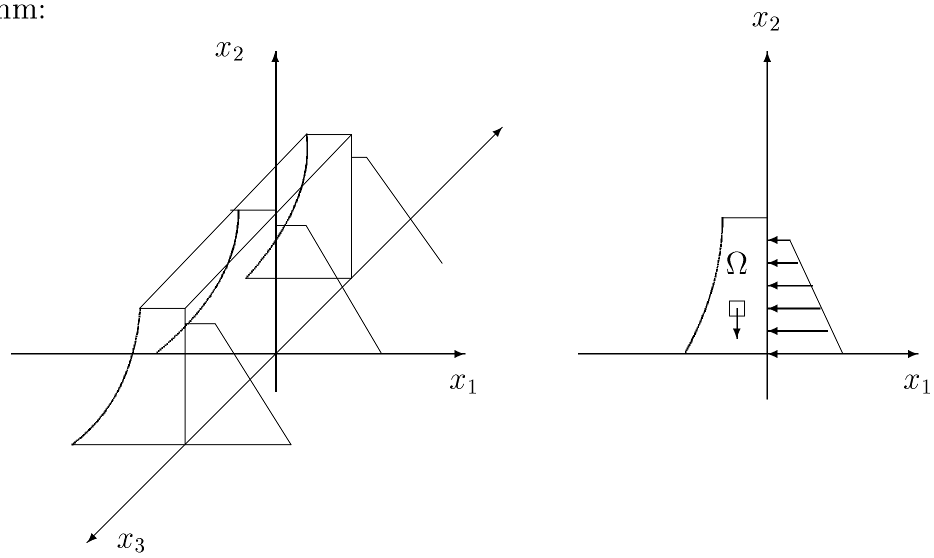




2. Ebener Deformationszustand ($\Rightarrow$ 2D):

$$\begin{aligned} &\epsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \epsilon_{ij}(x_1, x_2) && \forall i, j = 1, 2, \\ &\epsilon_{i3} = \epsilon_{3i} = 0 && \forall i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

   z.B.: Damm:



3. Rotationssymmetrische Probleme ($\Rightarrow$ 2D).
4. Membran, Platte, Schale, Balken, Stab, Saite, ...

- **Nichtlinearitäten:**

  1. Stofflich: $\sigma = \sigma(\epsilon)$ oder $\dot{\sigma} = a(\sigma, \kappa, \dot{\epsilon})$ quasistatische Plastizität [23].
  2. Geometrisch: $\rightarrow$ große Deformationen.

- **Kopplungen mit anderen Feldern:** z.B. mit Wärmeleitung

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}}_{\text{isotrop}} + 2\mu\epsilon_{ij} + \alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$

wobei λ, μ – Lamésche Konstanten,
α – Wärmedehnzahl.

Kapitel 2

Klassifizierung PDgl. und grundlegende klassische Aufgabenstellungen für PDgl.

- **Lehrbücher:** [13].

2.1 Klassifizierung

2.1.1 Allgemeine Klassifizierung

- <u>**Bezeichnungen:**</u>

  $u(x) = (u_1(\cdot), \ldots, u_l(\cdot)) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^l \quad (\mathbb{C}^l) \qquad (N = m, m+1);$

  $Du := \sum_{|\alpha| \leq n} b_\alpha \partial^\alpha u$ – Differentialausdruck der Ordnung n;
  $l \times l$-Matrix

  $D_n u = [\partial^\alpha u]_{|\alpha| \leq n}, \;\; M_n = |\{\alpha : |\alpha| \leq n\}|; \;\; Du$, Ordnung $(D) \leq n$;

  $Q \subset \mathbb{R}^N$ (z.B. auch $Q = \mathbb{R}^N$); $F(\cdot, \cdot) : Q \times \mathbb{R}^{M_n} \to \mathbb{R}^l$.

- <u>**System von l gekoppelten PDgl. der Ordnung n:**</u>

$$\boxed{F(x, D_n u) = 0, \;\; x \in Q} \tag{2.1}$$

- <u>**Definition 2.1:**</u>

  Das System (2.1) nennen wir <u>System linearer PDgl. der Ordnung n</u>, falls es sich in der Gestalt

$$\sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x), \;\; x \in Q; \;\; f : Q \to \mathbb{R}^l; \tag{2.2}$$

  $l \times l$-Matrix

  schreiben läßt. Im Falle $l = 1$ heißt (2.2) (skalare) lineare PDgl. der Ordnung n.

- **Bisher, d.h., in Kap. 1:** $n = 2$:

(2.2)
$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u(x) = f(x) \; x \in Q$$
$$a_{ij}u_{,ij} + a_i u_{,i} + au = f$$

$Q = \Omega$ $\quad$ $Q = Q_T = \Omega \times \mathbb{T}$

Beispiel: $l = 1$: Wärmeleitung: stationär $N = m$, instationär: $N = m + 1$,
$l = 3$: 3D Elastizität: stationär $N = m$, instationär: $N = m + 1$.

- **Definition 2.2:**

Das System (2.1) nennen wir quasilineares PDgl.-System der Ordnung n, falls es sich in der Gestalt

(2.3)
$$\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(x, D_{n-1}u)\partial^\alpha u = f(x, D_{n-1}u), \; x \in Q$$

$l \times l$-Matrix

schreiben läßt, wobei $D_{n-1}u = [\partial^\alpha u]_{|\alpha| \le n-1}$

$$\left[Du = D_{n-1}u = \sum_{|\alpha| \le n-1} b_\alpha \partial^\alpha u, \text{ d.h., Ordnung } (D) \le n-1. \right]$$

Im Falle $l = 1$ heißt (2.3) wieder (skalare) quasilineare PDgl. der Ordnung n.

2.1.2 Typisierung skalarer linearer PDgl. 2. Ordnung

- **Betrachten lineare PDgl. 2. Ordnung in der Form** $\quad (l = 1)$

(2.4)
$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u(x) = f(x), \; x \in Q$$

unter den Voraussetzungen:

- a_{ij}, a_i, a – reell (reelle stetige Funktion),
- $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = \overline{1, N}$ (o. B. d. Allg.).

Der PDgl. (2.4) ordnet man die quadratische Form

(2.5)
$$\Lambda(x, \xi) := \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = (A(x)\xi, \xi) \quad \forall \xi \in I\!R^N$$

mit $A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=\overline{1,N}}$ zu. Die quadratische Form heißt charakteristische Form der PDgl. (2.4).

- **Betrachten** $\Lambda(x,\xi)$ in einem fixierten Punkt $x \in Q$. Dann existiert lineare Transformation $C = [C_{kl}]_{k,l=\overline{1,N}} = \underbrace{[||||]}_{\text{EV}}$:

$$
\begin{aligned}
(2.6) \qquad C^T A C &= D := \text{diag } \overbrace{[\lambda_k]}^{\text{EW}}_{k,l=\overline{1,N}}, \quad \text{d.h.,} \\
\Lambda(x,\xi) &= (A\xi,\xi) \underset{\xi = C\eta}{\overset{\uparrow}{=}} (AC\eta, C\eta) = (C^T AC\eta, \eta) = \\
&= (D\eta,\eta) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \eta_k^2,
\end{aligned}
$$

wobei $\lambda_k =$ EW (A).

- **Definition 2.3:** elliptisch, parabolisch, hyperbolisch, ultrahyperbolisch.

1. Die PDgl. (2.4) heißt im Punkt x elliptisch, falls in (2.6) alle $\lambda_k < 0$ oder alle $\lambda_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$.
2. Die PDgl. (2.4) heißt im Punkt x parabolisch, falls genau ein Koeffizient $\lambda_k = 0$ und alle anderen, entweder alle positiv oder alle negativ sind.
3. Die PDgl. (2.4) heißt im Punkt x hyperbolisch, falls genau ein Koeffizient λ_k positiv (negativ) ist und alle anderen negativ (positiv) sind.
4. Die PDgl. (2.4) heißt im Punkt x ultrahyperbolisch, falls einige Koeffizienten $\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_i}$ positiv und die anderen $\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_j}$ negativ sind.
5. Die PDgl. (2.4) heißt im Punkt x ultraparabolisch, falls mehr als ein Koeffizient Null ist.

- **Definition 2.4:**

Falls (2.4) in allen Punkten $x \in Q$ den gleichen Typ (elliptisch, parabolisch etc.) hat, dann nennt man (2.4) in Q elliptisch, parabolisch etc.

- **Lemma 2.5:** Die PDgl. (2.4) ist im Punkt x elliptisch gdw. $\Lambda(x,\xi)$ in x positiv bzw. negativ definit ist.

Beweis: folgt sofort aus der Bez. (2.6). **q.e.d.**

- **Definition 2.6:** Gleichmäßig elliptisch in Q.

Die PDgl. (2.4) heißt gleichmäßig elliptisch in Q, falls $\exists\, \bar{\mu}_1 = \text{const.} > 0$, $\bar{\mu}_1 \neq \bar{\mu}_1(x)$:

$$(2.7) \qquad (-)\Lambda(x,\xi) \geq \bar{\mu}_1 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in I\!R^N \quad \forall x \in Q.$$

■ **Beispiel 2.7:** $N = 2$.

(2.4) $\quad \curvearrowright \; a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots = f(x)$,

(2.5) $\quad \curvearrowright \; \Lambda(x,\xi) = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\parallel \atop A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \Big)$.

<u>Bez.</u> $\Delta \equiv \Delta(x) := a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

<u>Dann gilt:</u>

a) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ (2.4) elliptisch: $\curvearrowright$ $(\pm)$ $\Lambda(x,\xi) = \text{const.} > 0$ def. Ellipse,

b) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ (2.4) hyperbolisch: $\curvearrowright$ $\Lambda(x,\xi) = \text{const.}$ def. Hyperbel,

c) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ (2.4) parabolisch: $\curvearrowright$ $\Lambda(x,\xi) = \text{const.}$ def. Parabel.

$\uparrow$

<u>mms:</u> EWP: $\underset{\text{EV}}{A\xi} = \underset{\text{EW}}{\lambda\xi}$ gdw. $\det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$$0 = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$\curvearrowright \; \lambda_{1,2} = \tfrac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2 - a_{12}a_{22}}$$

$$\tfrac{a_{11}^2+2a_{11}a_{22}+a_{22}^2-4a_{11}a_{22}+4a_{12}^2}{4} = \tfrac{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}{4}$$

In c) setzen wir natürlich zusätzlich voraus, daß in x nicht alle Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{22} gleichzeitig Null sind.

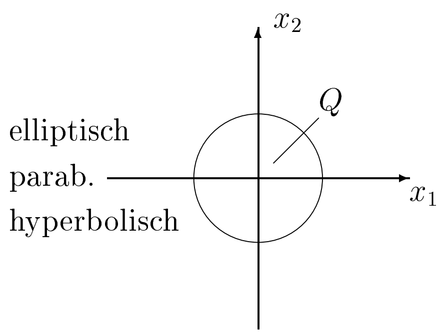
■ **Beispiel 2.8:** Tricomi-Gleichung:

(2.8) $\quad x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x)$

$\Rightarrow \; \Lambda(x,\xi) := x_2\xi_1^2 + \xi_2^2$

$\Rightarrow$ <u>Tricomi-Gleichung:</u>

- PDgl. vom gemischten Typ !
- entartet !



- **Beispiel 2.9:** klassische Gleichungen der Mathematischen Physik:

  1. Wellengleichung: $u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (t, x_1, \dots, x_m) \in I\!R^{N=m+1}$,

     $$A = \left[\begin{array}{c|c} +1 & 0 \\ \hline 0 & -a^2 I \end{array}\right] \qquad \left(u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

     $\Rightarrow \Lambda(t, x; \xi) = \xi_0^2 - a^2(\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2)$

     $\Rightarrow$ hyperbolisch !

  2. Wärmeleitgleichung: $u_t - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (t, x_1, \dots, x_m) \in I\!R^{m+1}$,

     $$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -a^2 I \end{array}\right]$$

     $\Rightarrow \Lambda(t, x; \xi) = -a^2(\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2)$

     $\Rightarrow$ parabolisch !

  3. Poisson-Gleichung: $-\Delta u = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in I\!R^m$,

     $A = -I, \ \Lambda(x, \xi) = -(\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2)$

     $\Rightarrow$ elliptisch !

- **Numerik II:** Elliptische PDgl. $\looparrowright$ RWA !
  Numerik III [28]: Parabolische und hyperbolische PDgl. $\looparrowright$ AWA, ARWA !

2.1.3 Elliptizitätsbegriff bei PDgl. höherer Ordnung und Systemen PDgl.

- **Betrachten zunächst skalare PDgl. der Ordnung n**

(2.9) = (2.2)$_{l=1}$
$$\sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x), \ x = (x_1, \dots, x_N) \in Q \subset I\!R^N.$$

Der PDgl. (2.9) ordnen wir wieder die charakteristische Form

$$\Lambda(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \forall \xi \in I\!R^N, \ x \in Q. \tag{2.10}$$

Definition 2.10:

Die PDgl. (2.9) n-ter Ordnung heißt im Punkt $x \in Q$ elliptisch, falls die charakteristische Form (2.10) [positiv bzw. (negativ)] definit ist, d.h., $\exists\, \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_1(x) > 0$:

$$(-)\Lambda(x, \xi) \geq \bar{\mu}_1(x) > 0 \quad \forall \xi \in I\!R^N : |\xi| = 1. \tag{2.11}$$

Gilt (2.11) $\forall x \in Q$, dann heißt die PDgl. (2.9) elliptisch in Q. Gilt (2.11) gleichmäßig in Q, d.h., $\bar{\mu}_1(x) \neq \bar{\mu}_1$, dann heißt die PDgl. (2.9) gleichmäßig elliptisch in Q.

$\boxed{\textbf{Ü 2.1}}$ Man zeige:

$$\Lambda(x,\xi) \geq \bar{\mu}_1 > 0 \quad \forall |\xi| = 1 \Leftrightarrow \Lambda(x,\xi) \geq \bar{\mu}_1 |\xi|^n \quad \forall \xi \in I\!R^N.$$

Beispiel 2.11: Biharmonische Gleichung ($n = 4, N = 2$):

$\Delta^2 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x) \quad$ (= Plattengleichung)

$\Rightarrow \Lambda(x,\xi) = \xi_1^4 + 2\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 = |\xi|^4 \quad \forall \xi \in I\!R^N$

d.h., $\bar{\mu}_1 = 1$.

Lemma 2.12:

Partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typ sind notwendigerweise von gerader Ordnung, d.h., $n = 2k$.

Beweis: indirekt.

Annahme: (2.9) sei von ungerader Ordnung $n = 2k + 1$ und elliptisch.

$\Rightarrow$ o. B. d. Allg. $\quad \Lambda(x,\xi) \geq \bar{\mu}_1(x) > 0 \quad \forall \xi \in I\!R^N : |\xi| = 1,$

$\xi \to -\xi$:

$$\begin{aligned} \Lambda(x,-\xi) &= \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha^{(x)} (-\xi)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=2k+1} a_\alpha(x)(-1)^{|\alpha|}\xi^\alpha \\ &= (-1)^{2k+1} \underbrace{\lambda(x,\xi)}_{\geq \bar{\mu}_1 > 0} \leq -\bar{\mu}_1 < 0. \end{aligned}$$

$\lightning$

q.e.d.

■ **Betrachten nun System PDgl. der Ordnung n**

$$\sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x) = f(x), \; x \in Q \tag{2.2}$$

mit $u = (u_1, \ldots, u_l)^T$, $\; f = (f_1, \ldots, f_l)^T$, $\; a_\alpha(x) = [a_\alpha^{ij}]_{i,j=\overline{1,l}}$ – $l \times l$–Matrix.

Dem System PDgl. (2.2) ordnen wir nun die <u>charakteristische Matrix</u>

$$\Lambda(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(x)\xi^\alpha \qquad (l \times l\text{-Matrix}) \tag{2.12}$$

und die <u>charakteristische Form</u>

$$\det \Lambda(x,\xi) \tag{2.13}$$

zu.

Definition 2.13:

Das System PDgl. (2) n-ter Ordnung (bzw. der entsprechende Differentialoperator auf der rechten Seite) heißt im Punkt $x \in Q$ elliptisch (nach Petrovskij), falls die charakteristische Form $\det \Lambda(x,\xi)$ definit ist. Analog zu Definition 2.10 definieren wir elliptisch in Q und gleichmäßig elliptisch in Q.

Offenbar gilt wieder: $n = 2k$ als notwendige Bedingung für Elliptizität !

Definition 2.14: Divergente Form:

Ein elliptischer Differentialausdruck Lu der Ordnung $n = 2k$ liegt in divergenter Form vor, wenn man ihn in der Form

$$(2.14) \qquad \underbrace{Lu := (-1)^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} \partial^\beta \underset{\substack{\downarrow \\ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}}}{a_{\alpha\beta}} \partial^\alpha u}_{\text{Hauptteil}} + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \le k \\ |\alpha| + |\beta| \le 2k-1}} \partial^\beta a_{\alpha\beta} \partial^\alpha u$$

$$\Lambda(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta}$$

schreiben kann.

Ü 2.2 Man zeige, daß das Lamésche Dgl.-System $\boxed{-\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u = f}$ der linearen Elastizitätstheorie (isotrop)

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = f_1$$

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right) - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = f_2$$

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right) - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = f_3$$

elliptisch im Sinne der Definition 2.13 ist.

2.2 Klassische lineare Aufgabenstellungen der Mathematischen Physik für skalare PDgl. 2. Ordnung

2.2.1 ARWA für parabolische PDgl.

- **Gesucht** $u(x,t) \in X \subset C^{2,1}(Q_T)$:

$$(2.15) \qquad Lu(x,t) := \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T = \Omega \times \mathbb{T}$$

+ AB: $u(x,0) = u_0(x),\ x \in \bar{\Omega},$

+ RB: $lu(x,t) = g(x,t),\ x \in \Gamma = \partial\Omega,\ t \in \mathbb{T} = (0,T),$

  - 1. Art = Dirichlet: $lu := u|_\Gamma$ $\rightarrow$ 1. ARWA,
  - 2. Art = Neumann: $lu := -a^2 \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma$ $\rightarrow$ 2. ARWA,
  - 3. Art = Robin = Austauschbedingung: $\rightarrow$ 3. ARWA,
    $lu := -a^2 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - \alpha u|_\Gamma$
  - 4. Art = gemischte RB: $\rightarrow$ 4. ARWA.

- **Modelliert z.B. folgende physikalische Erscheinungen:**
  - Instationäre Wärmeausbreitung ($\curvearrowright$ Wärmeleitgleichung, vgl. Punkt 1.1),
  - Instationäre Diffusionsprozesse ($\curvearrowright$ Diffusionsgleichung),

  $\vdots$ etc.

- **Numerische Behandlung:** siehe [28] Numerik III !

2.2.2 ARWA für hyperbolische PDgl.

- **Gesucht** $u(x,t) \in X \subset C^2(Q_T)$:

$$Lu(x,t) := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t), \;\; (x,t) \in Q_T = \Omega \times \mathbb{T} \tag{2.16}$$

$$+ \text{ AB:} \quad \left. \begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= u_1(x) \end{aligned} \right\} x \in \bar{\Omega},$$

$$+ \text{ RB:} \quad 1. - 4. \text{ Art} \qquad \Rightarrow 1. - 4. \text{ ARWA.}$$

- **Modelliert z.B. folgende physikalische Erscheinungen:**
  - Longitudinalschwingungen eines Stabes (vergleiche Punkt 1.2.2),
  - Tranversalschwingungen einer Saite (1D) oder Membran (2D),
  - Elektromagnetische Schwingungen,
  - Ausbreitung von Druckwellen,

  $\vdots$ etc.

  $\Rightarrow$ (2.16) heißt auch Schwingungs- bzw. Wellengleichung !

- **Numerische Behandlung:** siehe [28] Numerik III !

2.2.3 RWA für elliptische PDgl.

- **Asymptotische Verteilung:** $t \to \infty$:
  Ableitung aus parabolischer PDgl. für $t \to \infty$ unter stationären Bedingungen:

  Annahme:
  $$\left. \begin{aligned} f(x,t) &= f(x) \\ g(x,t) &= g(x) \\ a^2 &= \text{const.} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{array}{ccc} u(x,t) & \longrightarrow & u(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & \longrightarrow & 0 \\ & t \to \infty & \end{array}$$

  Folglich ist die asymptotische (stationäre) Verteilung $u(x)$ Lösung der RWA:

$$\boxed{\begin{aligned} &Lu := -\Delta u(x) = \tfrac{1}{a^2} f(x) \text{ in } \Omega \\ &+ \text{ RB: } 1. - 4. \text{ Art auf } \Gamma \end{aligned}} \quad \text{Poisson-Gleichung} \tag{2.17}$$

  Beispiel: Asymptotische (stationäre) Temperaturverteilung, Schadstoffverteilung etc.

- **Statische und quasistatische Gleichgewichtszustände:**

Ableitung aus hyperbolischer PDgl. möglich:

Annahme: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \approx 0 \quad \forall (x,t) \in Q_T$; $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \approx 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$; $a^2 = \text{const.} > 0$.

$\Rightarrow$ quasistatisch:

(2.18)
$$\boxed{\begin{array}{l} -\Delta \dot{u}\,(x,t) = \dot{f}\,(x,t)/a^2 \\ +\ \text{RB: 1. – 4. Art} \\ +\ \mathbf{AB:\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \bar{\Omega}} \end{array}}$$

Quasizeitparameter

inkrementelle Methoden
(Homotopie-Methoden)

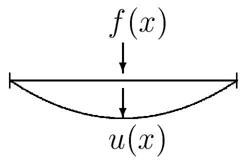
Annahme: $f(x,t) = f(x),\ g(x,t) = g(x),\ a^2 = \text{const.} > 0$.

$\Rightarrow$ statisch:

(2.17)
$$\boxed{\begin{array}{l} -\Delta u(x) = f(x)/a^2 \text{ in } \Omega \\ +\ \text{RB: 1. – 4. Art auf } \Gamma \end{array}}$$

Poisson-Gleichung

Beispiel: – Zugstab im statischen Gleichgewicht (vergleiche Punkt 1.2.1),
– Gleichgewichtslage einer Saite bzw. Membran:



- **Periodische Lösungen von hyperbolischen PDgl.:**

Betrachten z.B. 1. ARWA für (16) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f$, RB, AB.

Annahme: $f(x,t) = \underbrace{a^2 f(x)}_{\text{Amplitude}}\ e^{i\omega t}$ Frequenz ω

$g(x,t) = g(x) e^{i\omega t}$

Ansatz: $u(x,t) = u(x) e^{i\omega t}$

(2.16) $\Rightarrow$
(2.19)
$$\boxed{\begin{array}{l} -\Delta u(x) - k^2 u(x) = f(x), x \in \Omega \\ +\ \text{RB: } u(x) = g(x), x \in \Gamma \\ \text{mit } k^2 = \omega^2/a^2 \end{array}}$$

Helmholtz-Gleichung

In Verbindung mit der Helmholtz-Gleichung steht die Frage nach den Eigenschwingungen ($\lambda = k^2$):

EWP:
(2.20)
$$\boxed{\text{Gesucht } u(x) \not\equiv 0\text{:} \quad \begin{array}{l} -\Delta u(x) = \lambda u(x),\ x \in \Omega \\ u(x) = 0,\ x \in \Gamma \end{array}}$$

$\Rightarrow$ Fredholm-Theorie (siehe [26]) für (2.19) !

2.2.4 Bemerkungen zur klassischen Lösbarkeit

- Die Aufgabenstellungen (2.15) – (2.20) mit entsprechenden AB und RB nennt man **klassisch**, wenn die Lösung $u(x,t)$ (bzw. $u(x)$) in den der Aufgabenstellung entsprechenden Räumen stetig differenzierbarer Funktionen gesucht wird.

  z.B. 1. RWA (2.17) = Dirichlet-Problem für Poisson-Gleichung:
  $\Rightarrow$ Gesucht $u \in X = C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \subset C^2(\Omega)$.

  Die Eingangsdaten $\{f(x,t),\, g(x,t),\, a^2,\, u_0(x),\, u_1(x),\, \Omega,\, \partial\Omega\}$ müssen entsprechende Glattheitseigenschaften haben !

- **Existenz-, Eindeutigkeits- und Regularitätsaussagen** für klassische Lösung siehe Vorlesung „PDgl.“ bzw. Literatur, z.B. [24].

  Zur Regularität elliptischer RWA:

  - D. Hilbert: 19. Hilbertsche These (1901, Paris, Mathematiker Kongreß):
    $\rightarrow$ Aus bestimmten Differenzierbarkeitseigenschaften der Eingangsgrößen folgen entsprechend „bessere“ (Ordnungs-Shift) Glattheitseigenschaften der Lösung !?

    $\rightarrow$ Glattheitsgewinn = $2n$ = Ordnung der PDgl. !?
  - Schauder: (siehe z.B. [24], S. 145 !)

Vor.:	1. $\Gamma = \partial\Omega \in C^{k,\alpha}$ mit $k \geq 2, 0 \leq \alpha \leq 1$, 2. $f \in C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega}), g \in C^{k,\alpha}(\Gamma)$.
Bh.:	Dann $\exists\,!$ klassische Lösung des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung ($-\Delta u = f$ in Ω, $u = g$ auf Γ), und es gilt: 1. $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, 2. $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq c(\|f\|_{C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^{k,\alpha}(\Gamma)})$.

$\Rightarrow$ im weiteren (z.B. im Kapitel 5: Differenzenverfahren) wird die Existenz einer klassischen Lösung der betrachteten RWA bzw. ARWA ([28] Numerik III), die hinreichend glatt ist, vorausgesetzt !

■ **Allgemeiner Fall:** $\boxed{\underbrace{-a^2\Delta u}_{\substack{\text{elliptischer} \\ \text{Anteil von } L}}}$ $\longmapsto$ $\boxed{\text{allgemeiner elliptischer Differentialoperator}}$

a) „symmetrischer“ Fall (formal selbstadjungierter Differentialoperator):

	linear	quasilinear $\bullet \begin{smallmatrix} \nearrow x \\ \searrow x,t \end{smallmatrix}$
$-a^2\Delta u \mapsto$	$-\operatorname{div}(\lambda(x)\nabla u) + au$ bzw. $-\sum\limits_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + au$	$-\sum\limits_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(\bullet, u)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a(\bullet, u)u$ z.B. Abhängigkeit der Wärmeleit-koeffizienten von der Temperatur
	Elliptizitätsbedingung: $(\uparrow)$ $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j = \overline{1,m}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \bar{\mu}_1\lvert\xi\rvert^2$, $\forall \xi \in I\!R^m$.	$-\sum\limits_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(\bullet, \lvert\nabla u\rvert)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + \ldots$ z.B. Abhängigkeit der Permeabilität von der Induktion in der Magnetfeldberechnung

b) „nichtsymmetrischer“ Fall ($\rightarrow$ Konvektions-Terme !):

$$-a^2\Delta u \mapsto -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^{m} a_i(\cdot)\frac{\partial u}{\partial x_i} + au$$

<u>Beispiel:</u> 1) Wärmetransport (↷ Wärmeleit-Wärmetransport-Probleme) $\rightarrow$ siehe Punkt 1.1.3.

2) Schadstofftransport (↷ Diffusions-Konvektions-Probleme).

Kapitel 3

Verallgemeinerte Formulierungen elliptischer RWA und ihre Analysis

- **Lehrbücher:** [5], [13].

3.1 Die (primale) Variationsformulierung

3.1.1 Die abstrakte Theorie

- **Wiederholung:** Siehe [26] Numerik I, Punkt 2.3 !
- **Betrachten abstraktes Variationsproblem**

$$(3.1) \quad \text{Gesucht} \quad u \in V_g: \quad a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0,$$

$$\text{Homogen.:} \quad u = w + g \Big\downarrow$$

$$(3.1)_0 \quad \text{Gesucht} \quad w \in V_0: \quad a(w,v) = < \hat{F}, v > := < F, v > - a(g,v) \quad \forall v \in V_0,$$
$$u \in V_0 \quad a(u,v) = < F, u > \quad \forall u \in V_0.$$

- **Hauptresultat:** Satz von Lax & Milgram ([26] Numerik I: Satz I.2.9)

Vor.: 0. $V_0 \subset V$ - UR des H-Raums $V, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot)$,

1. $F \in V_0^*$,

2. $a(\cdot,\cdot) : V_0 \times V_0 \to I\!R^1$ – Bilinearform,

2.a) V_0-elliptisch: $\mu_1 \|v\|^2 \leq a(v,v) \quad \forall v \in V_0$,

2.b) V_0-beschränkt: $|a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\| \, \|v\| \quad \forall u, v \in V_0$.

Bh.: $\exists !\, u \in V_0 : a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0 \qquad (3.1)_0$

Beweis: $(3.1)_0 \Leftrightarrow Au = F$ in V_0^* mit $< Au, v > = a(u,v)$
Banachscher Fixpunktsatz: $\varrho \in (0, 2\mu_1/\mu_2^2)$;

$$(3.2) \qquad u_{n+1} = u_n - \varrho(JAu_n - JF) \xrightarrow[n\to\infty]{} u.$$

3.1.2 Beispiele: RWA für elliptische PDgl.

3.1.2.1 RWA für skalare elliptische PDgl. 2. Ordnung

- **Siehe auch [26] Numerik I, Punkt 4.3.**

- **Klassische Formulierung:** (in divergenter Form)

(3.3)

Gesucht $u \in X := C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \cap C(\Omega \cup \Gamma_1)$:

$$-\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u(x) = f(x),\ x \in \Omega,$$

+RB:
- $u(x) = g_1(x),\ x \in \Gamma_1,$
- $\frac{\partial u}{\partial N} = g_2(x),\ x \in \Gamma_2,$
- $\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(x)u(x) = \underbrace{g_3(x)}_{\alpha(x)u_A(x)}\ ,\ x \in \Gamma_3.$

$$-\frac{\partial u}{\partial N} = \alpha(x)(u(x) - u_A(x)),$$

wobei $\frac{\partial u}{\partial N} := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}n_i(x)$ die Konormalenableitung bezeichnet.

Bemerkung 3.1:

1. $u \in X$: (3.3) heißt klassische Lösung der RWA !
2. Beachte Vor. an Eingangsdaten $\{a_{ij}, a_i, a, \alpha, f, g, \Omega\}$ $\boxed{\text{Ü 3.1}}$
   $\rightarrow$ hinreichend glatt ! mms: $a_{ij} \in C^1(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3), \ldots$?
3. Gleichmäßige Elliptizität in Ω:
   - $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad \forall i, j = \overline{1, m},$
   - $\Lambda(x, \xi) := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \bar{\mu}_1|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$
4. Beispiel: Wärmeleit-Wärmetransportproblem aus Punkt 1.1.3.

■ **Variationsformulierung = verallgemeinerte Formulierung = schwache Formulierung:**

- Formale Prozedur zur Herleitung der Variationsformulierung (3.1):

1. Wahl des Raumes der Testfunktion:

   $V_0 = \{v \in V = W_2^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}.$

   $V = W_2^1(\Omega)$: Grundraum für betrachtete Aufgabenstellung

2. Multiplizieren PDgl. (3.3) mit Testfunktion $v \in V_0$ und integrieren über Ω:

   $$\int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au\Big) v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V_0.$$

3. Partielle Integration im Hauptteil (= Terme $(a_{,j}u_{,j})_{,i}$)

   $$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega w \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} wv \cdot n_i \, ds}$$

   $$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^m a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + auv\Big) dx - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\sum_{i,j=1}^m a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_i}_{=:\frac{\partial u}{\partial N} = \text{Konormalenableitung}} \cdot v \, ds =$$

   $$= \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V_0.$$

4. Verarbeitung der natürlichen RB auf Γ_2 und Γ_3:

   $$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial N} v \, ds = \underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial N} v \, ds}_{=0} + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, ds + \int_{\Gamma_3} (g_3 - \alpha u) v \, ds$$

5. Festlegung der Mannigfaltigkeit, in der die Lösung u gesucht wird:

   $V_g = \{v \in V = W_2^1(\Omega) : v = g_1 \text{ auf } \Gamma_1\}.$

- Resultat: Variationsformulierung (VF)

(3.4)

Gesucht $u \in V_g : a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_0,$

mit

$$a(u,v) := \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^m a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + auv\Big) dx + \int_{\Gamma_3} \alpha uv \, ds,$$

$$\langle F, v \rangle := \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, ds + \int_{\Gamma_3} g_3 v \, ds,$$

$V_g := \{v \in V = W_2^1(\Omega) : v = g_1 \text{ auf } \Gamma_1\},$

$V_0 := \{v \in V : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}.$

- **Bemerkung 3.2:**
  1. Lösung $u \in V_g$ von (3.4) heißt schwache oder verallgemeinerte Lösung.
  2. Für die Variationsformulierung (3.4) können die Voraussetzungen an die Eingangsdaten abgeschwächt werden
     (! Integrale müssen existieren), z.B.:

$$(3.5)\qquad \left\{\begin{array}{ll} 1) & a_{ij}, a_i, a \in L_\infty(\Omega), \alpha \in L_\infty(\Gamma_3), \\ 2) & f \in L_2(\Omega), g_i \in L_2(\Gamma_i), i = 2, 3, \\ 3) & g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1),\ \text{d.h.},\ \exists\, \tilde{g}_1 \in H^1(\Omega) : \tilde{g}_1|_{\Gamma_1} = g_1, \\ 4) & \Omega \subset I\!R^m \ddagger : \Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1}\ \text{(Lipschitz-stetiger Rand)}, \\ 5) & \text{gleichmäßige Elliptizität:} \\ & \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \bar{\mu}_1 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in I\!R^m \\ a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \forall i, j = \overline{1, m} \end{array}\right\} \forall\ \text{f. ü. } x \in \Omega. \end{array}\right.$$

  3. Beziehung zwischen klassischer und verallgemeinerter Lösung:

$$u \in X \cap V_g \cap \overset{\bullet}{W}{}_2^2(\Omega)$$

$$(3.3)\quad \boxed{\begin{array}{l} u \in X\text{: (3)} \\ \text{klassische Lösung} \end{array}} \ \underset{\Longleftarrow}{\overset{\textcircled{1}\ -\ \textcircled{5}}{\Longrightarrow}}\! \text{(mms)} \quad \boxed{\begin{array}{l} u \in V_g\text{: (4)} \\ \text{verallgemeinerte Lösung} \end{array}} \quad (3.4)$$

$$\uparrow$$

<u>Vor.:</u>

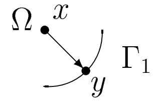
- $u \in V_g \cap X \cap \overset{\bullet}{W}{}_2^2(\Omega)$
- klassische Glattheitsvor. an Eingangsdaten in $\bar{\Omega}$

- Existenz der Integrale und Durchführbarkeit der partiellen Integration:

  ! Achtung: $u \in X = C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \cap C(\Omega \cup \Gamma_1) \ \underset{\text{i.a.}}{\not\Rightarrow}\ u \in W_2^1(\Omega)$!

  z.B.:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = O(|\underset{\Omega}{\underset{\Cap}{x}} - \underset{\Gamma_1}{\underset{\Cap}{y}}|^{-p}) \text{ für } \overset{\Omega}{\overset{\Cup}{x}} \to \overset{\Gamma_1}{\overset{\Cup}{y}} \text{ und } p > 0 \text{ hinreichend groß !}$$



■ **Übungsaufgaben** (siehe P VII):

Ü 3.1 Formulieren Sie für (3.3) die klassischen Voraussetzungen an die Eingangsdaten ! Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, daß eine verallgemeinerte Lösung $u \in V_g \cap X \cap W_2^2(\Omega)$ von (3.4) auch Lösung von (3.3) im klassischen Sinne ist ! Betrachten Sie zum „Training“ zunächst das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \text{Gesucht } u \in X = C^2(\Omega) \ \cap \ C(\bar{\Omega}) : \\ -\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega \subset I\!R^m \dagger, \\ u(x) = g(x), \ x \in \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

? ⇓⇑ ?

$$(3.4) \quad \begin{cases} \text{Gesucht } u \in V_g = \{v \in V = H^1(\Omega) : v = g \text{ auf } \Gamma\} : \\ \underbrace{\int\limits_\Omega \nabla^T u \nabla v \, dx}_{=a(u,v)} = \underbrace{\int\limits_\Omega f v \, dx}_{=<F,v>} \quad \forall v \in V_0 = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \end{cases}$$

Ü 3.2 Zeigen Sie, daß in den folgenden Fällen a) - c) die Voraussetzungen des Lax-Milgram-Satzes erfüllt sind, und geben Sie μ_1 und μ_2 an !

a) Zusätzlich zu den Vor. (3.5) gelte:
$a_i = 0, \quad a(x) \geq 0 \quad \forall$ f. ü. $x \in \Omega, \quad \alpha(x) \geq 0 \quad \forall$ f. ü. $x \in \Gamma_3$;
$\text{meas}_{m-1}(\Gamma_1) > 0$.

b) Zusätzlich zu den Vor. (3.5) gelte:
$a_i = 0, \ a = 0, \quad \alpha(x) \geq \underline{\alpha} = \text{const.} > 0 \quad \forall$ f. ü. $x \in \Gamma_3, \quad \Gamma_1 = \emptyset$.

c) Zusätzlich zu den Vor. (3.5) gelte:
$a_i = 0, \quad a(x) \geq \underline{a}$ const. $> 0 \quad \forall$ f. ü. $x \in \Omega; \quad \Gamma = \Gamma_2$, d.h., $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \emptyset$.

Ü 3.3 Zusätzlich zu Vor. (3.5) gelte $a(x) \geq \underline{a} = \text{const.} > 0 \quad \forall$ f. ü. $x \in \Omega, \Gamma_1 = \Gamma_3 = \emptyset$, und $a_i \not\equiv 0$.
Man gebe Bedingungen an die Koeffizienten a_i an, sodaß die Voraussetzungen des Lax-Milgram-Satzes erfüllt sind !

Hinweis: Wenden Sie zur Abschätzung des Konvektionsterms $\sum\limits_{i=1}^m \int\limits_\Omega a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx$ die ϵ-Ungleichung

$$|ab| \leq \frac{1}{2\epsilon} a^2 + \epsilon b^2, \quad \forall a, b \in I\!R^1 \quad \forall \epsilon > 0$$

an !

Ü 3.4 Man gebe die Variationsformulierung für das reine Neumann-Problem für die Poisson-Gleichung

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), \ x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, \ x \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

an und kläre das Problem der Existenz und Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung !

Hinweis: Offenbar ist $u(x) + c$ für beliebig fixierte Konstante $c \in \mathbb{R}^1$ eine Lösung von $(*)$, falls u $(*)$ löst. Zur Klärung der Lösbarkeitseigenschaften kann man z.B. folgende Wege gehen:

1. Variationsformulierung in $V = H^1(\Omega)$ aufstellen und Fredholm-Theorie aus [26] (siehe Numerik I, Kap. 2) anwenden !
2. Variationsformulierung im Faktorraum $V = H^1(\Omega)|_{\text{ker}}$ mit $\text{ker} = \{c : c \in \mathbb{R}^1\} = \mathbb{R}^1$ aufstellen und Lax-Milgram-Satz anwenden !

Ü 3.5 Btr. das Dirichletsche RWP zur Bestimmung der z-Komponente $u(x_1, x_2) := A_z(x, y)$ des magnetischen Vektorpotentials für ein ebenes Magnetfeldproblem (z.B. Elektromotor):

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{- div} \left(\frac{1}{\mu(x)} \nabla u(x)\right) = S_z(x) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\mu(x)} B_{x_2}(x)\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\mu(x)} B_{x_1}(x)\right), \\ \qquad\qquad\qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \ \dagger, \\ + \text{ RB: } u(x) = 0, \ \ x \in \Gamma = \partial\Omega. \end{array}}$$

mit geg. Fkt. μ (Permeabilität), S_z (Stromeinprägung) und geg. Remanenzinduktion $\vec{B} = (B_{x_1}, B_{x_2})^T$.
Stellen Sie die Variationsformulierung (3.1)

$$\text{Ges. } u \in V_g : a(u, v) = < F, v > \qquad \forall v \in V_0$$

auf und zeigen Sie, daß unter den Voraussetzungen

1. $\mu \in L_\infty : 0 < \underline{\mu} \le \mu(x) \le \bar{\mu}$ f. ü. $x \in \Omega$, mit positiven Konstanten $\underline{\mu}$ und $\bar{\mu}$,
2. $S_z \in L_2(\Omega)$,
3. $B_{x_1}, B_{x_2} \in L_2(\Omega)$,
4. $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \ \dagger, \quad \Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1}$

eine eindeutig bestimmte verallgemeinerte Lösung $u \in V_g$ des Variationsproblems (3.1) existiert !

3.1.2.2 RWA für elliptisches System PDgl. 2. Ordnung: Das lineare Elastizitätsproblem

- **Siehe Punkt 1.2.3: → Klassische Formulierung des linearen 3D Elastizitätsproblems:**

(3.6)

Gesucht ist der Verschiebungsvektor $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T \in X$:

Kräftegleichgewicht:

Momentengleichgewicht

$$-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \overset{\overset{\sigma_{ji}}{\parallel}}{\sigma_{ij}}(u(x)) = f_i(x), \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset I\!R^3 \; \dagger, \quad \forall i = \overline{1,3},$$

+ Stoffgesetz = Hookesches Gesetz:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} D_{ijkl}\epsilon_{kl} = \lambda \left(\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kk} \right) \delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}, \quad \forall i,j = \overline{1,3},$$

i.a. 21 unabhängige Konstante von 81

isotropes Material:

$$\boxed{D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})}$$

$\lambda, \mu = \text{const.} > 0$ (homogen)

+ Geometrische Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(u) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \epsilon_{ji} \quad \forall i,j = \overline{1,3},$$

+ Randbedingungen:

$$u(x) = 0 \quad (\text{bzw.} = \bar{u}(x)) \quad \forall x \in \Gamma_1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(u(x)) n_j(x) = g_i(x) \quad \forall x \in \Gamma_2,$$

wobei

$$X = \{v = (v_1, v_2, v_3)^T : v_i \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2) \cap C(\Omega \cup \Gamma_1), i = \overline{1,3}\}$$

und klassischen Vor. an die Eingangsdaten $\{D_{ijkl}, f, g, \bar{u}, \Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2\}$.

Ü 3.6 Zeigen Sie, daß (3.6) äquivalent ist zum Laméschen System PDgl. (vergleiche auch Ü 2.2):

$$\boxed{\begin{array}{l} -\mu\Delta u(x) - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u(x) = f(x),\ x \in \Omega \\[6pt] + \text{ Randbedingung} \\ \begin{array}{rcl} \text{mit } f & = & (f_1, f_2, f_3)^T \text{ und den Differentialoperatoren} \\ \Delta & = & \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} = \text{Vektorlaplace}, \\ \nabla & = & \text{Gradient, div} = \text{Divergenz.} \end{array} \end{array}}$$

<u>Hinweis:</u> Geometrische Beziehungen → Stoffgesetz → Kräftegleichgewicht einsetzen !

- **<u>Herleitung der Variationsformulierung analog zu Punkt 3.1.2.1:</u>**

1 $V_0 = \{v = (v_1, v_2, v_3)^T \in V = [W_2^1(\Omega)]^3 : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$.

2 $\int\limits_\Omega \left(-\sum\limits_{i=1}^3 \sum\limits_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} v_i \right) dx = \int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^3 f_i v_i \, dx \quad \forall v \in V_0.$

3 $\underbrace{\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^3 \sum\limits_{j=1}^3 \sigma_{ij} v_{i,j} \, dx}_{= \sum\limits_{i=1}^3 \sum\limits_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u)\epsilon_{ij}(v)} - \int\limits_\Gamma \sum\limits_{i=1}^3 \underbrace{\sum\limits_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j}_{=: \sigma_{\vec{n}\,i} = i\text{-te Komponente der Normalspannung}} \cdot v_i \, ds = \int\limits_\Omega f^T v \, dx \quad \forall v \in V_0.$

4 $\int\limits_\Gamma \sum\limits_{i=1}^3 \left[\sum\limits_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \right] v_i \, ds = \int\limits_{\Gamma_1} \sum \sum \sigma_{ij} n_j \underset{\underset{0}{\parallel}}{v_i} \, ds + \int\limits_{\Gamma_2} \sum\limits_{i=1}^3 g_i v_i \, ds.$

5 $V_g = \{v \in V : v = \bar{u} \text{ auf } \Gamma_1\} = V_0.$

$\uparrow$ o. B. d. Allg. $\bar{u} = 0$

- **Resultat:** Variationsformulierung (VF):

(3.7)

Gesucht $u \in V_g \equiv V_0 := \{v \in V = [W_2^1(\Omega)]^3 : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$:

$$a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0,$$

wobei

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u(x))\epsilon_{ij}(v(x))\,dx \equiv \int_\Omega \sigma^T(u)\epsilon(v)\,dx \\
&= \int_\Omega \sum_{ij}^{3} \sum_{k,l=1}^{3} D_{ijkl}\epsilon_{kl}(u)\epsilon_{ij}(v)\,dx \equiv \int_\Omega \epsilon^T(u)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tensor der} \\ \text{elastischen Konstante}}}{D}\epsilon(v)\,dx = \\
&\overset{\text{isotrop}}{=} \int_\Omega \{\lambda \overbrace{\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{kk}(u)}^{\text{div }(u)} \overbrace{\sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ii}(v)}^{\text{div }(v)} + 2\mu \sum_{i,j=1}^{3}\epsilon_{ij}(u)\epsilon_{ij}(v)\}\,dx, \\
< F, v > &= \int_\Gamma \sum_{i=1}^{3} f_i v_i\,dx + \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{3} g_i v_i\,ds \equiv \int_\Omega f^T v\,dx + \int_{\Gamma_2} g^T v\,ds,
\end{aligned}$$

$f = (f_1, f_2, f_3)^T \in [L_2(\Omega)]^3$, $g = (g_1, g_2, q_3)^T \in [L_2(\Gamma_2)]^3$ gegeben.

- **Minimumproblem:** (MP)

$(3.7)_{\text{MP}}$

Gesucht $u \in V_0 : J(u) = \inf_{v \in V_0} J(v)$,

mit

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(v)\epsilon_{ij}(v)\,dx}_{\substack{= \text{Deformationsenergie} \\ \text{(innere Energie)}}} - \underbrace{\left(\int_\Omega f^T v\,dx + \int_{\Gamma_2} g^T v\,ds\right)}_{\substack{= \text{potentielle Energie} \\ \text{der äußeren Kräfte} \\ \text{(äußere Energie)}}}.$$

- **Übungsaufgaben:**

Ü 3.7 Man zeige zunächst, daß für die 1. RWA ($\Gamma_1 = \Gamma$) gilt:

a) $a(\cdot,\cdot)$ ist symmetrisch, d.h., $a(u,v) = a(v,u)$ $\forall u, v \in V_0 = [\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)]^3$,

b) $a(\cdot,\cdot)$ ist positiv, d.h., $a(v,v) > 0 \quad \forall v \in V_0 : v \neq 0$.

Damit sind die Vor. von Satz I.2.10 ([26] Numerik I) erfüllt $\Rightarrow$ $(3.7)_{\mathrm{VF}} \Leftrightarrow (3.7)_{\mathrm{MP}}$!

Ü 3.8 Man zeige, daß für die 1. RWA ($\Gamma_1 = \Gamma$) im Falle isotropen und homogenen Materials die Voraussetzungen des Lax-Milgram–Satzes I.2.9 ([26] Numerik I) erfüllt sind und gebe μ_1 und μ_2 an, d.h.:

1) $F \in V_0^*$,

2a) $\exists\ \mu_1 = \text{const.} > 0 : a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_0$,

2b) $\exists\ \mu_2 = \text{const.} > 0 : |a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\|_1 \|v\|_1 \quad \forall u, v \in V_0$,

wobei

$$\|v\|_1^2 := \sum_{i=1}^{3} \|v_i\|_1^2 = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left(v_i^2 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \right) dx.$$

<u>Hinweis:</u> zum Beweis der V_0–Elliptizität:

- $$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega \{\lambda (\mathrm{div}\ (v))^2 + 2\mu \sum_{i,j=1}^{3} (\epsilon_{ij}(v))^2\}\, dx \geq \\ &\geq 2\mu \int_\Omega \sum_{i,j=2}^{3} (\epsilon_{ij}(v))^2\, dx \qquad \text{o.k.} \end{aligned}$$

- Korn'sche Ungleichung (für 1. RWA, d.h., in $V_0 = \left[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\right]^3$)

  $$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega (\epsilon_{ij}(v))^2\, dx \geq c_K \sum_{i,j=1}^{3} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = c_K |v|_1^2 \quad \forall v \in V_0$$

  $c_K = ?$ (mms)

- Friedrichs-Ungleichung (siehe [26] Numerik I, Kap. 3) !

- **Bemerkung 3.3:**

1. Zur Diskussion der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der gemischten RWA (meas $\Gamma_1 > 0$, meas $\Gamma_2 > 0$) und der 2. RWA ($\Gamma_2 = \Gamma$) siehe Literatur, z.B. [9] S. 23 – 28 und Vorlesung „Numerische Festkörpermechanik“ [29].

2. Grundlage dafür ist wieder der Lax-Milgram–Satz I.2.9 ([26] Numerik I). Zum Beweis der V_0-Elliptizität werden

   - die KORNsche Ungleichung

     $$\|v\|_{1,\Omega} \leq C \left(\sum_{i,j=1}^{3} \|\epsilon_{ij}(v)\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{3} \|v_i\|_{0,\Omega}^2 \right)^{0.5}$$

     $\forall v \in V = [W_2^1(\Omega)]^3$,

- und die Friedrichs-Ungleichung (gemischte RWA),
- bzw. für die 2. RWA

$$
\begin{aligned}
\ker A_{\text{Lamé}} &= \{a \times x + b : a, b \in I\!R^3\} \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \text{Unterrraum der Starrkörperverschiebungen}
\end{aligned}
$$

benötigt.

3.1.2.3 Randwertaufgaben für skalare elliptische PDgl. 4. Ordnung: Die 1. biharmonische RWA

■ **Klassische Formulierung:**

(3.8)

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\text{Gesucht } u \in X = C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}): \\[4pt]
\Delta^2 u(x) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^2} = f(x), \quad \forall x \in \Omega \subset I\!R^2 \ ^\dagger \\[4pt]
+ \text{ RB: } \begin{array}{rcl} u(x) &=& 0 \quad \forall x \in \Gamma, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}} &=& 0 \quad \forall x \in \Gamma, \end{array} \\[4pt]
\text{mit } f \in C(\Omega) \text{ und } \Omega \subset I\!R^2\ ^\dagger, \Gamma = \partial\Omega - \text{hinreichend glatt.}
\end{array}
}
$$

Modelliert z.B. Durchbiegung $u(\cdot)$ einer fest eingespannten, stofflich homogenen und isotropen Platte unter vertikaler Belastung ! RWA (3.8) wird aus (3.6) unter Verwendung der KIRCHHOFFschen Hypothesen abgeleitet.
Siehe Vorlesung „Numerische Festkörpermechanik“ [29] und Literatur: [5] (Braess D.: Finite Elements, S. 264 ff).

■ **Herleitung der Variationsformulierung:** 1 - 5

1 $V_0 = \{v \in V = W_2^2(\Omega) : u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } \Gamma\} = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega).$

2 $\int\limits_\Omega \Delta^2 u \cdot v \, dx = \int\limits_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V_0.$

3 $$\overbrace{\int\limits_\Omega \Delta\Delta u \cdot v \, dx}^{2 \times \text{ partiell integrieren}} \overset{\text{Punkt 3.5 ([26] Numerik I)}}{=} \int\limits_\Omega \Delta u \Delta v \, dx + \int\limits_\Gamma \partial_n \Delta u \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{v} \, ds - \int\limits_\Gamma \Delta u \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\partial_n v} \, ds \quad \forall v \in V_0.$$

4 Keine natürlichen Randbedingungen ! (natürliche RB: $\Delta u = g_2$, $\partial_n \Delta u = g_3$).

5 $V_g = \{v \in V : v = g_0 = 0,\ \partial_n v := \frac{\partial v}{\partial n} = g_1 = 0 \text{ auf } \Gamma\} = V_0.$

■ **Resultat:** Variationsformulierung

(3.9)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Gesucht } u \in V_0 = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) : a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0 \\ \text{mit} \\ a(u,v) = \int\limits_\Omega \Delta u \Delta v \, dx, \;\; < F, v > = \int\limits_\Omega f v \, dx, \\ f \in L_2(\Omega) \text{ gegeben, } \Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1}. \end{array}}$$

■ **Ü 3.9** Man zeige, daß die folgenden Aussagen gelten:

1) $f \in V_0^* = W_2^{-2}(\Omega)$,

2) $a(\cdot,\cdot) : V_0 \times V_0 \mapsto I\!R^1$ – Bilinearform:

2a) $\exists\, \mu_1 = \text{const.} > 0 : a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|_{2,\Omega}^2 \quad \forall v \in V_0 = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$,

2b) $\exists\, \mu_2 = \text{const.} > 0 : |a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\|_{2,\Omega} \|v\|_{2,\Omega} \quad \forall u, v \in V_0$,

2c) $a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u, v \in V_0$.

Aus diesen Eigenschaften folgt unmittelbar:

- $\exists!$ (LAX & MILGRAM) (Vor. 1) – 2b), nicht aber 2c)),
- Äquivalenz zum Minimumproblem (+ 2c)).

■ **Bemerkung 3.4:**

1. Aus dem Herleitungsschritt 3 der Variationsformulierung ergeben sich folgende mögliche RB:
   - wesentlich: $u = g_0$ auf Γ
   - wesentlich: $\partial_n u = g_1$ auf Γ
   - natürlich: $\Delta u = g_2$ auf Γ
   - natürlich: $\partial_n \Delta u = g_3$ auf Γ

   Mögliche Kombinationen

   Für die Kirchhoff-Platte stimmt die entsprechende Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ nur im Falle der 1. RWA mit der oben angegebenen biharmonischen Bilinearform überein: ↯ Andere natürliche RB für die Platte: $l_2 u = g_2$ und $l_3 u = g_3$, wobei mit l_i Differentialoperatoren i-ter Ordnung bezeichnet werden.

2. Mögliche RWA für die biharmonische PDgl. $\Delta^2 u = f$ sind:

   1. RWA: $u = g_0$ und $\partial_n u = g_1$ auf Γ (reine Dirichlet-Aufgabe),

   2. RWA: $u = g_0$ und $\Delta u = g_2$ auf Γ,

   3. RWA: $\partial_n u = g_1$ und $\partial_n \Delta u = g_3$ auf Γ,

   4. RWA: $\Delta u = g_2$ und $\partial_n \Delta u = g_3$ auf Γ (reine Neumann-Aufgabe),

   gem. RWA: z.B. $u = \partial_n u = 0$ auf Γ_1 und $\Delta u = \partial_n \Delta u = 0$ auf Γ_2.

■ **Ü 3.10** Geben Sie die Variationsformulierungen der in Bemerkung 3.4.2 angegebenen RWA an, und untersuchen Sie die Existenz und Eindeutigkeit verallgemeinerter Lösungen (Lax-Milgram). Nehmen Sie die wesentlichen RB o. B. d. Allg. (Homogenisieren) als homogen an !

3.2 Die gemischte Variationsformulierung

3.2.1 Die abstrakte Theorie

■ **Betrachten reelle *H*-Räume**

$V,\ \|\cdot\|_V,\ (\cdot,\cdot)_V; \quad V^*,\ \|\cdot\|_{V^*}; \quad <\cdot,\cdot>_V : V^* \times V \to \mathbb{R}^1;$

$W,\ \|\cdot\|_W,\ (\cdot,\cdot)_W; \quad W^*,\ \|\cdot\|_{W^*}; \quad <\cdot,\cdot>_W : W^* \times W \to \mathbb{R}^1.$

Seien

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot) &: V \times V \to \mathbb{R}^1 \\ b(\cdot,\cdot) &: V \times W \to \mathbb{R}^1 \end{aligned}$$

zwei stetige Bilinearformen.

■ **Betrachten folgendes abstraktes gemischtes Variationsproblem:**

(3.10)
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Gesucht } u \in V \text{ und } p \in W: \\ \begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= \ < F, v >_V \quad \forall v \in V, \\ b(u,q) &= \ < G, q >_W \quad \forall q \in W. \end{aligned} \end{array}}$$

unter den folgenden Standardvoraussetzungen:

(3.11)

1) $F \in V^*,\ G \in W^*$ gegeben.

2) Bilinearformen $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}^1$ und $b(\cdot,\cdot) : V \times W \to \mathbb{R}$ seien stetig, d.h., $\exists\ \mu_a,\ \mu_b = \text{const.} > 0$:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \mu_a \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \\ |b(u,p)| &\leq \mu_b \|u\|_V \|p\|_W \quad \forall u \in V, \quad \forall p \in W. \end{aligned}$$

3) LBB (Ladyshenskaja-Babuska-Brezzi)-Bedingung:

$$\exists\ \beta = \text{const.} > 0 : \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_W \quad \forall q \in W,$$

$$\inf_{\substack{q \in W \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V \|q\|_W} \geq \beta = \text{const.} > 0.$$

(inf - sup - Bedingung)

4) V_b-Elliptizität, d.h., $\exists\ \alpha$ und $\alpha' = \text{const.} > 0$:

a) $\sup\limits_{\substack{u \in V_b \\ u \neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_V} \geq \alpha \|v\|_V \quad \forall v \in V_b,$

b) $\sup\limits_{\substack{v \in V_b \\ v \neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_V} \geq \alpha' \|u\|_V \quad \forall u \in V_b,$

wobei $V_b := \{v \in V : b(v,q) = 0 \quad \forall q \in W\} \subset V.$

■ **Bemerkung 3.5:**

1. Falls $a(\cdot,\cdot)$ auf V_b symmetrisch ist, dann fallen Vor. 4a) und 4b) zusammen, und $\alpha = \alpha'$.
2. Aus der Ungleichung

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V_b \tag{3.12}$$

   folgen Vor. 4) mit $\alpha = \alpha'$.
3. In einigen, praktisch wichtigen Beispielen kann $(3.11)_{4)}$ bzw. (3.12) auf ganz V (anstelle V_b) gezeigt werden.

■ **Satz 3.6:**

Vor.:	Die Standardvor. (3.11) seien erfüllt.
Bh.:	Dann besitzt das gemischte VP (3.10) eine eindeutig bestimmte Lösung $(u,p) \in V \times W$.

Beweis: Siehe Vorlesung „Numerische Festkörpermechanik“ [29] und Literatur:

- Originalarbeit:
  [7] Brezzi F.: On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. RAIRO Anal. Numér. 8, R-2, 1974, S. 129 – 151.
- Monographie:
  [8] Brezzi F., Fortin M.: Mixed and Hybrid FEMs. Springer, Berlin, New York, 1991.
- Lehrbücher: [5], [13].

■ **Bemerkung 3.7:**

Falls $a(\cdot,\cdot)$ auf V symmetrisch ist, dann ist das gemischte VP (3.10) äquivalent zu folgendem Sattelpunktproblem

$$\boxed{\text{Gesucht } (u,p) \in V \times W : L(u,q) \leq L(u,p) \leq L(v,p) \quad \forall v \in V, \quad \forall q \in W} \tag{3.13}$$

wobei das Sattelpunktsfunktional $L(\cdot,\cdot) : V \times W \to I\!R^1$ durch die Beziehung

$$L(v,q) = \frac{1}{2}a(v,v) + b(v,q) - < F, v >_V - < G, q >_W \tag{3.14}$$

definiert wird (mms).

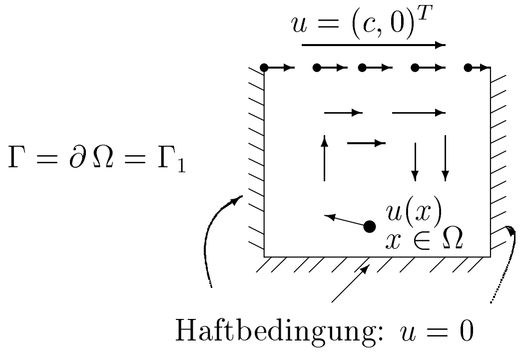
3.2.2 Beispiele

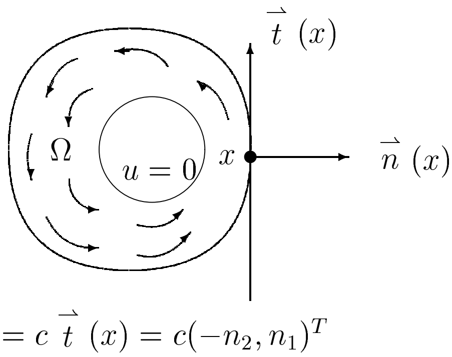
3.2.2.1 Das STOKEsche Problem und das stationäre NAVIER-STOKES-Problem

- **Physikalisches Problem:** STOKES-Problem.

  Gesucht ist das Geschwindigkeitsfeld $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))^T$ und das Druckfeld $p(x),\ x \in \Omega \subset I\!R^m\ \dagger(m = 2, 3)$ einer stationären Strömung eines inkompressiblen viskosen Mediums für kleine Reynoldszahlen bei gegebenen Volumenkräften $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))T$ pro Masseneinheit.

- **Beispiel:** $m = 2$ Driven Cavity Strömung in rotierenden Zylindern





- **Klassische Formulierung:**

(3.15)$_{\text{KF}}$

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\text{Gesucht } u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in X = [C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^m \text{ und} \\
p \in Y = C^1(\Omega): \\
\begin{array}{lll}
-\nu\Delta u(x) + \nabla p(x) & = & f(x),\ \forall x \in \Omega, \\
\text{div } u(x) & = & 0, \quad \forall x \in \Omega \text{ (Inkompressibilität)}, \\
+ \text{ RB: 1. Art} \quad u & = & g \equiv 0 \text{ (o. B. d. Allg., aber } \int\limits_\Gamma g \cdot \vec{n}\, ds = 0).
\end{array}
\end{array}
}
$$

Bemerkung: An Druck p werden keine RB gestellt $\curvearrowright$ nur bis auf Konstante bestimmt !

- **Variationsformulierung:** $\curvearrowright$ ist auf natürliche Art und Weise gemischt:

(3.15)$_{\text{MVF}}$

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\text{Gesucht ist } u \in V = [\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)]^m \text{ und } p \in W = L_2(\Omega)|_{I\!R} = \\
= \{q \in L_2(\Omega) : (q, 1)_0 = 0\}: \\
\begin{array}{llll}
\nu \sum\limits_{i=1}^m \int\limits_\Omega \nabla^T u_i \nabla v_i\, dx - \int\limits_\Omega p \text{ div } v\, dx & = & \sum\limits_{i=1}^m \int\limits_\Omega f_i v_i\, dx & \forall v \in V, \\
\quad \boldsymbol{a(u, v)} \quad + \quad \boldsymbol{b(v, p)} & = & \boldsymbol{< F, v >} & \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \\
-\int\limits_\Omega q \cdot \text{ div } u\, dx & = & 0 & \forall q \in W, \\
\quad \boldsymbol{b(u, q)} & = & \boldsymbol{< G, q >} & \forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{W}.
\end{array}
\end{array}
}
$$

- $\boxed{\textbf{Ü 3.11}}$ *LBB (Lit.) Man zeige, daß die Standardvor. (3.11) für $(3.15)_{\mathrm{MVF}}$ erfüllt sind und damit gemäß Satz 3.6 $\exists$ und ! (p bis auf Konst.) gewährleistet sind ! Der Beweis der LBB–Bedingung ist sehr kompliziert und technisch (siehe Literatur, z.B. [8], [5]. Aber auch dort wird man von einer Literaturstelle zur anderen verwiesen !!)

- **Das stationäre Navier-Stokes Problem:** Re – beliebig, insbesondere $\gg 1$:

$$
\text{(KF)}\quad \left\{
\begin{array}{lcl}
\multicolumn{3}{l}{\text{Gesucht } u \in X \text{ und } p \in Y:}\\
-\nu\Delta u + \underset{\text{nichtlinear !}}{u\nabla u} + \nabla p & = & f \text{ in } \Omega,\\
\operatorname{div} u & = & 0 \text{ in } \Omega,\\
u & = & 0 \text{ auf } \Gamma.
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{(MVF)}\quad \left\{
\begin{array}{l}
\text{Gesucht } u \in V \text{ und } p \in W:\\
\nu \int\limits_\Omega \nabla^T u \nabla v\, dx + \int\limits_\Omega (u\nabla u)^T v\, dx - \int\limits_\Omega p \operatorname{div} v\, dx = \int\limits_\Omega f^T v\, dx \quad \forall v \in V,\\
-\int\limits_\Omega q \operatorname{div} u\, dx \qquad = 0 \quad \forall q \in W.
\end{array}
\right.
$$

3.2.2.2 Eine gemischte Variationsformulierung des 1. biharmonischen RWP

- **Idee:**

$$
\boxed{\begin{array}{rcl}
\Delta^2 u & = & f \text{ in } \Omega,\\
u & = & 0 \text{ auf } \Gamma,\\
\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & = & 0 \text{ auf } \Gamma,\\
\multicolumn{3}{l}{\Omega \subset I\!R^2 \ \dagger.}
\end{array}}
\longrightarrow
\boxed{\begin{array}{rcl}
w - \Delta u & = & 0 \text{ in } \Omega, \ \bullet\\
-\Delta w & = & -f \text{ in } \Omega, *\\
u & = & 0 \text{ auf } \Gamma,\\
\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & = & 0 \text{ auf } \Gamma.
\end{array}}
\qquad
\begin{array}{l}
\int\limits_\Omega \bullet\, v\, dx \quad \forall v \in V\\
\int\limits_\Omega *\, q\, dx \quad \forall q \in W\\
V = W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)\\
W = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)
\end{array}
$$

$\leftarrow$ natürliche RB

$$
\bullet \ \int\limits_\Omega w \cdot v\, dx + \int\limits_\Omega \nabla^T u \nabla v\, dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, v\, ds = 0 \quad \forall v \in V = W_2^1(\Omega),
$$

$$
* \ \int\limits_\Omega \nabla^T w \nabla q\, dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \cdot \underset{\overset{\|}{0}}{q}\, ds = -\int\limits_\Omega f q\, dx \quad \forall q \in W = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).
$$

- **Gemischte Variationsformulierung** ([10] P.G. Ciarlet & P.A. Raviart, 1974):

(3.16) $\| >$ (3.10)

$$
\boxed{\begin{array}{lclcll}
\multicolumn{6}{l}{\text{Gesucht } w \in V = H^1(\Omega) \text{ und } u \in W = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega):}\\
\int\limits_\Omega w \cdot v\, dx & + & \int\limits_\Omega \nabla^T u \nabla v\, dx & = & 0 & \forall v \in V,\\
\boldsymbol{a(w,v)} & + & \boldsymbol{b(v,u)} & = & \boldsymbol{< F, v >_V}, & \\
\int\limits_\Omega \nabla^T w \nabla\, dx & & & = & -\int\limits_\Omega f q\, dx & \forall q \in W,\\
\boldsymbol{b(w,q)} & & & = & \boldsymbol{< G, q >_W}, & \\
\multicolumn{6}{l}{\text{mit } f \in L_2(\Omega) \text{ gegeben.}}
\end{array}}
$$

■ **Bemerkung 3.8:**

1. RB $u = 0$ auf $\Gamma \to$ wesentlich in (3.16),
   $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ auf $\Gamma \to$ natürlich in $(3.16)_{\text{1. Variationsgleichung}}$.
2. Standardvor. $(3.11)_{1)-3)}$ sind offenbar erfüllt (mms), aber <u>nicht</u> $(3.11)_{4)} = (3.12)$ ($a(\cdot,\cdot)$ ist symmetrisch), da $\nexists\, \alpha = \text{const.} > 0 : a(v,v) = \|v\|^2_{0,\Omega} \geq \alpha \|v\|^2_{1,\Omega}$ $\forall v \in V_b$.

   Dennoch kann $\exists!$ der Lösung $(w,u) \in V \times W$ gezeigt werden (siehe [10]).
3.

<u>Vorteile:</u>	<u>Nachteile:</u>
• Nur Ableitung 1. Ordnung	• Skalare PDgl. 4. Ordnung $\downarrow$ System 2 PDgl. 2. Ordnung
• $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ wird natürliche RB	• Diskretes Problem ist indefinit
• Funktion $w = \Delta u$ ($\stackrel{\triangle}{=}$ Biegemoment bzw. Wirbelstärke) wird sofort mitgerechnet	
• FEM-Galerkin-Diskretisierung mit C^0-Elementen möglich, z.B. Lagrange-Elemente.	

3.2.2.3 Gemischte Variationsformulierung des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung

■ **Idee:**

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega, \\ \Omega &\subset I\!R^m \ \dagger. \end{aligned}} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \sigma - \nabla u &= 0 \text{ in } \Omega \ \bullet \\ \operatorname{div} \sigma &= -f \text{ in } \Omega \ * \\ u = 0 &\text{ auf } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &\int_\Omega \bullet\, \tau\, dx \quad \forall \tau \in V \\ &\int_\Omega *\, q\, dx \quad \forall q \in W \end{aligned}$$

$\leftarrow$ natürliche RB

$$\begin{aligned} \bullet \ &\int_\Omega \sigma^T \tau\, dx + \int_\Omega u \operatorname{div} \tau - \int_\Gamma u \cdot \tau^T \vec{n}\, ds = 0 \quad \forall \tau \in V, \\ * \ &\int_\Omega \operatorname{div} \sigma \cdot q\, dx = -\int_\Omega f q \cdot dx \quad \forall q \in W. \end{aligned}$$

<u>Räume:</u> $V = \{\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)^T \in [L_2(\Omega)]^m : \exists \operatorname{div} \tau \in L_2(\Omega)] = H(\operatorname{div}, \Omega)$
mit $\|\tau\|^2_V = \sum_{i=1}^m \|\tau_i\|^2_{0,\Omega} + \|\operatorname{div} \tau\|^2_{0,\Omega}$ (siehe [26], Numerik I, Kap. 3),
$W = L_2(\Omega)$ mit $\|u\|_W = \|w\|_{0,\Omega}$.

■ <u>**Gemischte Variationsformulierung:**</u>

(3.17)
$$\boxed{\begin{array}{lclcll} \multicolumn{6}{l}{\text{Gesucht } \sigma \in V \text{ und } u \in W:} \\ \int\limits_\Omega \sigma^T \tau \, dx & + & \int\limits_\Omega u \text{ div } \tau \, dx & = & 0 & \forall \tau \in V, \\ \boldsymbol{a(\sigma,\tau)} & + & \boldsymbol{b(\tau,u)} & = & \boldsymbol{< F, v >_V}, & \\ \int\limits_\Omega q \text{ div } \sigma \, dx & & & = & -\int\limits_\Omega f q \, dx & \forall q \in W, \\ \boldsymbol{b(\sigma,q)} & & & = & \boldsymbol{< G, q >_W}. & \end{array}}$$

■ <u>**Bemerkung 3.9:**</u>

1. RB $u = 0$ auf $\Gamma \to$ natürliche RB in $(3.17)_{1.\text{ Variationsgleichung}}$.
2. Standardvor. $(3.11)_{1)-4)}$ sind erfüllt (siehe z.B. [8] S. 43 und S. 135 ff).
3. Übertragung auf Elastizitätsproblem

   (3.18)
   $$\boxed{\begin{array}{l} -\text{ div } \sigma = f \\ \sigma - D\epsilon(u) = 0 \end{array}}$$

   Siehe [28], [5], [19].
4. <u>Vorteile:</u>
   - $u = 0$ auf Γ ist natürliche RB !
   - $\sigma = \nabla u$ wird als praktisch interessante Größe gleich mitberechnet !
   - später: $V_h \subset V$, $W_h \subset W$ ↬ Galerkin–Methode ↬ gemischte FEM !

   <u>Nachteile:</u>
   - Skalare PDgl. 2. Ordnung $\to$ System $(m+1)$ PDgl. 1. Ordnung !
   - Diskrete Probleme sind indefinit !

3.3 Die duale Variationsformulierung

3.3.1 Die abstrakte Theorie

■ Betrachten zunächst das **Minimumproblem** (siehe [26] Numerik I, Punkt 2.3)

$(3.19)_{\text{MP}}$
$$\boxed{\text{Gesucht } u \in V_g : J(u) = \inf_{v \in V_g} J(v)}$$

mit dem primalen Energiefunktional (Ritz-Funktional)

(3.20)
$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - < F, v >$$

und setzen voraus, daß

(3.21)
$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ V_g = g + V_0 = \{u \in V : u = g + v,\ v \in V_0\} \subset V \text{ – Hyperebene;} \\ \bullet\ V_0 \subset V \text{ – abgeschlossener UR des } H\text{-Raums } V,\ \|\cdot\|,\ (\cdot,\cdot); \\ \bullet\ \text{Standardvoraussetzungen (siehe Punkt 3.1.1);} \\ \bullet\ a(\cdot,\cdot) \text{ ist auf } V \text{ symmetrisch.} \end{array} \right.$$

Dann ist das MP $(3.19)_{\mathrm{MP}}$ gemäß Satz I.2.10 ([26] Numerik I) zum VP

$$(3.19)_{\mathrm{VP}} \qquad \boxed{\text{Gesucht } u \in V_g : a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0}$$

äquivalent und besitzt gemäß Lax & Milgram-Satz I.2.9 ([26] Numerik I) eine eindeutig bestimmte Lösung $u_* \in V_g$.

- Das zu $(3.19)_{\mathrm{MP}} = (3.19)_{\mathrm{VP}}$ **duale Variationsproblem** kann wie folgt formuliert werden:

$$(3.19)_{\mathrm{DVP}} \qquad \boxed{\text{Gesucht } w \in W : G(w) = \sup_{v \in W} G(v)}$$

mit dem dualen (komplementären) Energiefunktional (Trefftz-Funktional)

$$(3.22) \qquad G(v) = -\frac{1}{2}\, a(v,v) + a(g,v) - < F, g >$$

und der linearen Mannigfaltigkeit W aller Lösungen von $(3.19)_{\mathrm{VP}}$ in V, d.h.,

$$(3.23) \qquad W = \{\bar{w} + v_0 : v_0 \in U_0\} = \{w \in V : a(w,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0\}$$

$$\hookrightarrow U_0 = \{v_0 \in V : a(v_0, v) = 0 \quad \forall v \in V_0\}$$

$$\hookrightarrow \bar{w} \in V : a(\bar{w}, v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0$$

- **Dann erhält man durch elementare Rechnung** (mms)

$$(3.24) \qquad \begin{aligned} 0.5\,|v-w|^2 &= J(v) - G(w) \quad \forall v \in V_g, \ \forall w \in W, \\ 0.5\,|v-u_*|^2 &= J(v) - J(u_*) \quad \forall v \in V_g, \\ 0.5\,|w-u_*|^2 &= J(u_*) - G(w) \quad \forall w \in W, \\ W \cap V_g &= \{u_*\}, \end{aligned}$$

wobei $|\cdot|^2 = a(\cdot,\cdot)$ die Energienorm bezeichnet.
Demzufolge werden Maximum bzw. Minimum des Trefftz- bzw. Ritz-Funktionals genau für $\boxed{v = w = u_*}$ angenommen, und es gilt der starke Dualitätssatz:

$$(3.25) \qquad \max_{w \in W} G(w) = G(u_*) = J(u_*) = \min_{v \in V_g} J(v).$$

3.3.2 Beispiel: Dirichlet-Problem für Poisson-Gleichung

- **Betrachten Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung**

$(3.26)_{\mathrm{KF}}$ $\quad \boxed{-\Delta u = f \text{ in } \Omega \subset I\!R^m, \;\; u = 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega}$

$\Rightarrow V = H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega),\;\; V_g = V_0 = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, da $g = 0$!

$(3.26)_{\mathrm{MP}}$ Gesucht $u \in V_0$: $\quad J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int\limits_\Omega f v\, dx \to \min$!

$\Updownarrow$

$(3.26)_{\mathrm{VP}}$ Gesucht $u \in V_0$: $\quad \int\limits_\Omega \nabla^T u \nabla v\, dx = \int\limits_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in V_0$

$\Updownarrow$

$(3.26)_{\mathrm{DVP}}$ Gesucht $w \in W$: $\quad G(w) = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla w|^2\, dx \to \max$!

$$\begin{aligned} \downarrow \\ W &= \{w \in H^1(\Omega) : \int\limits_\Omega \nabla^T w \nabla v\, dx = \int\limits_\Omega f v\, dx \\ &\qquad \forall v \in V_0 = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\} \\ &= \{w \in H^1(\Omega) : -\operatorname{div} \nabla w = f \text{ im verall–} \\ &\qquad \text{gemeinerten Sinne}\} \text{ ! Keine RB !} \end{aligned}$$

$\Updownarrow \leftarrow \boxed{\sigma = \nabla u}$

$(3.26)_{\mathrm{DP}}$ Gesucht $\sigma \in W(f) : G(\sigma) = \sup\limits_{\tau \in W(f)} G(\tau)$

mit $G(\tau) = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\tau|^2\, dx$,

$W(f) = \{\tau \in H(\mathrm{div}, \Omega) : -\mathrm{div}\,(\tau) = f \text{ in } \Omega\}$,

$H(\mathrm{div}, \Omega) = \{\tau \in [L_2(\Omega)]^m : \mathrm{div}\,(\tau) \in L_2(\Omega)\}$

(vergleiche Punkt 3.1 ([26] Numerik I)).

- **Bemerkung 3.10:**

1. $(3.26)_{\mathrm{MP}} : V_0\ (= V_g) \to$ Wesentliche RB müssen erfüllt werden !

   $(3.26)_{\mathrm{DVP}}$ bzw. $(3.26)_{\mathrm{DP}} : W \to$ PDgl. muß im verallgemeinerten Sinn erfüllt werden !!!

2. primal $\to$ gemischt $\leftarrow$ dual.

   Lagrange Funktional:

$$\mathcal{L}(\tau, q) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\tau|^2\, dx + \int\limits_\Omega q(\mathrm{div}\,(\tau) + f)\, dx$$

Kapitel 4

Einführung in die Galerkin FEM für RWA

- **Lehrbücher:** [9] Ciarlet (FEM–Standardwerk), [5], [13], [15], [22], [36].

4.1 FEM = Galerkin-Ritz-Verfahren mit speziellen Ansatzfunktionen

- **Ausgangspunkt:** 1. Variationsformulierung $(4.1)_{\mathrm{VF}}$ bzw. Minimumproblem $(4.1)_{\mathrm{MP}}$.
  2. Galerkin-Ritz-Verfahren.

$\to$ $\boxed{\text{Wiederholung Numerik I [26]}}$

$$V_h = \{v_h = \sum_{i\in\bar{\omega}_h} v^{(i)} p^{(i)}(x)\} \subset \underbrace{V}_{\text{Grundraum}} = W_2^1(\Omega) \quad \text{(für skalare PDgl. 2. Ordnung)},$$

(1) $$V_{gh} = g_h + V_{0h} = \{v_h = \underbrace{\sum_{i\in\gamma_h} u_*^{(i)} p^{(i)}(x)}_{\sum_{i\in\gamma_h}|_{\Gamma_1}=g_1} + \sum_{i\in\omega_h} v^{(i)} p^{(i)}(x)\} \subset V_g \subset V,$$

$$V_{gh} \Subset V_g \cap V_h \qquad p^{(i)}(x)|_{\Gamma_1} = 0, i \in \omega_h \qquad \text{Hyperebene}$$

(1) $$V_{0h} = V_h \cap V_0 = \{v_h = \sum_{i\in\omega_h} v^{(i)} p^{(i)}(x)\} \subset V_0 \subset V.$$

(4) $$= \operatorname{span}\{p^{(i)} : i \in \omega_h\} \qquad \text{unendlichdimensionaler UR}$$

(primale) Variationsformulierung		Minimumproblem	
$(4.1)_{\text{VF}}$: $u \in V_g : a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_0$	$\Longleftrightarrow$ ($a(\cdot,\cdot)$ sym., p.d.)	Ges. $u \in V_g : J(u) = \inf\limits_{v \in V_g} J(v)$	$(4.1)_{\text{MP}}$
$\downarrow$ $V_{gh} \subset V_g$, $V_{0h} \subset V_0$		$\downarrow$ $V_{gh} \subset V_g$	
Galerkin		Ritz	
$(4.1)_h$: $u_h \in V_{gh} : a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_{0h}$	$\Longleftrightarrow$	Ges. $u_h \in V_{gh} : J(u_h) = \min\limits_{v_h \in V_{gh}} J(v_h)$	
$v_h = p^{(k)}$, $k \in \omega_h$	$u_h = \sum\limits_{i \in \omega_h} \mathbf{u}^{(\mathbf{i})} p^{(i)} + \sum\limits_{i \in \gamma_h} u_*^{(i)} p^{(i)}$	$\frac{\partial J(\underline{u}_h)}{\partial u^{(k)}} = 0, k \in \omega_h$	

Galerkin-Ritz-System = endlichdimensionales GS

(2) Ges. $\underline{u}_h = [\mathbf{u}^{(\mathbf{i})}]_{i \in \omega_h} \in I\!R^{N_h}$: $\sum\limits_{i \in \omega_h} \mathbf{u}^{(\mathbf{i})} a(p^{(i)}, p^{(k)}) = \langle F, p^{(k)} \rangle - \sum\limits_{i \in \gamma_h} u_*^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)}), k \in \omega_h$

(3) $(\underline{4.1})_h$ $\qquad K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$

- **Hauptschwierigkeiten des klassischen (→ Ansatzfunktion mit globalen Trägern) Galerkin-Verfahrens:**

  1. Konstruktion von $V_{0h} \subset V_0$ und $V_{gh} \subset V_g$,
  2. Aufbau des Galerkin-Ritz-Systems $(\underline{1})_h$,
  3. Speicherung und Auflösung von $(\underline{1})_h$,
  4. Limitierte Vollständigkeit der Familie $\{V_{0h}\}_{h \in \Theta}$ in V_0.

  Beispiel mit Hilbertmatrix: Ges. $u \in V = L_2(0,1) : \int\limits_0^1 uv\,dx = \int\limits_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in V$

  mit $V_h = \text{span}\,\{x^i : i = 0, 1, \ldots, n-1\}$:

  $$\Longrightarrow K_h = \left[\frac{1}{i+j+1}\right]_{i,j=\overline{0,n-1}}$$

  $=$ Hilbertmatrix ↷ extrem schlecht konditioniert !

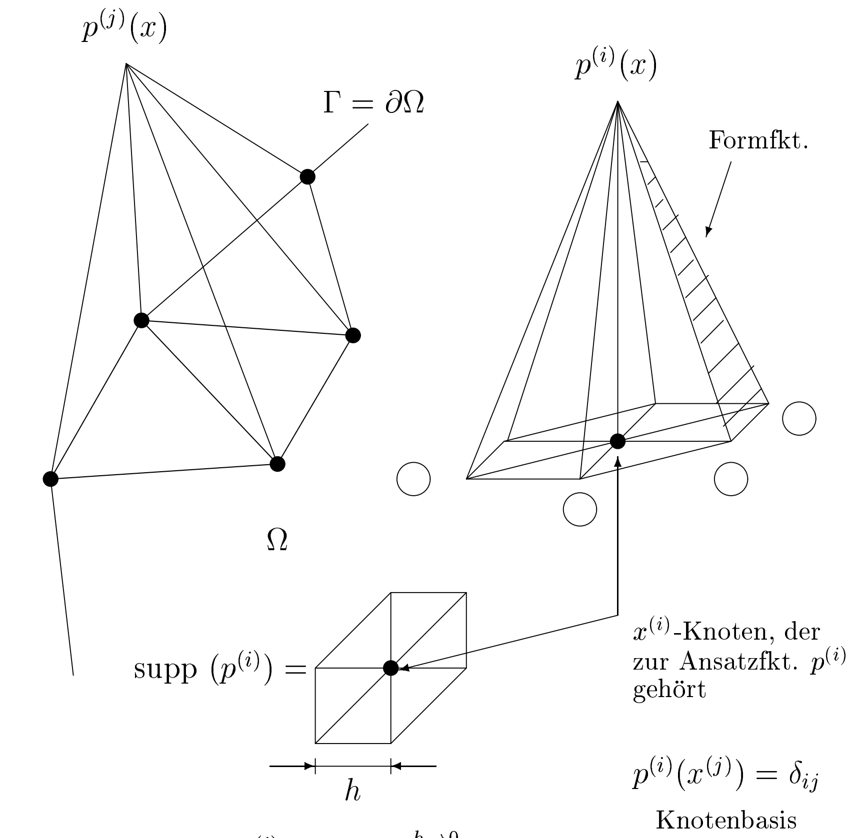
- **Idee:** Die grundlegende Idee zur prinzipiellen Überwindung der Hauptschwierigkeiten des klassischen Galerkin-Verfahrens (d.h. Verwendung von Ansatzfunktion mit globalen Trägern: z.B. Polynomen) stammt zumindestens aus einer strengeren mathematischen Sichtweise von Richard COURANT (1943) [11]:

  "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations"
  Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943), 1-23.

  > "If the variational problems contain derivatives not higher than the first order the method of finite difference can be subordinated to the Rayleigh-Ritz method by considering in the competition only functions ϕ which are linear in the meshes of a sub-division of our net into triangles formed by diagonals of the squares of the net. For such polyhedral functions the integrals become sums expressed by the finite number of values of ϕ in the net-points and the minimum conditions become our difference equations. **Such an interpretation suggests a wide generalization which provides great flexibility and seems to have considerable practical value. Instead of starting with a quadratic or rectangular net we may consider from the outset any polyhedral surfaces with edges over an arbitrarily chosen (preferably triangular) net.** Our integrals again become finite sums, and the minimum condition will be equations for the values of ϕ in the net-points. While these equations seem less simple than the original difference equations, we gain the enormous advantage of better adaptability to the data of the problem and thus we can often obtain good results with very little numerical calculation."

  und wurde in der Mitte der 50-er Jahre von Ingenieuren ([1] J.H. Argyris, 1955 ff; [38] M. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp 1956 ff; u.a. ...;) neu entdeckt (siehe [3] zu einem historischen Überblick zur FEM):

  $\Rightarrow$ Verwendung von Ansatzfunktion (Testfunktion) $p^{(i)} = p^{(i)}(x)$ mit lokalen Trägern, wobei die $p^{(i)}$ elementweise über Formfunktion definiert werden können:

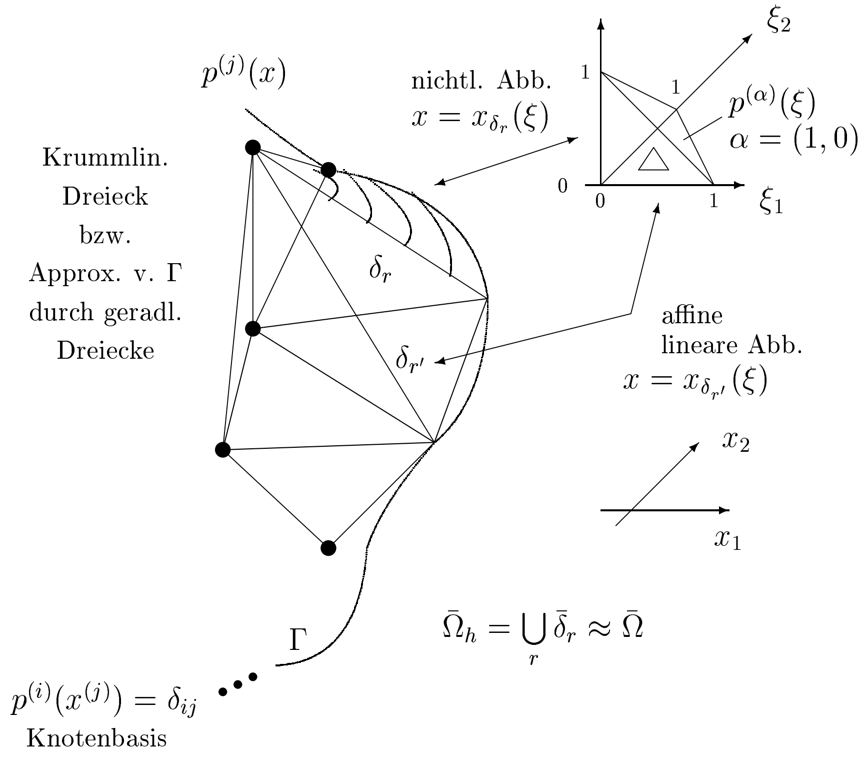


$$\text{diam supp } (p^{(i)}) = O(h) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{meas supp } (p^{(i)}) = O(h^2) \longrightarrow 0$$

$\boxed{\text{Nu I}}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u_h(x) = \sum_{i\in\bar{\omega}_h} \underset{\substack{\| \\ u_h(x^{(i)})}}{u^{(i)}}\, p^{(i)}(x) \in W_2^1(\Omega) \cap C^0(\Omega) \qquad (C^0\text{-Elemente !})}$$



- **dadurch:**

1. Große Flexibilität bei der Erfüllung der wesentlichen RB: ↴ 1
2. Wegen der Lokalität der Träger der Basisfunktion ist offenbar

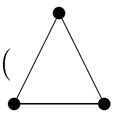
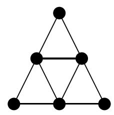
$$a(p^{(i)}, p^{(k)}) = 0, \text{ falls } \operatorname{supp}(p^{(i)}) \cap \operatorname{supp}(p^{(k)}) = \emptyset.$$

   Folglich ist die Systemmatrix (= Steifigkeitsmatrix) K_h schwach besetzt:
   ↴ 2 3
3. Die Integrale zur Berechnung der Steifgkeitsmatrix K_h und des Lastvektors $\underline{f}_h$ können <u>elementweise</u> ausgewertet werden: ↴ 2

$$\bar{\Omega} \stackrel{=}{\approx} \bar{\Omega}_h = \bigcup_r \bar{\delta}_r \text{ ↴}$$

$$\int\limits_{\Omega_h} (\ldots)\, dx = \sum_r \int\limits_{\delta_r} (\ldots)\, dx = \sum_r \int\limits_{\Delta} (\ldots)|J_r|\, d\xi \approx \ldots .$$

   ↗ Element der Vernetzung $\underset{x = x_{\delta_r}(\xi)}{\overset{\xi = \xi_{\delta_r}(x)}{\rightleftarrows}}$ ↖ Basiselement ↖ Quadraturformel (QF)

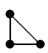
4. „Limitierte Vollständigkeit“ der erzeugten Räume V_{0h} ( →  !) ist relativ einfach überprüfbar: ↴ 4

- **Bezeichnung:**

$\mathcal{F}_\Delta \equiv \mathcal{F}(\Delta) := \{\sum_{\alpha \in A} v^{(\alpha)} p^{(\alpha)}(\xi) : \xi \in \bar{\Delta}\}$ – von den Formfunktionen aufgespannter Raum;

$\mathcal{P}_k := \{\sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha \xi^\alpha\}$ – Raum der Polynome k-ten Grades;

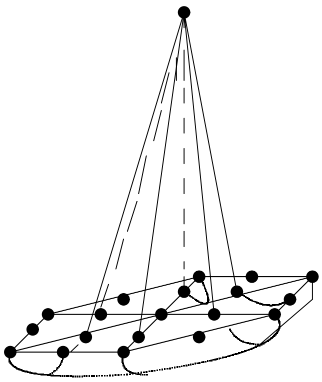
$Q_k := \{\sum_{|\alpha_i| \le k} c_\alpha \xi^\alpha\}$ – Raum der Polynome k-ten Grades in jeder Koordinate;

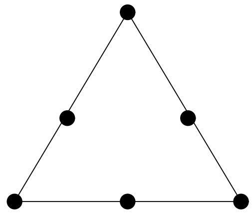
$\Delta =$  (Courant-Element): $\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{P}_1 \subset Q_1$.

■ <u>**Bemerkung 4.1:**</u> $\rightarrow$ Verallgemeinerung auf (siehe Courant !):

1. Ansatzfunktionen höherer Ordnung auf Dreieckselementen:
   (a) quadratisches Element:

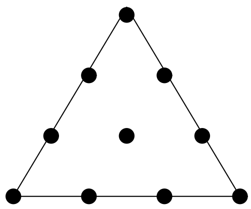
   $\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2\}$





   (b) kubisches Element:

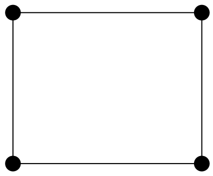
   $\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{P}_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 x^2 y + a_8 x^2 y + a_9 y^3\}$:



   (c) allgemein: Lagrange Dreieckselemente p-ter Ordnung:

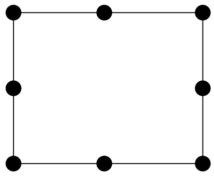
   $\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{P}_p \quad \Rightarrow \quad \boxed{C^0\text{-Elemente}}$

2. andere Elemente, z.B. Viereckselemente (C^0-Elemente):



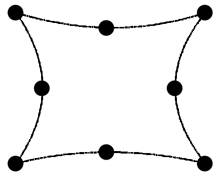
bilineares Element
$\mathcal{F}_\Delta = Q_1$

allg.: $\mathcal{F}_\Delta = Q_p$



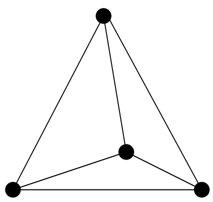
SERENDIPITY-Element
(2. Ordnung)
$\mathcal{F}_\Delta \subset Q_2$

$\mathcal{F}_\Delta \subset Q_p$

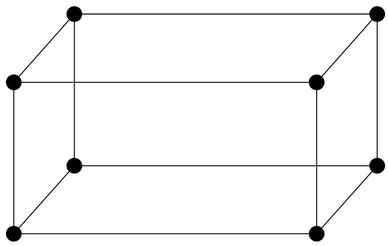


isoparametrisches
SERENDIPITY-Element 2. Ordnung
$x = x_{\delta_r}(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in A} x^{(i_\alpha)} p^{(\alpha)}(\xi)$

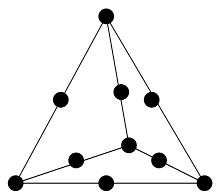
3. 3D-Elemente (C^0-Elemente):



lineares Tetraederelement
$\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{P}_1$

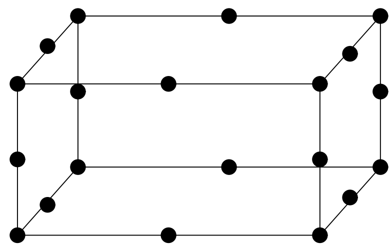


Trilineares Quaderelement
HK 24 Hexaeder
$\mathcal{F}_\Delta = Q_1$



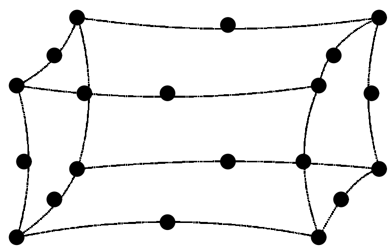
quadratisches
Tetraederelement

$\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{P}_2$



quadratisches SERENDIPITY-Element
HK 60 : $\mathcal{F}_\Delta \subset Q_2$

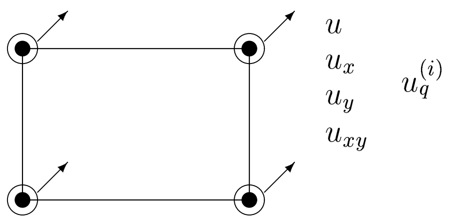
$\downarrow\uparrow \quad x = x_{\delta_r}(\xi) = \sum_{\alpha \in A} x^{(i_\alpha)} p^{(\alpha)}(\xi)$



Isoparametrisches SERENDIPITY-Element
2. Ordnung

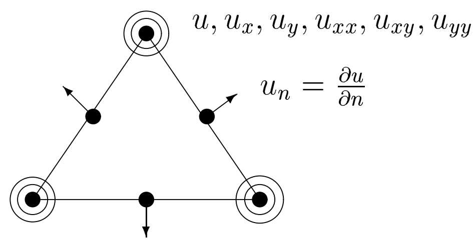
4. höhere Glattheit z.B. C^1-Elemente für PDgl. 4. Ordnung:

(a) Hermite-Element



$\mathcal{F}_\Delta = Q_3$

(b) Argyris-Ženyžek-Element



$\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{P}_5$

4.2 Die Aufstellung des FEM-Galerkin-Schemas am Beispiel der linearen Dreieckselemente

4.2.1 Modellproblem

- **Betrachten ebenes Wärmeleitproblem als Modellbeispiel:**
  (vergleiche Punkt I.4.3 (Numerik I [26]) und Kapitel 1 dieser Vorlesung)

  $\Rightarrow$ **Variationsformulierung:**

(4.1)
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } u \in V_g = \{v \in V = W_2^1(\Omega) : v = g_1 \text{ auf } \Gamma_1\}: \\ a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0 = \{v \in V : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}, \\ \text{mit } \; a(u,v) = \int\limits_{\Omega} (\lambda(x) \nabla^T u \nabla v + a(x) uv)\, dx + \int\limits_{\Gamma_3} \kappa uv\, ds, \\ \qquad\; < F, v > = \int\limits_{\Omega} f v\, dx + \int\limits_{\Gamma_2} g_2 v\, ds + \int\limits_{\Gamma_3} g_3 v\, ds, \\ \qquad\; \Omega \subset \mathbb{R}^2 \;\dagger, \Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1}, \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3 = \Gamma, \end{array}}$$

unter den Voraussetzungen:

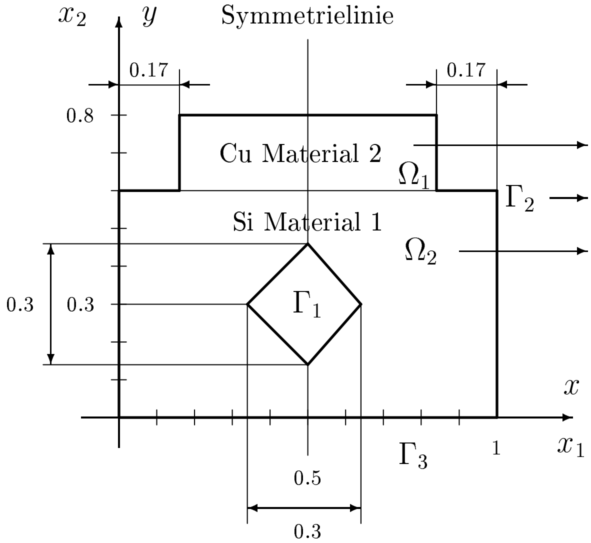
(4.2)
$$\left\{ \begin{array}{ll} 1) & \lambda \in L_\infty(\Omega) : \exists\, \underline{\lambda},\, \bar{\lambda} = \text{const.} > 0 : \underline{\lambda} \le \lambda(x) \le \bar{\lambda} \quad \forall \text{ f. ü. } x \in \Omega, \\ 2) & a \in L_\infty(\Omega) : a(x) \ge 0 \quad \forall \text{ f. ü. } x \in \Omega, \\ 3) & \kappa \in L_\infty(\Gamma_3) : \kappa(x) \ge 0 \quad \forall \text{ f. ü. } x \in \Omega, \\ 4) & f \in L_2(\Omega), \\ 5) & g_2 \in L_2(\Gamma_2),\; g_3 \in L_2(\Gamma_3), \\ 6) & g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1),\; \text{d.h.}, \exists\, \tilde{g}_1 \in H^1(\Omega) : \tilde{g}_1|_{\Gamma_1} = g_1, \\ 7) & \Omega \subset \mathbb{R}^2 \;\dagger,\; \Gamma = \partial\,\Omega \in C^{0,1},\; \text{meas}_1(\Gamma_1) > 0. \end{array} \right.$$

- $\boxed{\textbf{Ü 4.1}}$ Geben Sie die zu (4.1) gehörende klassische Formulierung an !

  $\boxed{\textbf{Ü 4.2}}$ Man zeige, daß die Voraussetzungen des Lax-Milgram-Satzes I.2.9 (Numerik I [26]) erfüllt sind !

  Hinweis: Homogenisieren !
  $\Rightarrow \exists!\, u \in V_g$: (4.1) #

■ **Konkretes Beispiel:** **CHIP**



- $f \equiv 0$ (keine Wärmequellen),
- $a \equiv 0$ (kein Wärmeaustausch in z-Richtung),

$\lambda(x) = \lambda_2 = \lambda_{\text{Cu}} = 3.95 \left[\frac{W}{\text{cm}\,K}\right]$ (Kupfer),

Interface

$\lambda(x) = \lambda_1 = \lambda_{\text{Si}} = 0.01 \left[\frac{W}{\text{cm}\,K}\right]$ (Silikat),

Γ_1: $g_1 = \text{const.} = 500\,K$,

Γ_2: $g_2 = 0$ (Isolation),

Γ_3: $\frac{\partial u}{\partial N} := \lambda_{\text{Si}} \frac{\partial u}{\partial n} = -\lambda_{\text{Si}} \frac{\partial u}{\partial y} = \kappa(u_A - u)$,

$\kappa = 0.2 \left[\frac{W}{\text{cm}^2\,K}\right]$,

$u_A = 300\,K$.

Bemerkungen zum Beispiel:

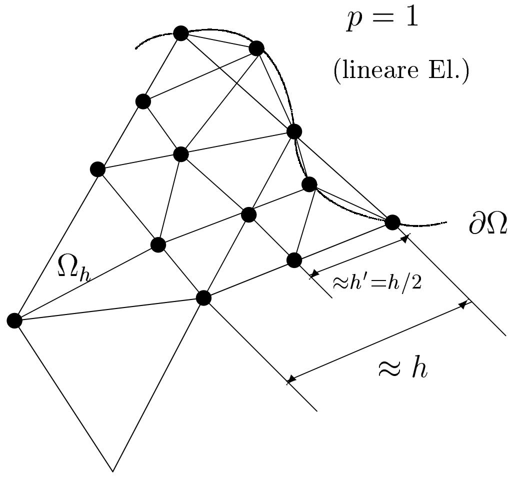
1. $\exists !\ u \in V_g$: (4.1) ist für gegebene Daten gesichert, da Vor. (4.2) erfüllt sind (vgl. Ü 4.2).
2. „Knick“ der Lösung am Interface, d.h., $u \notin W_2^2(\Omega)$, sondern nur $u \in W_2^{1+s}(\Omega)$ mit $s < \frac{1}{2}$.
3. Regularitätsverlust auch bei
   - Ecken in Γ, insbesondere Innenwinkel $> \pi$,
   - Wechsel der Randbedingungen,
   - Knicke im Interface,
   - Interface kommt auf Γ.

4.2.2 Gebietsdiskretisierung (Triangularisierung)

■ Wir zerlegen das Gebiet Ω, in dem die Lösung der RWA (4.1) gesucht wird, in finite Elemente $\delta^{(r)}$, z.B. in „kleine“ Dreiecke: $\to$ **Triangulation** $\tau_h = \{\delta_r : r \in I\!R_h\}$:

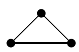
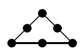
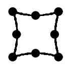
1. $\bar{\Omega} = \bigcup\limits_{r \in I\!R_h} \bar{\delta}_r$ bzw. $\bar{\Omega}_h = \bigcup\limits_{r \in I\!R_h} \bar{\delta}_r \xrightarrow{h \to 0} \bar{\Omega}$,

$$|\partial\Omega - \partial\Omega_h| = O(h^{p+1})$$
$$p = 1$$
(lineare El.)

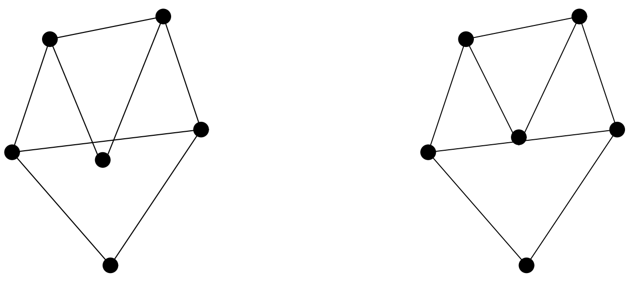


2. $\bar{\delta}_r \cap \bar{\delta}_{r'} = \begin{cases} \emptyset & \\ \text{Dreieckskante} & \left.\right\} \text{beider} \\ \text{Eckknoten} & \left.\right\} \text{Dreiecke} \end{cases}$

$\forall r, r' \in I\!R_h : r \neq r';\ \forall h \in \Theta.$

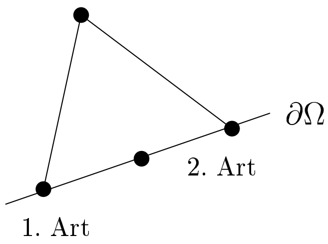
- **Art der Zerlegung** von Ω ist u.a. abhängig von
  - Beschaffenheit des Gebietes : $\partial\Omega$ Polygonenzug, überstumpfe Ecken, krummlinig, ...,
  - Eingangsdaten der RWA : unstetige Koeffizienten (Interface), RS, RB, ...,
  - Art der verwendeten Elemente : $\rightarrow$ Elementkatalog:  ,  , ... ,  , ... ,
  - gewünschte Genauigkeit : $\stackrel{\nearrow}{\rightarrow}$ Feinheit der Vernetzung: h.

- <u>**Generelle Hinweise für die Generierung einer Vernetzung:**</u>
  - unzulässige Vernetzung:

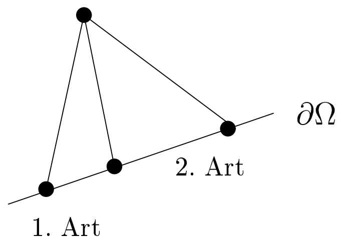


– Vernetzung bei Wechsel des Typs der RB:

falsch

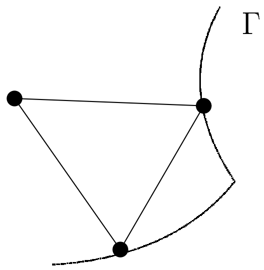


richtig

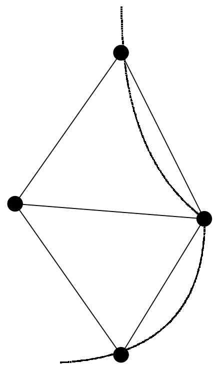


– Vernetzung bei Knickpunkten in $\Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1}$:

falsch

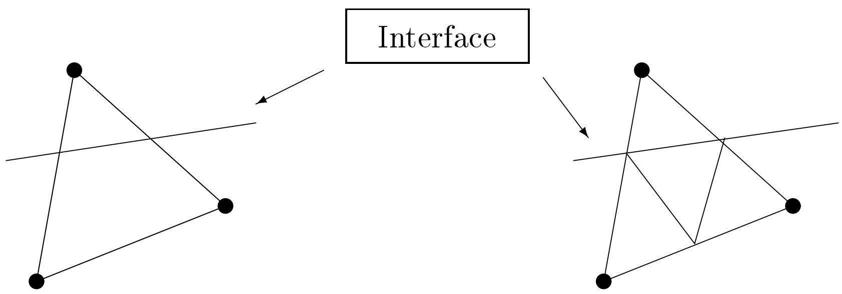


richtig

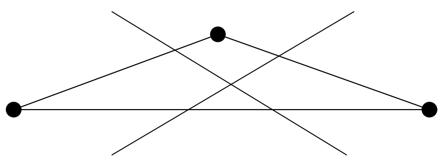


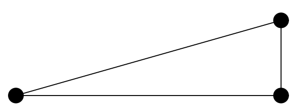
– Vernetzung am Interface:

falsch richtig



– Vermeidung zu spitzer bzw. zu stumpfer Winkel:





$\Rightarrow$ Begriff der regulären Dreiecksvernetzung:

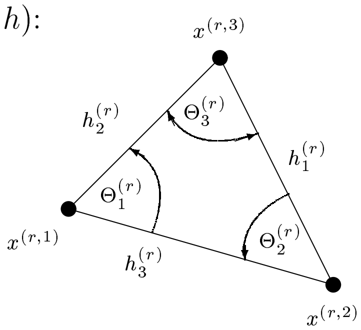
(4.3)

$\exists\ \alpha_0, \Theta_0 = \text{const.} > 0$ (unabhängig von h):

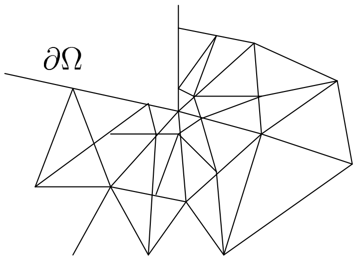
$\alpha_0 h \leq h_1^{(r)}, h_2^{(r)}, h_3^{(r)} \leq h,$

$0 < \Theta_0 \leq \Theta_1^{(r)}, \Theta_2^{(r)}, \Theta_3^{(r)} \leq \pi - \Theta_0,$

$\forall r \in I\!R_h\ \forall h = \max\limits_{r,\alpha} h_\alpha^{(r)} \leq h_0 : h \in \Theta.$

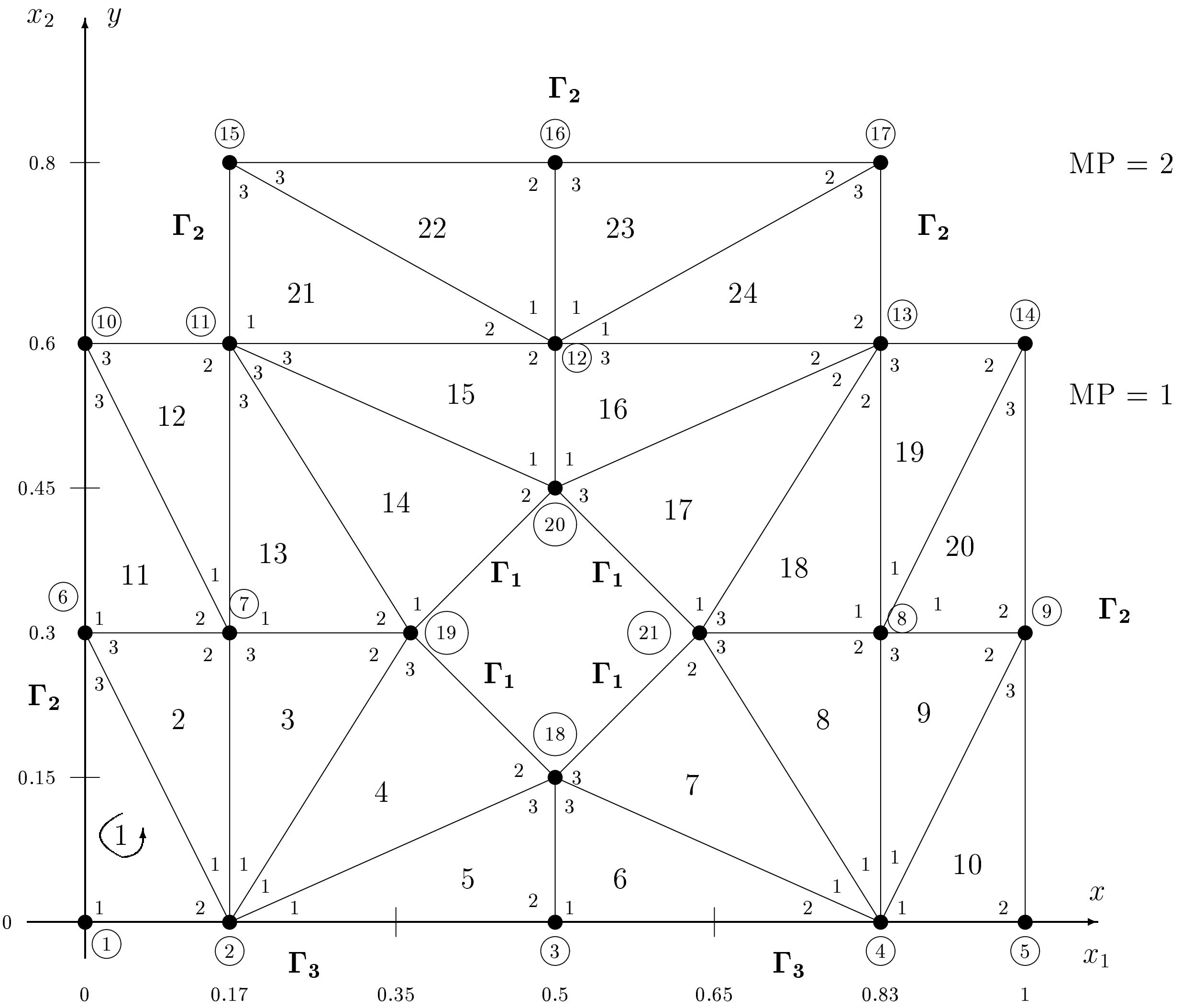


– Aber lokale Netzverfeinerung bei sich stark ändernden ∇u,



- überstumpfe Innenwinkel ($\Theta > \pi$): z.B. $u(x,y) = cr^\alpha \sin\varphi + \ldots$ mit $\alpha = \pi/\Theta$ im Falle von Dirichlet–RB,
- Interface-Knicke, Interface $\not\rightarrow$ Rand,
- RB-Wechsel,
- Grenzschichten,
- starke Änderungen in RS etc.

■ **Diskretisierung des Gebietes Ω aus dem Beispiel CHIP (Punkt 4.2.1):**



$\Longrightarrow$ siehe Vernetzungsfile CHIP.NET für FEM2D.***

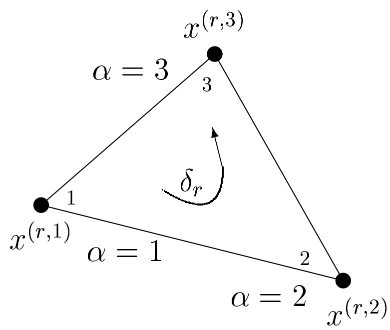
Vernetzungsfile CHIP.NET zu Bsp. (1) für FEM2D.***				Bemerkungen
21	24			NX, NE
0	0			
.17	0			
.5	0			
.83	0			
1	0			
0	.3			
.17	.3			
.83	.3			
1	.3			
0	.6			x_i, y_i
.17	.6			$i = \overline{1,\mathrm{NX}}$
.5	.6			
.83	.6			
1	.6			
.17	.8			
.5	.8			
.83	.8			
.5	.15			
.35	.3			
.5	.45			
.65	.3			
1	2	6	1	
2	7	6	1	
2	19	7	1	$\overbrace{\mathrm{IK(1,k),\ IK(2,k),\ IK(3,k)}}^{\text{Element-zusammenhang}},\ \overbrace{\mathrm{MP(k)}}^{\text{Material-bereichsnr.}}$
2	18	19	1	
2	3	18	1	
3	4	18	1	
4	21	18	1	$k = \overline{1,\mathrm{NE}}$
4	8	21	1	
4	9	8	1	
4	5	9	1	
6	7	10	1	
7	11	10	1	
7	19	11	1	
19	20	11	1	
20	12	11	1	
20	13	12	1	
20	21	13	1	
21	8	13	1	
8	14	13	1	
8	9	14	1	
11	12	15	2	
12	16	15	2	
12	17	16	2	
12	13	17	2	
2 Anzahl der geschlossenen Ränder: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$				
14 Anzahl der Knoten auf Rand 1				
4 Anzahl der Knoten auf Rand 2				Randbeschreibung
1				
2				
3				
4				$\partial\Omega$
5				
9				
14		Rand 1		
13				
17				
16				
15				
11				
10				
6				
18				
21				
20		Rand 2		
19				

■ **Vernetzung** von $\bar{\Omega}$ bedeutet softwaremäßig im Rechner die Generierung einer globalen und lokalen Vernetzungstopologie und deren Verknüpfung:

global:

- ∗ Elemente durchnumerieren: $I\!R_h = \{1, 2, \ldots, R_h\}$, wobei
  $R_h =$ Anzahl der Elemente $=$ NE $= 24$,
- ∗ Knoten durchnumerieren: $\bar{\omega}_h = \{1, 2, \ldots, \bar{N}_h\}$
  $\bar{N}_h = \underbrace{N_h}_{17} + \underbrace{\partial N_h}_{4} =$ Anzahl der Knoten $=$ NX $= 21$,
- ∗ Knotenkoordinaten: $x^{(i)} = (x_i, y_i) = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}), \;\; i \in \bar{\omega}_h$.

lokal:



$x^{(r,\alpha)}$ – Knoten,
$\alpha \in A_r \;=\; A = \{1, 2, 3\}$
$=$ lokale Knotennumerierung.

Verknüpfung:

$r \;:\; \alpha \longleftrightarrow i = i(r,\alpha)$	$i \;:\; x^{(i)} = (x_i, y_i)$
$\rotatebox{90}{$\in$} \quad \rotatebox{90}{$\in$} \qquad \rotatebox{90}{$\in$}$	$\rotatebox{90}{$\in$}$
$I\!R_h \;\; A_r \qquad \bar{\omega}_h$	$\bar{\omega}_h$ Knotenkoordinaten

- **FEM-Programme benötigen deshalb mindestens die folgenden 2 Felder, deren Aufbau wir am Beispiel der Vernetzung des Gebietes aus unserem Modellbeispiel (siehe Punkt 4.2.1) erläutern:**

$\boxed{\boldsymbol{r : \alpha \leftrightarrow i}}$

$r \in I\!R_h$	$A_r \ni \alpha \longleftrightarrow i \in \bar{\omega}_h$			Weitere Element-
Element-nummer r	globale Knotennr. der lokalen Knoten $x^{(r,1)}$ $\alpha = 1$	$x^{(r,2)}$ $\alpha = 2$	$x^{(r,3)}$ $\alpha = 3$	kennzeichnungen z.B. Material-bereichsnummer
1	1	2	6	1
2	2	7	6	1
3	2	19	7	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_h=**NE = 24**	12	13	17	2

$\boxed{\boldsymbol{i : x_i, y_i}}$

i	1	2	3	...	20	21
x_i	0.0	0.17	0.5	...	0.5	0.65
y_i	0.0	0.0	0.0		0.45	0.3

- **Bemerkung 4.2:**

  Weitere Felder zur Charakterisierung von Knoten sind möglich, z.B.:

  – Randbeschreibung (siehe Eingabedatei für FEM2D),

  – Randbedingungskodierung,

  – Verfeinerungskodierungen für Punktverfeinerungen (siehe FEMGP).

- **Methoden zur Generierung der Netzdaten:** → Siehe Praktikum $\boxed{\text{P VIII}}$

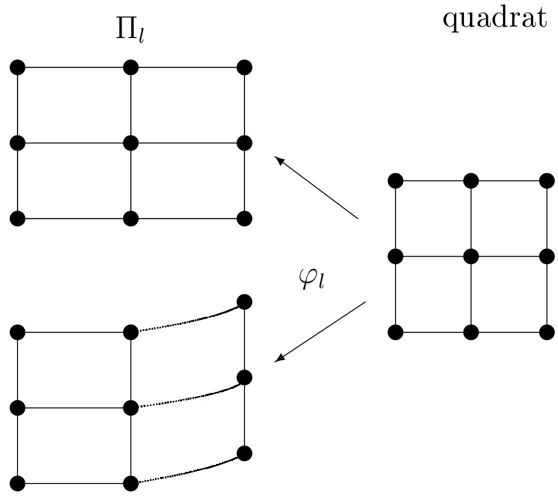
  1. Erzeugung der Felder für die Zuordnung zwischen der lokalen und der globalen Knotennumerierung $\boxed{r : \alpha \leftrightarrow i}$ und der Knotenkoordinaten $\boxed{i : x_i, y_i}$ von „Hand“ !
  2. Halbautomatische Erzeugung der Daten, d.h., z.B. Zerlegung des Gebietes Ω in Teilgebiete Π_l. Für die Vernetzung der Teilgebiete werden in Bibliotheken vorhandene Vernetzungen von Standardgebieten genutzt. Die Vernetzungen der Standardgebiete werden auf die konkreten Teilgebiete Π_l abgebildet.

Hierbei muß beachtet werden, daß die gesamte Vernetzung des Gebietes Ω eine zulässige (konforme) Vernetzung ist:

$\bar{\Omega} = \bigcup_l \bar{\Pi}_l :$ $\qquad$ $\bar{\Pi}_l = \varphi_l(\bar{P}i)$ $\qquad$ $\Pi =$ Einheits–quadrat

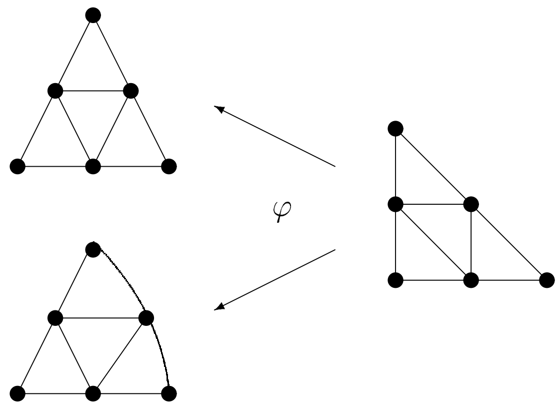
$\bar{\Pi}_l =$ Rechteck $= \varphi_l(\Pi)$

$\bar{\Pi}_l =$ krummliniges Rechteck $= \varphi_l(\Pi)$



$\bar{\Pi}_l = \varphi_l(\bar{\Pi})$ $\qquad$ $\Pi =$ Einheits-dreieck

$\bar{\Pi}_l$ – geradliniges oder krummliniges Dreieck



3. Einsatz von automatischen Vernetzungsgeneratoren. Als Eingangsdaten werden i.a. entweder eine Beschreibung des Gebietsrandes $\partial\Omega$ oder eine Zerlegung des Gebietes Ω in Teilgebiete $\bar{\Omega} = \cup_l \bar{\Omega}_l$ und die Beschreibung der Teilgebietsränder $\partial\Omega_l$ gefordert.

Zusätzlich müssen an den Netzgenerator noch Informationen über die gewünschte Feinheit der Vernetzung, z.B. durch die Vorgabe einer Knotenverteilung auf $\partial\Omega_l$, übergeben werden:

CAD System	$\longrightarrow$	grafische Benutzeroberfläche	$\longrightarrow$	Netz-generator	$\longrightarrow$	Vernetzung
$\uparrow$		$\uparrow$				$\downarrow$
Gebietsbeschreibung		Daten für den Netzgenerator				Netzdatenfile

Beispiele: PREMESH (siehe Praktikum), NETGEN [34], NAOMI [21].

4. Netzgenerierung unter Nutzung von

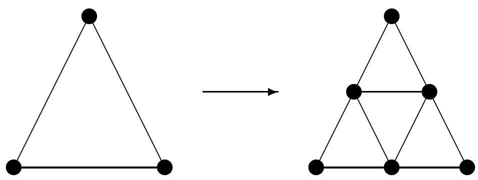
a-priori und a-posteriori

Informationen

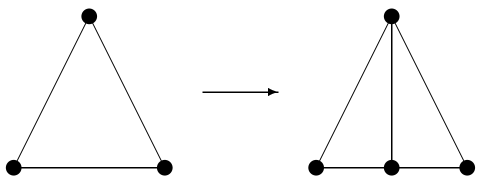
a-priori $\downarrow$	a-posteriori $\downarrow$
vor der FE-Rechnung	nach einer FE-Rechnung
Analyse der Eingangsdaten (Existenz überstumpfer Ecken am Gebietsrand, Sprünge in den Koeffizienten der PDgl. u.a.)	Analyse der FE-Lösung, Schätzung des Fehlers
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Festlegung einer Netzgraduierung	Festlegung der Dreiecke, in denen der Fehler groß ist und Forderung einer weiteren Verfeinerung dieser Dreiecke

Die Netzverfeinerung erfolgt z.B. durch

Dreiecksviertelung



Dreieckshalbierung

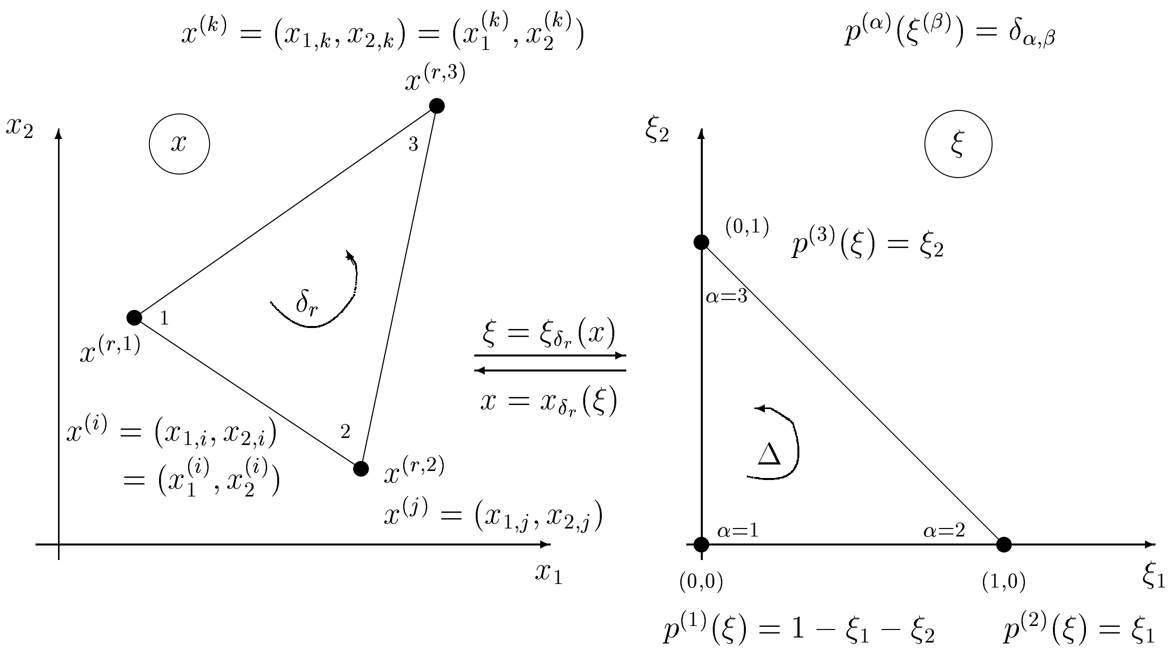


4.2.3 Definition der FE-Knotenbasis und der V_h, V_{0h}, V_{gh} mittels Abbildungstechnik

- **Prinzip:** $\rightarrow$ Abbildungsprinzip:

  Lokale Definition der Basisfunktion (Ansatzfunktion, Testfunktion) über die Formfunktion (= Basisfunktion $|_{\delta_r}$), die ihrerseits durch Abbildung der Formfunktion des Referenzelements (Masterelement, Basiselement, Einheitselement) erhalten wird.

- **Abbildung:**



$\mathcal{F}(\delta_r) = \mathcal{P}_1(\delta_r)$ $\quad\rightleftarrows\quad$ $\mathcal{F}(\Delta) = \text{span}\{p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}\} = \mathcal{P}_1(\Delta)$

beliebiges Dreieck $\delta_r; r \in I\!R_h$ $\qquad$ Referenzdreieck

- **Transformationsvorschrift:**

$$\underline{\underline{x = J_{\delta_r}\xi + x^{(i)}:}} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,j} - x_{1,i} & x_{1,k} - x_{1,i} \\ x_{2,j} - x_{2,i} & x_{2,k} - x_{2,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\boxed{|J_{\delta_r}| = |\det J_{\delta_r}| = 2 \text{ meas } \delta_r \neq 0} \tag{4.4}$$

da

$$\int\limits_{\delta_r} dx = \int\limits_{\Delta} \left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| d\xi = \int\limits_{\Delta} |J_{\delta_r}|\, d\xi = |J_{\delta_r}| \int\limits_{\Delta} d\xi = |J_{\delta r}|\, \frac{1}{2}. \qquad \#$$

$\boxed{\textbf{Ü 4.3}}$ Man zeige:

$$\frac{1}{2}\,\alpha_0^2\,\sin\,\Theta_0\,h^2 \le \frac{1}{2}\,\sin\,\Theta_r\,h_r^2 \le |J_{\delta r}| \le \frac{\sqrt{3}}{2}\,h_r^2 \le \frac{\sqrt{3}}{2}\,h^2,$$

wobei h_r – größte Seite von δ_r und
Θ_r – kleinster Winkel von δ_r.

$$\underline{\underline{\xi = J_{\delta_r}^{-1}(x - x^{(i)}) :}} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|J_{\delta_r}|} \begin{pmatrix} x_{2,k} - x_{2,i} & -(x_{1,k} - x_{1,i}) \\ -(x_{2,j} - x_{2,i}) & x_{1,j} - x_{1i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{1,i} \\ x_2 - x_{2,i} \end{pmatrix}$$

- **Definition der Basisfunktion:** $\rightarrow$ Ansatz- und Testfunktion:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{r\,:\,\alpha \leftrightarrow i}}}{p^{(i)}(x)} = \begin{cases} p^{(r,\alpha)}(x), & x \in \bar{\delta}_r, r \in B_i \quad \text{(Formfunktion)} \\ 0, & \text{sonst, d.h., } x \in \bar{\Omega} \quad \setminus \bigcup\limits_{r \in B_i} \bar{\delta}_r \end{cases}$$

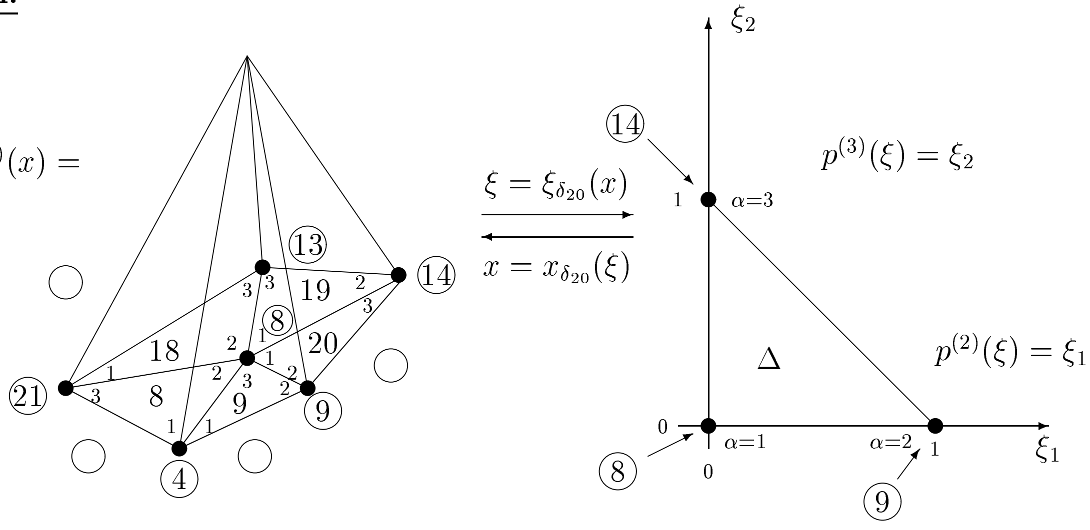
mit $B_i = \{r \in I\!R_h : x^{(i)} = (x_{1,i}, x_{2,i}) \in \bar{\delta}_r\} = \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{\text{Bsp.:}}\ i = 8}}{\{8, 9, 18, 19, 20\}},$

$$p^{(r,\alpha)}(x) = p^{(\alpha)}(\xi_{\delta_r}(x)), x \in \bar{\delta}_r; p^{(\alpha)} \text{ – Formfunktion der Referenzelemente.}$$

Es gilt: $\quad p^{(i)}(x^{(j)}) = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in \bar{\omega}_h \rightarrow \underline{\underline{\text{Knotenbasis}}}$!

- **Beispiel:**

$p^{(8)}(x) =$



$$\underline{p^{(1)}(\xi) = 1 - \xi_1 - \xi_2}$$

$$p^{(8)}(x)|_{\delta_{20}} = p^{(20,1)}(x) := \underline{p^{(1)}(\xi_{\delta_{20}}(x))}$$

- **Definition von $\boldsymbol{V_h}$, $\boldsymbol{V_{0h}}$, $\boldsymbol{V_{gh}}$:**

$$
\begin{aligned}
V_h &= \left\{ v_h = \sum_{i\in\bar{\omega}_h} v^{(i)} p^{(i)}(x) \right\} \subset V = W_2^1(\Omega); \; \curvearrowright v_h(x^{(i)}) = v^{(i)} \quad \forall i \in \bar{\omega}_h, \\
V_{0h} &= \left\{ v_h = \sum_{i\in\omega_h} v^{(i)} p^{(i)}(x) \right\} \subset V_0 \text{ mit } \omega_h = \left\{ i \in \bar{\omega}_h : x^{(i)} \notin \Gamma_1 \right\} = \\
&\overset{\text{Bsp.}}{\overset{\downarrow}{=}} \bar{\omega}_h \setminus \underbrace{\{18, 19, 20, 21\}}_{=:\gamma_h} \; \curvearrowright v_h(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1 \quad \forall v_h \in V_{0h}, \\
V_{gh} &= \left\{ v_h = \sum_{i\in\omega_h} v^{(i)} p^{(i)}(x) + \sum_{i\in\gamma_h} g_1(x^{(i)}) p^{(i)}(x) \right\} \subset V_g \\
&\curvearrowright v_h(x) = g_1(x) \quad \forall x \in \Gamma_1 \quad \forall v_h \in V_{gh}.
\end{aligned}
$$

4.2.4 Aufbau des FE-Gleichungssystems

a) **Assemblierung des Lastvektors $\underline{\hat{\mathbf{f}}}_{\mathbf{h}}$:**

- **Ausgangspunkt:** $\forall k \in \omega_h$

$$
f^{(k)} = \langle F, p^{(k)} \rangle - \sum_{i\in\gamma_h} \underset{\substack{\| \\ g_1(x^{(i)})}}{u_*^{(i)}} a(p^{(i)}, p^{(k)}) =
$$

$$
\overset{\substack{\text{Bsp.} \\ \text{aus Pkt. 4.2.1} \\ \downarrow}}{=} \int_\Omega f(x) p^{(k)}(x)\, dx + \underbrace{\underbrace{\int_{\Gamma_2} g_2 p^{(k)}\, ds}_{\substack{\text{Berücksichtigung} \\ \text{der RB 2. Art}}} + \underbrace{\int_{\Gamma_3} g_3 p^{(k)}\, ds}_{\substack{\text{Berücks.} \\ \text{der RB 3. Art}}} - \underbrace{\sum_{i\in\gamma_h} g_1\left(x^{(i)}\right) a\left(p^{(i)}, p^{(k)}\right)}_{\substack{\text{Berücks. der inhomogenen} \\ \text{RB 1. Art (homogenisieren)}}}}_{\substack{\text{RB werden später berücksichtigt !} \\ \to \text{c)}}}
$$

- **Betrachten zunächst nur die Berechnung des Anteils $\int_\Omega \boldsymbol{f p^{(k)}\, dx}$:**

(4.5)
$$
\hat{f}^{(k)} = \int_\Omega f(x) p^{(k)}(x)\, dx = \sum_{r\in B_k} \int_{\delta_r} f(x) \underset{\substack{\| \leftarrow \boxed{r : k \leftrightarrow \alpha_k} \\ p^{(r,\alpha_k)}(x) \text{ Formfunktion}}}{p^{(k)}(x)}\, dx
$$

$$
k \in \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h
$$

$$
\underline{\hat{f}}_h = \left[\hat{f}^{(k)} \right]_{k\in\bar{\omega}_h}
$$

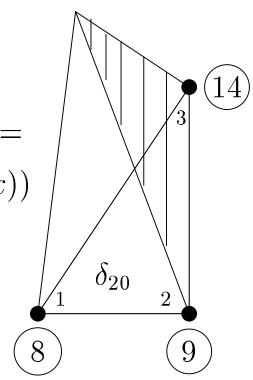
In der FEM wird nun $\hat{f}^{(k)}$ **nicht knotenorientiert** nach Formel (4.5) berechnet, sondern **elementweise** vorgegangen und die entsprechenden Anteile aufaddiert → **Assemblierung !**

- **Betrachten dazu wieder unser Beispiel:** $\hat{f}^{(8)}$

$$\hat{f}^{(8)} = \int_{\delta_8} f p^{(8)}\,dx + \int_{\delta_9} f p^{(8)}\,dx + \int_{\delta_{18}} f p^{(8)}\,dx + \int_{\delta_{19}} f p^{(8)}\,dx + \int_{\delta_{20}} f p^{(8)}\,dx$$

Schleife über alle Elemente: $r = 1, \dots, 8, 9, \dots, 18, 19, \boxed{20}, 21, \dots, 24.$

$$p^{(8)}(x)|_{\delta_{20}} = \\ = p^{(20,1)}(x) = \\ = p^{(1)}(\xi_{\delta_{20}}(x))$$



$\rightarrow$ Element-lastvektor $= \underline{f}^{(20)} = \begin{bmatrix} f^{(20,1)} \\ f^{(20,2)} \\ f^{(20,3)} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \hat{f}^{(8)} \\ \rightarrow \hat{f}^{(9)} \\ \rightarrow \hat{f}^{(14)} \end{array}$

$\uparrow$
Assemblierung
$\boxed{r : i \leftrightarrow \alpha}$

$$\int_{\delta_{20}} f(x)p^{(8)}(x) \;=\; \int_{\delta_{20}} f(x)p^{(20,1)}(x)\,dx = \int_{\Delta} f\left(x_{\delta_{20}}(\xi)\right) p^{(1)}(\xi)|J_{\delta_{20}}|\,d\xi \approx$$

$\uparrow$

$\boxed{\begin{array}{l} r = 20\text{: } 1 \leftrightarrow 8 \\ \qquad\quad\ \ \alpha \quad\ i \end{array}}$

$\uparrow$

$\delta_{20} \leftrightarrow \Delta$

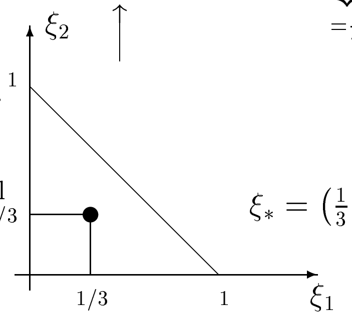
z.B.

$$\approx f(x_{\delta_{20}}(\xi_*))\underbrace{p^{(1)}(\xi_*)}_{=\frac{1}{3}}\;\underbrace{\underbrace{|J_{\delta_{20}}|}_{= 2 \text{ meas } \delta_{20}} \cdot \tfrac{1}{2}}_{=\text{meas } \delta_{20}} =: f^{(20,1)}$$

$\uparrow$

numer. Integr.

Kubaturformel



$\xi_* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) =$ Schwerpkt.

■ **Theoretische Darstellung von $\underline{\hat{f}}_h$ mit der Connectivity-Matrix C_r:**

$$\underline{\hat{f}}_h = \left[\hat{f}^{(k)}\right]_{k\in\bar{\omega}_h} = \sum_{r\in I\!R_h} C_r \underline{f}^{(r)},$$

mit der Connectivity-(Elementzusammenhangs-)Matrix (= Boolsche Matrix):

$$C_r = \begin{array}{c} \\ \\ i_1 \\ \\ i_3 \\ \\ i_2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \dots & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & \dots \end{array}\right]_{\bar{N}_h \times 3} \end{array}$$

$$\boxed{r : \alpha \leftrightarrow i}$$
$$1 \leftrightarrow i_1$$
$$2 \leftrightarrow i_2$$
$$3 \leftrightarrow i_3$$

■ **Algorithmus:**

```
for r = 1 step 1 until R_h do (Schleife über alle Elemente)
    for α = 1 step 1 until 3 do
        begin  * compute f^(r,α) (Elementlastvektor f^(r) = [f^(r,α)]_{α∈A})
               * determine i = i(r,α)    [ r : α ↔ i = i(r,α) ]
               * update f^(i) := f^(i) + f^(r,α)
        end
    end for
end for
```

b) **Assemblierung der Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{h} = \left[\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{i,j}}\right]_{\mathbf{i,j}\in\bar{\omega}_\mathbf{h}}$:**

■ **Ausgangspunkt:** $\forall i,j \in \omega_h$:

$$K_{ij} = a(p^{(j)}, p^{(i)}) = \begin{cases} 0, \text{ falls } B_{ij} = B_i \cap B_j = \emptyset \\ \sum\limits_{r\in B_{ij}} \left(\underbrace{\int\limits_{\delta_r} (\lambda\nabla^T p^{(j)} \nabla p^{(i)} + a p^{(j)} p^{(i)}\, dx}_{} + \underbrace{\int\limits_{\Gamma_3\cap\partial\delta_r} \kappa p^{(j)} p^{(i)}\, ds}_{} \right) \end{cases}$$

RB 3. Art werden später berücksichtigt $\to$ c)

■ **Elementweise Technologie zur Berechnung des Anteils $\hat{K}_{ij}$:**

$$\hat{K}_{ij} = \sum_{r\in B_{ij}} \int_{\delta_r} \left(\lambda\nabla^T p^{(j)} \nabla p^{(i)} + a p^{(j)} p^{(i)}\right)\, dx \curvearrowright \hat{K}_h = [\hat{K}_{ij}]_{i,j\in\bar{\omega}}$$

$\forall i,j \in \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h : B_{ij} \neq \emptyset$

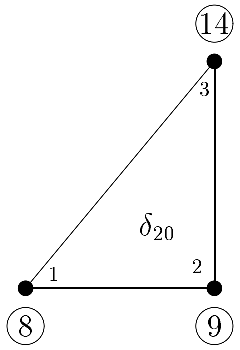
Nicht **komponentenweise**, sondern **elementeweise** (anteilsweise !):

Beispiel: $i = 8,\ j = 9 \curvearrowright B_{ij} = \{8,9,18,19,20\} \cap \{9,10,20\} = \{9,20\}$

$(\Gamma_3 \cap \partial\delta_9 = \emptyset, \Gamma_3 \cap \partial\delta_{20} = \emptyset)$

$$\hat{K}_{8,9} = \int_{\delta_9} (\ldots)\, dx + \int_{\delta_{20}} (\ldots)\, dx$$

Schleife über alle Elemente: $r = 1, \ldots, 8, 9, 10, \ldots, 19, \boxed{20}, 21, \ldots, 24.$ $\hat{K}_h$



$$\to \text{Element-steifigkeits-matrix} = K^{(20)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{matrix} \nearrow \\ \oplus \\ \searrow \\ \uparrow \\ \text{Assemblieren} \end{matrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \hat{K}_{88} \quad \hat{K}_{89} & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{K}_{\bar{N}_h \bar{N}_h} \end{bmatrix}_{\bar{N}_h \times N_h}$$

$r = 20$:	$1 \leftrightarrow 8$
	$2 \leftrightarrow 9$
	$3 \leftrightarrow 14$

$$\int_{\delta_{20}} \left(\lambda \frac{\partial p^{(9)}}{\partial x_1} \frac{\partial p^{(8)}}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial p^{(9)}}{\partial x_2} \frac{\partial p^{(8)}}{\partial x_2} + a p^{(9)} p^{(8)} \right) dx =$$

$$\delta_{20} \leftrightarrow \Delta$$

$$= \int_{\delta_{20}} \left(\lambda \frac{\partial p^{(20,2)}}{\partial x_1} \frac{\partial p^{(20,1)}}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial p^{(20,2)}}{\partial x_2} \frac{\partial p^{(20,1)}}{\partial x_2} + a p^{(20,2)}(x) p^{(20,1)}(x) \right) dx \overset{\downarrow}{=}$$

$$= \int_{\Delta} \left(\lambda(x_{\delta_{20}}(\xi)) \frac{\partial p^{(2)}(\xi)}{\partial x_1} \frac{\partial p^{(1)}(\xi)}{\partial x_1} + \lambda(\cdot) \frac{\partial p^{(2)}(\xi)}{\partial x_2} \frac{\partial p^{(1)}(\xi)}{\partial x_2} + a(\cdot) p^{(2)} p^{(1)} \right) |J_{\delta_{20}}|\, d\xi$$

$$x = x_{\delta_{20}}(\xi) = J_{\delta_{20}} \xi + x^{(8)}$$

$$= (*)$$

<u>NR:</u> $\nabla_x = J_{\delta_r}^{-T} \nabla_\xi, \quad \nabla_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \nabla_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}$

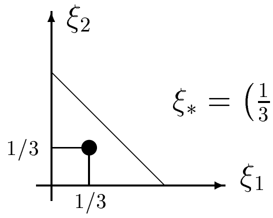
$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = J_{\delta_{20}}^{-1}(x - x^{(8)}), J_{\delta_{20}}^{-1} = \frac{1}{|J_{\delta_{20}}|} \begin{bmatrix} x_2^{(14)} - x_2^{(8)}, & -(x_1^{(14)} - x_1^{(8)}) \\ -(x_2^{(9)} - x_2^{(8)}), & (x_1^{(9)} - x_1^{(8)}) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\nabla_x = J_{\delta_r}^{-T} \nabla_\xi} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \\ &= \frac{1}{|J_{\delta_{20}}|} \left[\left(x_2^{(14)} - x_2^{(8)} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \left(x_2^{(9)} - x_2^{(8)} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{1}{|J_{\delta_{20}}|} \left[- \left(x_1^{(14)} - x_1^{(8)} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \left(x_1^{(9)} - x_1^{(8)} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right] \end{aligned} \right.$$

$$p^{(2)}(\xi) \;=\; \xi_1, \qquad \tfrac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi_1} = 1,\; \tfrac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi_2} = 0$$

$$p^{(1)}(\xi) \;=\; 1-\xi_1-\xi_2, \qquad \tfrac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_1} = -1,\; \tfrac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_2} = -1$$

$$\begin{aligned}(*) \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{QF} \\ \text{Schwerpunktsregel}}}{\approx} \Bigg\{ & \lambda\left(x_{\delta_{20}}(\xi_*)\right)\left[\frac{1}{|J_{\delta_{20}}|}(x_2^{(14)}-x_2^{(8)})\frac{1}{|J_{\delta_{20}}|}(x_2^{(9)}-x_2^{(14)})\right]+ \\ & +\lambda(x_{\delta_{20}}(\xi_*))\left[\frac{1}{|J_{\delta_{20}}|}(x_1^{(8)}-x_1^{(14)})\cdot\frac{1}{|J_{\delta_{20}}|}(x_1^{(14)}-x_1^{(9)}\right]+ \\ & +a(x_{\delta_{20}}(\xi_*))\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\Bigg\}\underbrace{|J_{\delta_{20}}|\underbrace{\cdot\frac{1}{2}}_{\text{meas }\Delta}}_{\text{meas }\delta_{20}} =: K_{1,2}^{(20)}\end{aligned}$$



$$\xi_* = \left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)$$

- **<u>Theoretische Darstellung von $\hat{K}_h$ mit den Connectivity-Matrizen C_r:</u>**

$$\hat{K}_h = [K_{ij}]_{i,j\in\bar{\omega}_h} = \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{N}_h = N_h + \partial N_h}}{[\qquad]_{\bar{N}_h\times\bar{N}_h}} = \sum_{r\in I\!R_h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Elementsteifigkeitsmatrizen}}}{C_r K^{(r)} C_r^T}$$

$$K^{(r)} = \left[K^{(r)}_{\alpha\beta}\right]_{\alpha,\beta\in A_r}$$

- **<u>Algorithmus:</u>**

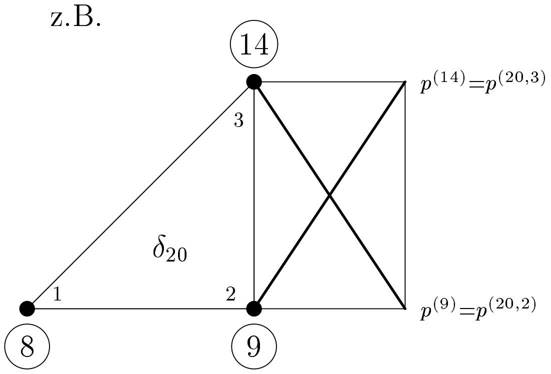
<u>for</u> $r := 1$ <u>step</u> 1 <u>until</u> R_h <u>do</u> (Schleife über alle Elemente)
  <u>for</u> $\alpha = 1$ <u>step</u> 1 <u>until</u> 3 <u>do</u>
    <u>for</u> $\beta := 1$ <u>step</u> 1 <u>until</u> 3 <u>do</u>
      <u>begin</u> $*$ compute $K^{(r)}_{\alpha\beta}$
        $*$ determine $i = i(r,\alpha)$ $\boxed{r : \alpha \leftrightarrow i}$
          $j = j(r,\beta)$ $\boxed{r : \beta \leftrightarrow j}$
        $*$ update $K_{ij} := K_{ij} + K^{(r)}_{\alpha\beta}$
      <u>end</u>
    <u>end for</u>
  <u>end for</u>
<u>end for</u>

c) **Einarbeitung der Randbedingungen:**

- **Natürliche Randbedingungen:** $\Gamma_2(\rightarrow < F, \cdot >), \Gamma_3(\rightarrow a(\cdot,\cdot), < F, \cdot >)$

  - inhomogene RB 2. Art: $\int\limits_{\Gamma_2} g_2 p^{(k)}\, dx \rightarrow f^{(k)} \rightarrow \underline{\hat{f}}_h$

    z.B.



Anteile werden wieder elementweise berechnet, z.B. 9 - 14

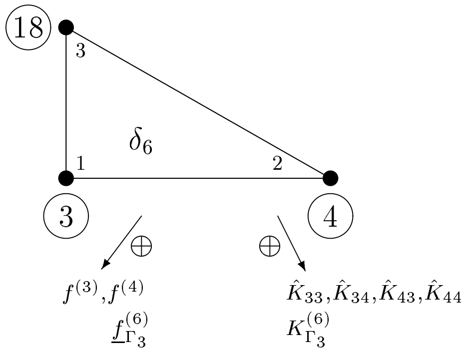
$$\int\limits_{9}^{14} g_2 p^{(9)}\, ds \overset{\oplus}{\rightarrow} f^{(9)} \rightarrow \underline{\hat{f}}_h$$

$$\int\limits_{9}^{14} g_2 p^{(14)}\, ds \overset{\oplus}{\rightarrow} f^{(14)} \rightarrow \underline{\hat{f}}_h$$

  - RB 3. Art: $\int\limits_{\Gamma_3} g_3 p^{(k)}\, ds \overset{\oplus}{\rightarrow} f^{(k)} \rightarrow \underline{\hat{f}}_h$

    $\int\limits_{\Gamma_3} \kappa p^{(i)} p^{(k)}\, ds \overset{\oplus}{\rightarrow} \hat{K}_{ki} \rightarrow \hat{K}_h$

    z.B.



Anteile werden wieder elementweise berechnet !

- **Wesentliche Randbedingungen:** $u|_{\Gamma_1} = g_1\ (V_{0h}, V_{gh})$

  1. Variante: Homogenisieren im Diskreten
     - $u^{(j)} = u_*^{(j)} = g_1(x^{(j)}) \quad \forall j \in \gamma_h = \bar{\omega}_h \backslash \omega_h,$
     - Korrektur der RS: $f^{(i)} := f^{(i)} - \sum\limits_{j\in\gamma_h} K_{ij} u_*^{(j)} \quad \forall i \in \omega_h,$
     - Streichen der Spalten $j \in \gamma_h$,
     - Streichen der Zeilen $i \in \gamma_h$.

  2. Variante: Straftechnik: $K_{ii} = 10^s, f^{(i)} = 10^s g(x^{(i)}) \quad \forall i \in \gamma_h$

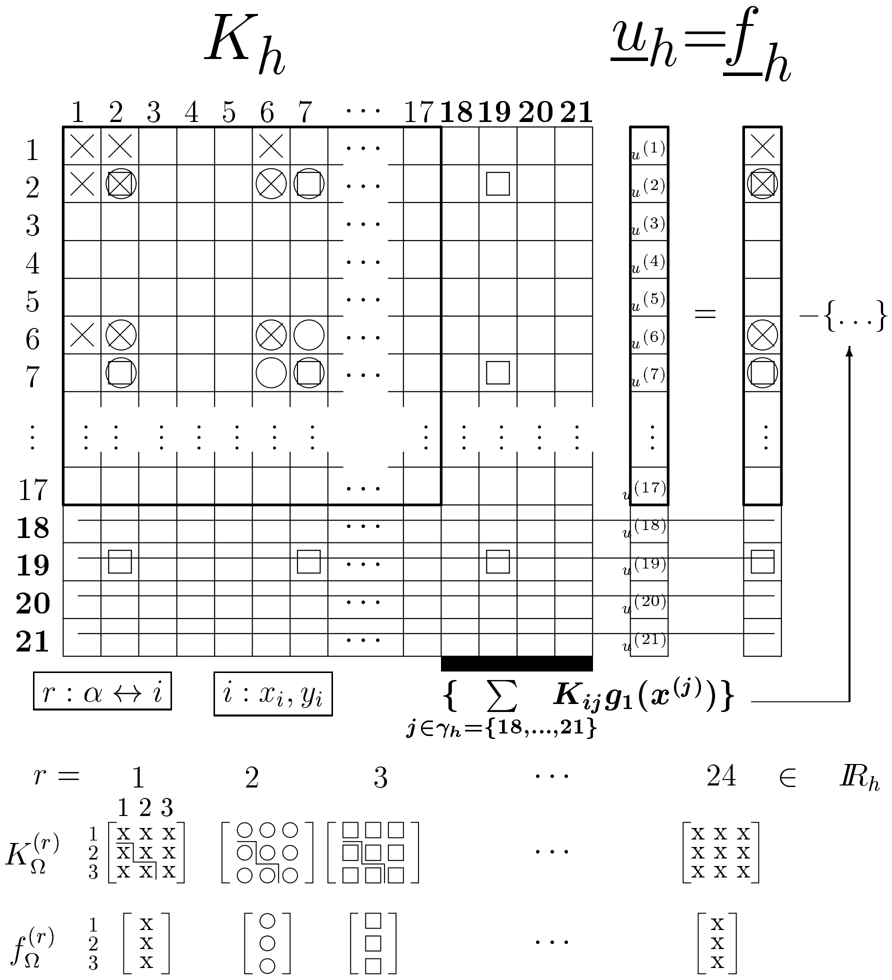
     $\Rightarrow u^{(i)} = g(x^{(i)}) - 10^{-s} \sum\limits_{j\neq i} K_{ij} u^{(j)} \hat{=}$ RB 3. Art.

  3. Variante: $K_{ij} = K_{ji} = \delta_{ij} \quad \forall i \in \gamma_h \quad \forall j \in \bar{\omega}$ und $f^{(i)} = g_1(x^{(i)}) \quad \forall i \in \gamma_h$.

a) – c) Resultat:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } \underline{u}_h = [u^{(i)}]_{i\in\omega_h(\cup\gamma_h)} : K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \\ \text{mit geg. } \underline{f}_h = [f^{(i)}]_{i\in\omega_h(\cup\gamma_h)} \text{ und } K_h = [K_{ij}]_{i,j\in\omega_h(\cup\gamma_h)} \end{array}}$$

■ **Beispiel:** Modellproblem CHIP



Einarbeitung der RB: 1. Art: , 2. Art: hom., 3. Art: 1–2, 2–3, 3–4, 4–5 $\nearrow k \atop \to f$

18 $\boldsymbol{u^{(18)} = g_1(x^{(18)})}$ **20** $\boldsymbol{u^{(20)} = g_1(x^{(20)})}$

19 $\boldsymbol{u^{(19)} = g_1(x^{(19)})}$ **21** $\boldsymbol{u^{(21)} = g_1(x^{(21)})}$

4.3 Eigenschaften der FE-Gleichungssysteme

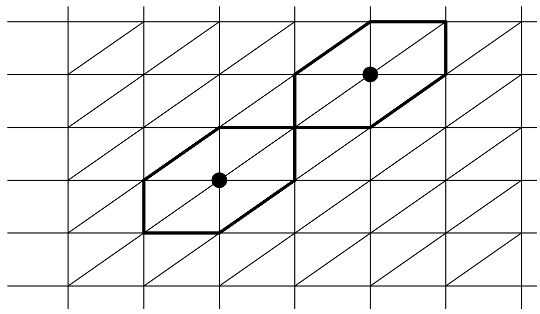
- **Das GS $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ bzw. die Steifigkeitsmatrix haben folgende Eigenschaften:**

1. <u>**großdimensioniert:**</u> $\Omega \subset I\!R^m$ (2D: $m = 2$)
   $N = N_h = |\omega_h| =$ Anzahl der Unbekannten $= O(h^{-m})$
   $\rightarrow$ in praktischen Aufgaben oft mehrere Hunderttausende bzw. Millionen !

2. <u>**schwach besetzt:**</u>
   $K_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \omega_h : \ \text{supp}\,(p^{(i)}) \cap \ \text{supp}\,(p^{(j)}) = \emptyset$, d.h., $B_{ij} = 0$.

   <u>MBeispiel „CHIP“:</u>

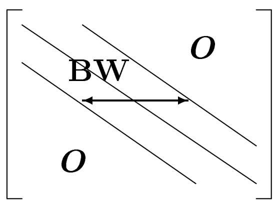
   NNE (1) = 3
   NNE (11) = 5 + (2)

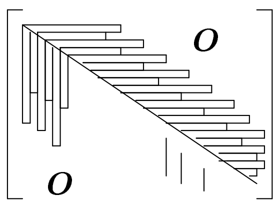


   NNE (i) = Maximale Anzahl der NNE[1] in der i-ten Zeile =
   $= |\{j \in \omega_h : x^{(j)} \in \bigcup_{r \in B_i} \bar{\delta}_r\}| = O(1)$.

   $\text{NNE} = \sum_{i \in \omega_h} \text{NNE}\,(i) =$ Maximale Anzahl der NNE von $K_h = O(h^{-m})$.

3. <u>**Bandweite**</u> bzw. <u>**Profil**</u>





   $\rightarrow$ hängt von der globalen Durchnumerierung der Knoten ab !

   i. a. $\text{BW}(K_h) = O(h^{-(m-1)})$, $\text{PF}(K_h) = O(h^{-(2m-1)})$.

   $\rightarrow$ Bandweiten- und Profilminimierungsalgorithmen,
   d.h., Suche Durchnumerierung der Knoten, die möglichst kleine BW bzw. möglichst kleines Profil ergibt !
   $\rightarrow$ <u>Literatur:</u> [36], [35].

[1]NNE = <u>N</u>umber of <u>N</u>on-zero <u>E</u>lements

4. Die Eigenschaften der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ werden i. a. auf die Steifigkeitsmatrix K_h übertragen, da offenbar (vergleiche Numerik I [26])

$$\boxed{(K_h \underline{u}_h, \underline{v}_h) = a(u_h, v_h) \quad \forall \underline{u}_h, \underline{v}_h \leftrightarrow u_h, v_h \in V_{0h}} \tag{4.6}$$

z.B. • $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch $\Rightarrow K_h = K_h^T$.

Tatsächlich,

$(K_h\underline{u}_h, \underline{v}_h) = a(u_h, v_h) = a(v_h, u_h) = (K_h\underline{v}_h, \underline{u}_h) = (\underline{u}_h, K_h\underline{v}_h)$.

• $a(\cdot,\cdot)$ V_0 - elliptisch $\Rightarrow K_h$ p.d.

Tatsächlich,

$(K_h\underline{u}_h, \underline{u}_h) = a(u_h, u_h) \geq \mu_1 \|u_h\|_1^2 > 0 \quad \forall \underline{u}_h \not\equiv 0$.

■ Hier und im weiteren setzen wir voraus, daß die Triangularisierung regulär (vergleiche Punkt 4.2.2) ist. Allgemeiner als die im Punkt 4.2.2 für Dreiecke gegebene Definition einer **regulären Triangulation** ist die folgende Definition:

Definition 4.3: (reguläre Triangulation)
Wir nennen die Familie $\{\tau_h\}_{h\in\Theta}$ der Triangulationen $\tau_h = \{\delta_r : r \in I\!R_h\}$ regulär, falls positive, h-unabhängige Konstanten $\underline{c}_1, \bar{c}_1, c_2, c_3 = \text{const.} > 0$ existieren:

$$\underline{c}_1 h^m \leq \underbrace{|J_{\delta_r}|}_{\substack{!! \\ |\det J_{\delta_r}|}} \leq \bar{c}_1 h^m, \quad \forall x \in \bar{\delta}_r, \quad \forall r \in I\!R_h \quad \forall h \in \Theta, \tag{4.7}$$

$$\|J_{\delta_r}\| := \underbrace{\sqrt{\lambda_{\max}(J_{\delta_r}^T J_{\delta_r})}}_{\text{Spektralnorm}} \leq c_2 h \quad \forall x \in \bar{\delta}_r \quad \forall r \in I\!R_h \quad \forall h \in \Theta, \tag{4.8}$$

$$\|J_{\delta_r}^{-T}\| := \sqrt{\lambda_{\max}(J_{\delta_r}^{-1} J_{\delta_r}^{-T})} \leq c_3 h^{-1} \quad \forall x \in \bar{\delta}_r \quad \forall r \in I\!R_h \quad \forall h \in \Theta. \tag{4.9}$$

Ü 4.4 Man zeige, daß eine reguläre Dreiecksvernetzung im Sinne von (4.3) eine reguläre Triangulation im Sinne der Definition 4.1 ist, und man gebe die Konstanten $\underline{c}_1, \bar{c}_1, c_2, c_3$ an !
Hinweis: Ü 4.3 liefert sofort

$$J_{\delta_r} = \begin{bmatrix} x_1^{(j)} - x_1^{(i)} & x_1^{(k)} - x_1^{(i)} \\ x_2^{(j)} - x_2^{(i)} & x_2^{(k)} - x_2^{(i)} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \underline{c}_1 &= \tfrac{1}{2}\alpha_0^2 \sin\Theta_0,\ \bar{c}_1 = \sqrt{3}/2, \\ c_2 &= \ ? \\ c_3 &= \ ? \end{aligned}$$

■ **Satz 4.4:** (Eigenwert- und Konditionsabschätzung)

Vor.: 1. $a(\cdot,\cdot): V \times V \to I\!R^1$ - Bilinearform, $V = W_2^1(\Omega), \|\cdot\| = \|\cdot\|_1$:

a) V_0 – elliptisch: $a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_0$,

b) V_0 – beschränkt: $|a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\|_1 \|v\|_1 \quad \forall u,v \in V_0$,

c) V_0 - symmetrisch: $a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in V_0$.

2. Triangularisierung sei regulär i. S. der Definition 4.1.

Bh.: Dann gilt:

1. $\exists\, \underline{c}_E, \bar{c}_E = \text{const.} > 0 : c_E \neq c_E(h)$:

(4.10) $$\underline{\gamma} = \underline{c}_E h^m \leq \underset{\text{EW von } K_h}{\lambda(K_h)} \leq \bar{c}_E h^{m-2} = \bar{\gamma},$$

2. $\kappa(K_h) := \frac{\lambda\max(K_h)}{\lambda\min(K_h)} \leq \frac{\bar{c}_E}{\underline{c}_E}\, h^{-2}$.

Beweis:

- Ausgangspunkt für EW-Abschätzungen = Rayleigh-Quotient

$$\underline{\gamma} \overset{!}{\leq} \lambda_{\min}(K_h) = \min_{\underline{u}_h \neq 0} \frac{(K_h \underline{u}_h, \underline{u}_h)}{(\underline{u}_h, \underline{u}_h)} \leq \underset{\text{EW}}{\lambda(K_h)} \leq \max_{\underline{u}_h \neq 0} \frac{(K_h \underline{u}_h, \underline{u}_h)}{(\underline{u}_h, \underline{u}_h)} = \lambda_{\max}(K_h) \overset{!}{\leq} \bar{\gamma}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\underline{\gamma}(\underline{u}_h, \underline{u}_h) \leq (K_h \underline{u}_h, \underline{u}_h) \leq \bar{\gamma}(\underline{u}_h, \underline{u}_h) \quad \forall \underline{u}_h \in I\!R^{N_h}}$$

wobei $(\cdot,\cdot)$ – Euklidisches Skalarprodukt in $I\!R^{N_h}$.

(4.11) $$(K_h \underline{u}_h, \underline{u}_h) = a(u_h, u_h) \begin{array}{l} \geq \mu_1 \|u_h\|_1^2 = (1) \geq ? \\ \leq \mu_2 \underbrace{\|u_h\|_1^2}\ = (2) \leq ? \end{array}$$

von der konkreten Aufgabe unabhängig !

$$\forall \underline{u}_h \in I\!R^{N_h}, \underline{u}_h \leftrightarrow u_h \in V_{0h}$$

1 $$\|u_h\|_1^2 = \int\limits_\Omega (|\nabla_x u_h|^2 + u_h^2)\,dx \underset{\bar\Omega = \bigcup\limits_{r\in I\!R_h}\bar\delta_r}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \sum_{r\in I\!R_h}\int\limits_{\delta_r}(|\nabla_x u_h|^2 + u_h^2)\,dx =$$

Abbildungsprinzip

$\delta_r \leftrightarrow \Delta$

$\downarrow$

(4.12) $$= \sum_{r\in I\!R_h}\int\limits_\Delta \left(\underbrace{|J_{\delta_r}^{-T}\nabla_\xi u_h(x_{\delta_r}(\xi))|^2}_{\geq 0} + u_h^2(x_{\delta_r}(\xi)\right)|J_{\delta_r}|\,d\xi$$

$\uparrow$

mms: $\nabla_x = J_{\delta_r}^{-T}\nabla_\xi$

$$\geq \underline{c}_1 h^m \sum_{r\in I\!R_h}\int\limits_\Delta \left(\underbrace{\sum_{\alpha\in A_r} u^{(r,\alpha)}p^{(\alpha)}(\xi)}_{=u_h(x_{\delta_r}(\xi))}\right)^2 d\xi$$

$\uparrow$

(4.7)

$$= \underline{c}_1 h^m \sum_{r\in I\!R_h}\sum_{\alpha,\beta\in A_r = A\equiv\{1,2,3,\}} u^{(r,\alpha)}\,u^{(r,\beta)}\int\limits_\Delta p^{(\alpha)}(\xi)p^{(\beta)}(\xi)\,d\xi$$

$$\{1,2,3,\} = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$

$$= \underline{c}_1 h^m \sum_{r\in I\!R_h}(G_0\underline{u}^{(r)},\underline{u}^{(r)})_{I\!R^{|A_r|=3}} \geq$$

$$\geq \underline{c}_1\lambda_{\min}(G_0)h^m\sum_{r\in I\!R_h}\sum_{\alpha\in A_r}\left(u^{(r,\alpha)}\right)^2 \geq$$

$$\geq \underline{c}_1\lambda_{\min}(G_0)h^m(\underline{u}_h,\underline{u}_h),$$

wobei $\underline{u}^{(r)} = [u^{(r,\alpha)}]_{\alpha\in A_r = A}$ – Elementvektor,

$$G_0 = \left[\int\limits_\Delta p^{(\alpha)}p^{(\beta)}d\xi\right]_{\alpha,\beta\in A_r=A} \text{ – Elementmassenmatrix.}$$

<u>Resultat:</u>

(4.13) $$\boxed{\underline{\gamma} = \underbrace{\mu_1\lambda_{\min}(G_0)\underline{c}_1}_{=\underline{c}_E} h^m}$$

$$2\quad \|u_h\|_1^2 \underset{\substack{\uparrow\\(4.12)}}{=} \sum_{r\in I\!R_h}\int_\Delta \left(|J_{\delta_r}^{-T}\nabla_\xi u_h(x_{\delta_r}(\xi))|^2 + u_h^2(x_{\delta_r}(\xi))\right)|J_{\delta_r}|\,d\xi \le$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\(4.7)}}{\le} \bar{c}_1 h^m \sum_{r\in I\!R_h}\int_\Delta \left(\nabla_\xi^T u_h J_{\delta_r}^{-1} J_{\delta_r}^{-T}\nabla_\xi u_h + u_h^2\right)\,d\xi \le$$

$$\le \bar{c}_1 h^m \sum_{r\in I\!R_h}\int_\Delta \left(\underbrace{\lambda_{\max}(J_{\delta_r}^{-1} J_{\delta_r}^{-T})}_{\substack{\le c_3^2 h^{-2}\\ \uparrow\\ (4.9)}} |\nabla_\xi u_h|^2 + u_h^2\right)\,d\xi \le$$

o. B. d. A.: $c_3 \ge h$, d.h., $c_3^2 h^{-2} \ge 1$

$\downarrow$

$$\le \bar{c}_1 h^m c_3^2 h^{-2} \sum_{r\in I\!R_h}\sum_{\alpha,\beta\in A_r} u^{(r,\alpha)}u^{(r,\beta)} \underbrace{\int_\Delta \left(\nabla_\xi^T p^{(\alpha)}\nabla_\xi p^{(\beta)} + p^{(\alpha)}p^{(\beta)}\right)\,d\xi}_{G_1^{(\alpha,\beta)}} =$$

$$= \bar{c}_1 c_3^2 h^{m-2} \sum_{r\in I\!R_h} (G_1\underline{u}^{(r)}, \underline{u}^{(r)}) \le$$

$$\le \bar{c}_1 c_3^2 \lambda_{\max}(G_1) h^{m-2} \sum_{r\in I\!R_h}\sum_{\alpha\in A} (u^{(r,\alpha)})^2 \le$$

$$c_4 = \sup_{h\in\Theta}\max_{i\in\omega_h}|B_i|$$

$$\le \bar{c}_1 c_3^2 c_4 \lambda_{\max}(G_1) h^{m-2}(\underline{u}_h, \underline{u}_h),$$

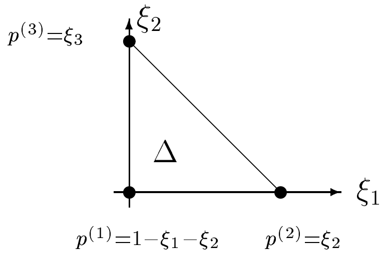
wobei: $G_1 = \left[G_1^{(\alpha,\beta)}\right]_{\alpha,\beta\in A_r = A}$.

<u>Resultat:</u>

(4.14) $$\boxed{\bar{\gamma} = \underbrace{\mu_2 \bar{c}_1 c_3^2 c_4 \lambda_{\max}(G_1)}_{=\bar{c}_E} h^{m-2}}$$

q.e.d.

■ **Ü 4.5** Man berechne für unser Modellbeispiel



$\lambda_{\min}(G_0) = ?$, $\lambda_{\max}(G_1) = ?$

und gebe für reguläre Dreiecksvernetzungen

$\underline{\gamma} = ?$

$\bar{\gamma} = ?$

an.

Hinweis: Benutzen Sie die Resultate von $\boxed{\text{Ü 4.4}}$!

Ü 4.6 Man zeige, daß die EW-Abschätzungen bezüglich der h-Ordnung scharf sind, d.h., $\exists\ \Delta_1', \Delta_2' = \text{const.} > 0 : \lambda_{\min}(K_h) \leq \Delta_1' h^m$ und $\lambda_{\max}(K_h) \geq \Delta_2' h^{m-2}$.

Folglich gilt: $\lambda_{\min}(K_h) = O(h^m), \lambda_{\max}(K_h) = O(h^{m-2})$,
$\kappa(K_h) = O(h^{-2})$.

Hinweis: Beispiel genügt !

Ü 4.7 Man zeige, daß für reguläre Triangulationen i. S. der Def. 4.3

$\exists\ \underline{c}_0, \bar{c}_0 = \text{const.} > 0, \quad c_0 \neq c_0(h)$:

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{c}_0 h^m (\underline{u}_h, \underline{u}_h) & \leq & \|u_h\|^2_{0,\Omega} & \leq & \bar{c}_0 h^m (\underline{u}_h, \underline{u}_h) \\
\| & & \|\ {\scriptstyle L_2(\Omega)} & & \| \\
\underline{c}_0 h^m \|\underline{u}_h\|^2_{I\!R^{N_h}} & \leq & (M_h \underline{u}_h, \underline{u}_h) & \leq & \bar{c}_0 h^m \|\underline{u}_h\|^2_{I\!R^{N_h}}
\end{array}$$

und gebe

$\underline{c}_0 = ?$
$\bar{c}_0 = ?$

für reguläre Dreiecksvernetzung i. S. (4.3) an.
Die $(N_h \times N_h)$–Matrix M_h wird Massenmatrix genannt:

$$(M_h \underline{u}_h, \underline{v}_h) := \int_\Omega u_h \cdot v_h \, dx \quad \forall \underline{u}_h, \underline{v}_h \leftrightarrow u_h, v_h \in V_{0h}.$$

Folglich gilt:

- $\lambda_{\min}(M_h) \geq \underline{c}_0 h^m$,
- $\lambda_{\max}(M_h) \leq \bar{c}_0 h^m$,
- $\kappa(M_h) \leq \bar{c}_0 / \underline{c}_0 = O(1)$.

■ **Bemerkung:** Die in diesem Punkt angegebenen Eigenschaften K_h sind ausschlaggebend für die Bewertung der Effizienz von Auflösungsverfahren für GS $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ (vergleiche Kapitel 7 „Auflösungsverfahren“).

4.4 Diskretisierungsfehlerabschätzungen

4.4.1 Allgemeine Bemerkungen

- **Ausgangspunkt:** Satz I.4.3 ([26]) von Cea mit $V = W_2^1(\Omega), \|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ für skalare elliptische PDgl. 2. Ordnung:

$$(4.15) \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\|u - u_h\|_1}_{\substack{(1)\ (1)_h \\ \text{Diskretisierungsfehler}}} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \underbrace{\inf_{v_h \in V_{gh}} \|u - v_h\|_1}_{\text{Approximationsfehler}}$$

- **Idee:**

  – Wählen $v_h = \mathrm{int}_{V_h}(u) = \sum_{i \in \bar\omega_h} u(x^{(i)})p^{(i)}(x) = \underbrace{\sum_{i \in \omega_h} u(x^{(i)})p(x)}_{= 0 \text{ auf } \Gamma_1}^{V_{0h}} + \underbrace{\sum_{i \in \gamma_h} u(x^{(i)})p^{(i)}(x)}_{= g_1(x)\ \forall x \in \Gamma_1}^{V_{gh} \subset V_g}$

  Interpolant $\qquad u \in V_g \cap C(\bar\Omega)$.

  ?

  bzw.

  $v_h = \mathrm{int}_{V_h}$ (Mittlung (u))

  falls $u \notin C(\bar\Omega)$!

  z.B. gemäß Einbettungssatz I.3.5 ([26]):

  $m = 2\ (\Omega \subset \mathbb{R}^2 \dagger \partial\Omega \in C^{0,1})$:

  $u \in V_g \cap W_2^2(\Omega) \curvearrowright u \in V_g \cap C(\bar\Omega)$, da

  $2 \times 2 > m$

  $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow C(\bar\Omega)$, falls $k \cdot p > m$.

$$\Rightarrow \underbrace{\inf_{v_h \in V_{gh}} \|u - v_h\|_1}_{\text{Approximationsfehler}} \leq \underbrace{\|u - \mathrm{int}_{V_h}(u)\|_1}_{\text{Interpolationsfehler}} = \|\cdot\|_1 \leq ? \leq ?\, h^?\ ? \quad (h \to 0).$$

$\mathrm{int}_{V_h}(u) \in V_{gh}$ (?)

  – Element → Abbildung → Referenzelement → Rückabbildung:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{1,\Omega}^2 &= \sum_r \|\cdot\|_{1,\delta_r}^2 = \sum_r \int_{\delta_r} (\ldots)\, dx \overset{x = x_{\delta_r}(\xi)}{=} \sum_r \int_\Delta [\ldots] |J_{\delta_r}|\, d\xi \leq \\ &\leq \sum_r ch^? \underbrace{\|\cdot\|_{1,\Delta}^2}_{} \overset{\xi = \xi_{\delta_r}(x)}{\leq} \ldots \leq ?\, h^?\ ?. \end{aligned}$$

Abschätzung des Interpolationsfehlers
auf Referenzelement Δ
→ dazu: Bramble/Hilbert-Lemma I.3.5 ([26])

- **Resultat:** Fehlerabschätzung in der $\|\cdot\|_1$-Norm (H^1-Norm) (siehe Punkt 4.4.2 und 4.4.3) !

■ **Interessant sind aber auch Fehlerabschätzungen in anderen Normen:**

- L_2-Norm $\|\cdot\|_{0,\Omega}$: $\to$ Punkt 4.4.4,
- L_∞-Norm $\|\cdot\|_{0,\infty,\Omega}$: $\to$ Punkt 4.4.5,
- W^1_∞-Norm $\|\cdot\|_{1,\infty,\Omega}$: $\to$ Punkt 4.4.5,
- L_p-Norm $\|\cdot\|_{0,p,\Omega}$: $\to$ siehe Literatur, z.B. [9],
- W^1_p-Norm $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$: $\to$ siehe Literatur, z.B. [9].

$\vdots$

4.4.2 Der Approximationssatz

■ **Satz 4.5:** (Approximationssatz)

Vor.:

1. $\Omega \subset I\!R^m$ † Gebiet mit $\Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1}$ sei regulär triangularisiert im Sinne der Definition 4.3, d.h., $\forall h \in \Theta$ gilt:

   $$\bar{\Omega} = \bigcup_{r \in I\!R_h} \bar{\delta}_r,\ \delta_r \underset{\xi=\xi_{\delta_r}(x)}{\overset{x=x_{\delta_r}(\xi)}{\longleftrightarrow}} \Delta\text{: (4.7) – (4.9).}$$

   Die Abb. $x_{\delta_r}(\cdot) \in \mathcal{P}_1(\Delta)$ sei zunächst eine affine lineare Abbildung.

2. $\mathcal{F}(\Delta) = \text{span}\,\{p^{(\alpha)}(\xi) : \alpha \in A\} \supset \mathcal{P}_k(\Delta)$.

3. $\underset{\text{a)}}{u \in W_2^{k+1}(\Omega)}$ bzw. allgemein $\underset{\text{b)}}{u \in W_2^{k+1}(\delta_r)}$ $\quad \forall r \in I\!R_h \quad \forall h \in \Theta$.

Bh.: $\exists\, a_{s,k+1} = \text{const.} > 0$ (unabhängig von h und u):

$$(4.16) \qquad \inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{s,\Omega} \le a_{s,k+1} h^{k+1-s} \begin{cases} |u|_{k+1,\Omega}, & \text{a)} \\ \left(\sum\limits_{r \in I\!R_h} |u|^2_{k+1,\delta_r} \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{b)} \end{cases}$$

für $s = 0, 1$.

Beweis:

- O. B. d. Allg. führen wir den Beweis für den Fall:

  $$m = 2, k = 1, \Delta = \ ,\ \text{d.h., } \mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{P}_1,\ \text{a) und } s = 1.$$

  Beweistechnik läßt sich aber sofort auf den allgemeinen Fall übertragen (vergleiche auch Bemerkung 4.6).

- Sei also $u \in W_2^2(\Omega)$ und $\Omega \subset I\!R^2$ †, $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Aus Einbettungssatz I.3.5 (Numerik I [26]) folgt:

  $$W_p^{k+1}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \quad \text{falls} \quad (k+1)\,p > m.$$

  Immer: $(k+1)\cdot 2 \ge 4 > m = 1,2,3$ für $k = 1,2,3,\ldots$.
  Also gilt: $W_2^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, insbesondere $\exists\, c_E = \text{const.} > 0$:

  $$(4.17) \qquad \boxed{\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \le c_E \|u\|_{2,\Omega} \quad \forall u \in W_2^2(\Omega)}$$

- Führen Beweis in 4 Schritten:

1. Interpolant:

$$v_h = I_h u \equiv \mathrm{int}_{V_h}(u) := \sum_{i\in\bar{\omega}_h} u(x^{(i)})p^{(i)}(x)$$

in inf (4.16) einsetzen:

$$\underset{s=1}{\Longrightarrow} \quad \inf_{v_h\in V_h} |u-v_h|_{1,\Omega} \le |\underbrace{u-I_h u}_{=:\, e_h}|_{1,\Omega}$$

Interpolationsfehler

2. Abbildung: $\delta_r \to \Delta$

$$\begin{aligned}
|\underbrace{u-I_h u}_{=:e_h}|^2_{1,\Omega} &= \sum_{r\in I\!R_h} \int_{\delta_r} |\nabla_x e_h|^2\,dx \overset{\nabla_x = J_{\delta_r}^{-T}\nabla_\xi}{=} \\
&= \sum_{r\in I\!R_h} \int_{\Delta} |J_{\delta_r}^{-T}\nabla_\xi e_h(x_{\delta_r}(\xi))|^2 |J_{\delta_r}|\,d\xi \le \\
&\overset{\downarrow}{\le} \bar{c}_1 c_3^2 \sum_{r\in I\!R_h} h_r^{m-2} \int_{\Delta} |\nabla_\xi e_h(x_{\delta_r}(\xi))|^2\,d\xi \le \\
&\le \bar{c}_1 c_3^2 \sum_{r\in I\!R_h} h^{m-2} \underbrace{\int_{\Delta} |\nabla_\xi e_h(x_{\delta_r}(\xi))|^2\,d\xi}_{=|e_h(x_{\delta_r}(\xi))|^2_{1,\Delta}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (4.7) & \underline{c}_1 h^m \le |J_{\delta_r}| \le \bar{c}_1 h_r^m \le \bar{c}_1 h^m \\ (4.9) & \|J_{\delta_r}^{-T}\| \le \bar{c}_3 h_r^{-1} \le c_3 h^{-1} \end{array}}$$

3. Anwendung des Lemmas I.3.5 ([26]) von Bramble & Hilbert auf dem Referenzelement Δ:

(4.18) $$\boxed{|e_h(x_{\delta_r}(\xi))|_{1,\Delta} \le c_B |u(x_{\delta_r}(\xi))|_{2,\Delta}} \quad (\downarrow)$$

$$\le \bar{c}_1 c_3^2 c_B^2 \sum_{r\in I\!R_h} h^{m-2} \underbrace{\int_{\Delta} \sum_{|\alpha|=2} |\partial_\xi^\alpha u(x_{\delta_r}(\xi))|^2\,d\xi}_{m=2:\ \int_\Delta \left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_2^2}\right)^2\right\} d\xi_1\,d\xi_2} =$$

4. Rückabbildung: $\Delta \to \delta_r$

$$= \bar{c}_1 c_3^2 c_B^2 \sum_{r \in I\!R_h} h^{m-2} \int_{\delta_r} \sum_{|\alpha|=2} |\partial_\xi^\alpha u(x)|^2 |J_{\delta_r}^{-1}| \, dx$$

$$\nabla_\xi \otimes \nabla_\xi u = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|=2} |\partial_\xi^\alpha u(x)|^2 = |\nabla_\xi \otimes \nabla_\xi u|^2 = |J_{\delta_r} \nabla_x \otimes J_{\delta_r} \nabla_x u|^2 \\ &\overset{(4.19)}{\leq} \|J_{\delta_r}\|^4 |\nabla_x \otimes \nabla_x u|^2 = \|J_{\delta_r}\|^4 \sum_{|\alpha|=2} |\partial_x^\alpha u|^2 \end{aligned}}$$

$$\leq \bar{c}_1 c_3^2 c_B^2 \sum_{r \in I\!R_h} h^{m-2} \underline{c}_1^{-1} h^{-m} c_2^4 h^4 \int_{\delta_r} \sum_{|\alpha|=2} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 \, dx =$$

$$= \bar{c}_1 \underline{c}_1^{-1} c_3^2 c_B^2 c_2^4 \sum_{r \in I\!R_h} h^2 \int_{\delta_r} \sum_{|\alpha|=2} |\partial_x^\alpha u|^2 \, dx \leq a_{1,2}^2 h^2 |u|_{2,\Omega}^2. \qquad \#$$

- Verbleibt der Beweis der Abschätzung (4.18) $|e_h|_{1,\Delta} \leq c_B |u|_{2,\Delta}$:
  Dazu benötigen wir das Bramble & Hilbert-Lemma I.3.5 ([26]):

  $\boxed{\text{Wh}}$

Vor.:	$\Delta \subset I\!R^m$ † Gebiet: $\partial\Delta \in C^{0,1}$,
	$1 \leq p < \infty, k \in \{0, 1, \ldots\}$,
	$l(\cdot) = < l, \cdot > \in [W_p^{k+1}(\Delta)]^* : l(q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}_k$.
Bh.:	Dann gilt:
	$$\lvert l(u) \rvert \leq c \lvert u \rvert_{k+1,p,\Delta} \quad \forall u \in W_p^{k+1}(\Delta)$$
	mit $c = c(\Delta)\lVert l \rVert_*, c(\Delta) = \text{const.}\ (\Delta, p, k) > 0$,
	$\lVert l \rVert_* \geq \lVert l \rVert_{[W_p^{k+1}(\Delta)]^*}$.

  $m = 2, k = 1, p = 2$:

  Es sei $w \in W_2^1(\Delta)$ zunächst beliebige, aber fixierte Funktion.
  Betrachten

$$l(u) := \int_\Delta \nabla_\xi^T w(\xi) \nabla_\xi \left(\overbrace{\underbrace{u(x_{\delta_r}(\xi))}_{=:u(\xi)} - \underbrace{\text{int}_{V_h}(u(x_{\delta_r}(\xi)))}_{=\text{int}_{\mathcal{F}(\Delta)}(u(\xi))}}^{=e_h(x_{\delta_r}(\xi))} \right) d\xi \ !$$

$\Rightarrow$ 1) $l(\cdot)$ ist linear, da Interpolation linear ist !

2) l ist beschränkt auf $W_2^2(\Delta)$:

$$\mathrm{int}_{\mathcal{F}(\Delta)}(u) = \sum_{\alpha\in A} \underset{\overset{\|}{u(x^{(r,\alpha)})}}{u(\xi^{(\alpha)})}\, p^{(\alpha)}(\xi)$$

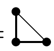
$$\begin{aligned}
|l(u)| &\overset{\text{Cauchy}}{\leq} |w|_{1,\Delta} |u - \mathrm{int}_{\mathcal{F}(\Delta)}(u)|_{1,\Delta} \leq \\
&\leq |w|_{1,\Delta} \left\{ |u|_{1,\Delta} + |\sum_{\alpha\in A} u(\xi^{(\alpha)}) p^{(\alpha)}(\xi)|_{1,\Delta} \right\} \leq \\
&\leq |w|_{1,\Delta} \left\{ |u|_{1,\Delta} + \sum_{\alpha\in A} |u(\xi^{(\alpha)})| |p^{(\alpha)}(\xi)|_{1,\Delta} \right\} = \\
&= |w|_{1,\Delta} \left\{ |u|_{1,\Delta} + \sum_{\alpha\in A} |\underbrace{u(\xi^{(\alpha)})}_{\leq c_E(\Delta)\|u\|_{2,\Delta}}| \, |p^{(\alpha)}(\xi)|_{1,\Delta} \right\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Einbettungssatz I.3.5 ([26]): } W_2^2(\Delta) \hookrightarrow C(\bar{\Delta})}$$

$$\leq \underbrace{|w|_{1,\Delta} \left\{ 1 + c_E(\Delta) \sum_{\alpha\in A} |p^{(\alpha)}(\xi)|_{1,\Delta} \right\}}_{=\|l\|_*} \|u\|_{2,\Delta}.$$

3) $l(q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}_1$ da $q(\xi) \underset{\uparrow}{=} \mathrm{int}_{\mathcal{F}(\Delta)}(q(\xi)) \quad \forall \xi \in \bar{\Delta}.$

$\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}(\Delta)$, z.B. $\mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{P}_1$

für $\Delta =$ 

$\Rightarrow$ <u>B & H-Lemma:</u>

$$\begin{aligned}
|l(u)| &\leq c(\Delta) \|l\|_* |u|_{2,\Delta} = \\
&= c(\Delta)\{\ldots\} |w|_{1,\Delta} |u(x_{\delta_r}(\xi))|_{2,\Delta}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Wählen speziell:

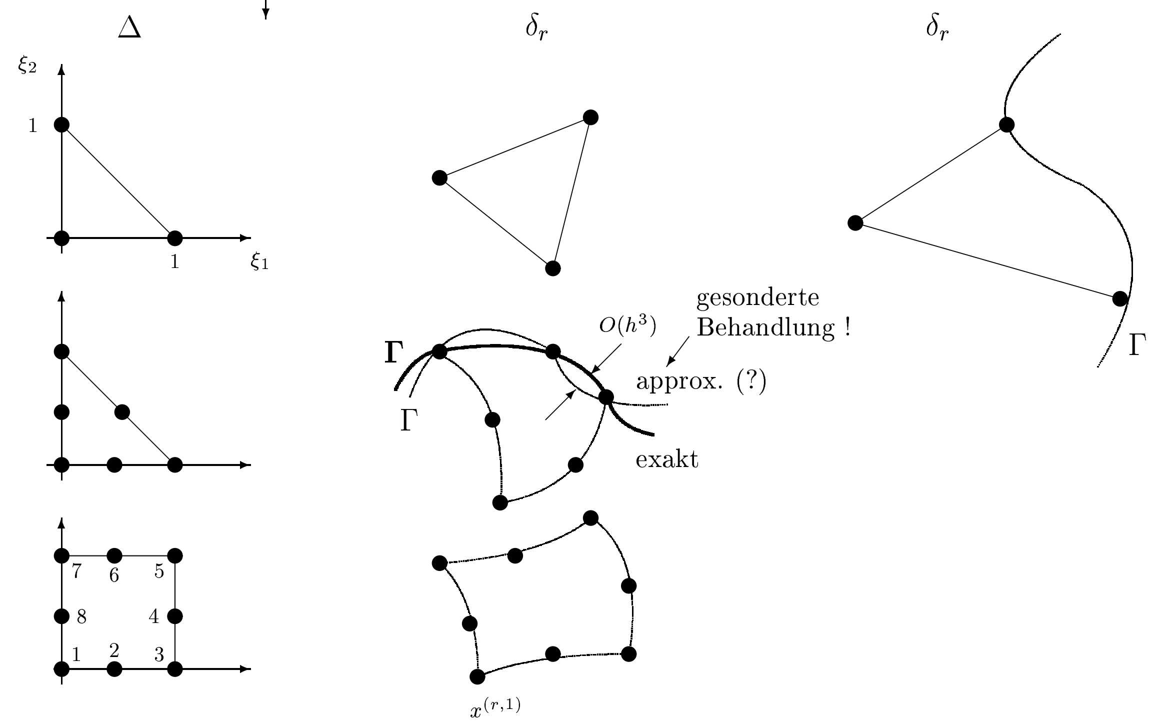
$$w = e_h = u - \mathrm{int}_{\mathcal{F}(\Delta)}(u) = u(x_{\delta_r}(\xi)) - \mathrm{int}_{V_h}(u(x_{\delta_r}(\xi))) \in W_2^1(\Delta).$$

$$\Rightarrow \quad |e_h|_{1,\Delta}^2 = l(u) \leq \underbrace{c(\Delta) \left\{ 1 + c_E(\Delta) \sum_{\alpha\in A} |p^{(\alpha)}|_{1,\Delta} \right\}}_{=:c_B} |e_h|_{1,\Delta} |u(x_{\delta_r}(\xi))|_{2,\Delta}.$$

q.e.d.

■ **Bemerkung 4.6:**

1. Falls $\underline{x_{\delta_r}(\cdot) \in \mathcal{F}(\Delta)}$ $(\supset \mathcal{P}_k)$ oder $\in C^{k+1}(\bar{\Delta})$



$\vdots$

$x_{\delta_r}(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in A} x^{(r,\alpha)} p^{(\alpha)}(\xi)$

$\boxed{\text{isoparametrische Technik}}$ $\boxed{\text{allgemein krummlinige Technik}}$

(4.20) $$\left| \frac{\partial^{|\beta|} x_{\delta_r,i}(\xi)}{\partial \xi^\beta} \right| \leq \bar{c}_2 h^{|\beta|} \; \forall \beta : |\beta| \leq k+1,$$
$$\forall \xi \in \Delta,\ \forall i = \overline{1,m},\ \forall r \in I\!R_h\ \forall h \in \Theta,\ \text{(vergleiche (4.9))}$$

dann gilt (vergleiche (4.19) Beweisschritt 4. !):

(4.16') $$\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{s,\Omega} \leq a_{s,k+1} h^{k+1-s} \|u\|_{k+1,\Omega},$$

(bzw. $\|u\|_{k+1,\Omega} \mapsto (\sum\limits_{r \in I\!R_h} \|u\|^2_{k+1,\delta_r})^{0.5}$).

2. Aus (4.16) bzw. (4.16′) folgt sofort:

(4.16") $$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \leq \bar{a}_{1,k+1} h^k \begin{cases} |u|_{k+1,\Omega}, & \text{Satz 4.5,} \\ \|u\|_{k+1,\Omega}, & \text{Bemerkung 4.6.1,} \end{cases}$$

mit $\bar{a}^2_{1,k+1} = a^2_{1,k+1} + a^2_{0,k+1} h^2$.

3. Die Abschätzungen (4.16), (4.16'), (4.16") sind bezüglich der h-Potenz optimal (vergleiche Ü 4.8) !
d.h., $\exists\, u \in W_2^{k+1}(\Omega) : \inf\limits_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{s,\Omega} \geq c h^{k+1-s}$
mit einer h-unabhängigen, positiven Konstanten c.

4. Für $u \in W_2^l(\Omega), 1 < l \leq k+1 \quad (l \in I\!R \text{ reell})$ gilt:

$$\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{s,\Omega} \leq a_{s,l} h^{l-s} \|u\|_{l,\Omega}.$$

5. Falls $u \in W_2^{l_r}(\delta_r),\ 1 < l_r \leq k+1,\ \forall r \in I\!R_h\ \forall h \in \Theta$, gilt:

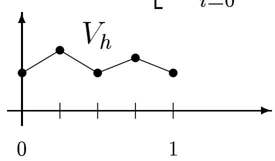
$$\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{s,\Omega} \leq \left(\sum_{r \in I\!R_h} a_{1,l_r} h_r^{2(l_r - s)} \|u\|_{l_r,\delta_r}^2 \right)^{0.5}, \quad s = 0, 1.$$

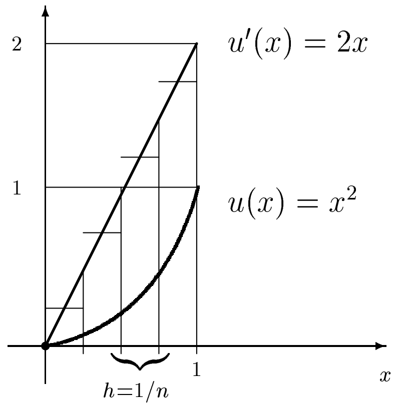
Netzgraduierung möglich !

■ $\boxed{\textbf{Ü 4.8}}$ Man zeige, daß für $m = 1 : \Omega = (0,1);\ k = 1 : \mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{P}_1$, $u(x) = x^2$ gilt:

$$\inf_{v_h \in V_h} \int_0^1 |u' - v_h'|^2 \, dx \left[= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3} h^3 \right] = \frac{1}{3} h^2$$

$h = \frac{1}{n}$





■ $\boxed{\textbf{Ü 4.9}}$ Zeigen Sie die limitierte Vollständigkeit der Familie der FE-Räume $\{V_{0h}\}_{h \in \Theta}$ in V_0 !

4.4.3 Konvergenz in der H^1-Norm

■ **Satz 4.7.:** (W_2^1–Konvergenzsatz)

Vor.: 1. Standardvoraussetzungen an Variationsformulierung:

1) $F \in V_0^*$.

2) $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to I\!R^1$ - stetige Bilinearform, $V = W_2^1(\Omega)$:

2a) $a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_0$,

2b) $|a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\|_1 \|v\|_1 \quad \forall u,v \in V_0$.

2. Vor. 1 und 2 von Satz 4.5 (Approximationssatz).

3. $V_{gh} = g_h + V_{0h} \subset V_g$ – endliche Hyperebene mit (siehe Punkt 4.2.3) $V_{0h} \subset V_0$ – FE-Unterrraum, $g_h \in V_g \cap V_h$ gegeben.

4. $u \in V_g : \quad a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_0, \qquad (4.1)$

$u_h \in V_{gh} : \quad a(u_h,v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_{0h}. \qquad (4.1)_h$

5. Regularitätsresultat:

a) $u \in V_g \cap W_2^{k+1}(\Omega)$,

b) $u \in V_g$ und $u \in W_2^{k+1}(\delta_r) \quad \forall r \in I\!R_h \quad \forall h \in \Theta$.

Bh.: Dann gilt:

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \leq \underbrace{\frac{\mu_2}{\mu_1}\bar{a}_{1,k+1}}_{=:c_{1,k+1}} h^k \begin{cases} |u|_{k+1,\Omega} & , \text{ a}), \\ \left(\sum\limits_{r \in I\!R_h} |u|^2_{k+1,\delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} & , \text{ b}). \end{cases} \tag{4.21}$$

Beweis: folgt sofort aus (4.15) = Satz I.4.3 [26] von Cea und Approximationssatz 4.5 ((4.16') aus Bemerkung 4.6.2):

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cea: Vor. 1., 3., 4.}}}{\leq} \frac{\mu_2}{\mu_1} \underbrace{\inf_{v_h \in V_{gh}} \|u-v_h\|_1}_{\text{Approx.-Probl.}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vor. 2., 5. (vergleiche Satz 4.5)}}}{\leq} \frac{\mu_2}{\mu_1}\bar{a}_{1,k+1} h^k \begin{cases} |u|_{k+1,\Omega} & , \text{ a}), \\ \left(\sum\limits_{r \in I\!R_h} |u|^2_{k+1,\delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} & , \text{ b}). \end{cases}$$

q.e.d.

■ **Bemerkung 4.8:**

1. Falls anstelle von (4.9) die Bedingung (4.20) von Bemerkung 4.6 gilt, dann folgt die Fehlerabschätzung mit der Vollnorm $\|\cdot\|_{k+1,\Omega}$:

$$(4.21') \qquad \|u-u_h\|_{1,\Omega} \le \tfrac{\mu_2}{\mu_1}\bar{a}_{1,k+1}h^k \begin{cases} \|u\|_{k+1,\Omega} & , \text{ a)}, \\ \left(\sum\limits_{r\in I\!R_h} \|u\|^2_{k+1,\delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} & , \text{ b)}. \end{cases}$$

2. Falls $u \in V_g \cap W_2^l(\Omega)$ mit $1 < l \le k+1$ ($l \in I\!R$ reell), dann gilt:

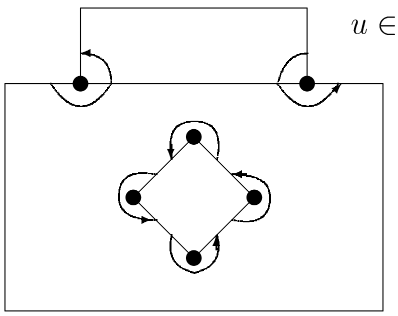
$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \le \frac{\mu_2}{\mu_1}\bar{a}_{1,k+1}h^{l-1}\|u\|_{l,\Omega}.$$

3. Falls $u \in W_2^{l_r}(\delta_r),\ 1 < l_r \le k+1,\ \forall r \in I\!R_h\ \forall h \in \Theta$, dann gilt:

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \le \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\sum_{r\in I\!R_h} \bar{a}_{1,l_r}\ \underbrace{h_r^{2(l_r-1)}}\ \|u\|^2_{l_r,\delta_r}\right)^{0.5}$$

Netzgraduierung: $\approx h^{2k}$ [Oganesian/Ruchowez, 1968]

4. Konkretes Beispiel: $m=2, k=1, \mathcal{F}(\Delta)=\mathcal{P}_1, \Delta =$, $x_{\delta_r}(\cdot) \in \mathcal{P}_1$:



$u \in W_2^{1+s_r}(\delta_r), \quad 0 < s \le s_r \le 1:$
$s_r = s_r(\partial\Omega, \text{RB}, \ldots) = s_r(\bullet),$
$s = s(\partial\Omega, \text{RB}, \ldots) = s(\bullet).$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u-u_h\|_{1,\Omega} &\le \tfrac{\mu_2}{\mu_1}\left(\sum_{r\in I\!R_h} \bar{a}_{1,1+s_r}h_r^{2s_r}|u|^2_{1+s_r,\delta_r}\right)^{0.5} \\ &\le \tfrac{\mu_2}{\mu_1}\bar{a}_{1,1+s}h^s\left(\sum_{r\in I\!R_h} |u|^2_{1+s_r,\delta_r}\right)^{0.5}. \end{aligned}$$

5. A-priori-Abschätzung von $|u|_{k+1,\Omega}$ bzw. $\|u\|_{k+1,\Omega}$ mit den Eingangsdaten ($\curvearrowright$ W_2^{k+1}–Koerzitivität):
   z.B. Poisson-Gleichung mit Dirichletschen RB in einem konvexen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

   KF: $$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

   VF: Gesucht $$\begin{aligned} u \in V_0 &= \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega): \\ \int_\Omega \nabla^T u \nabla v \, dx &= \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V_0. \end{aligned}$$

   W_2^2–Koerzitivität:

   Aus $f \in L_2(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ †, konvex, $\partial\Omega \in C^{0,1}$ folgt

1. $\exists!\, u \in V_0 \cap W_2^2(\Omega)$
2. $|u|_{2,\Omega} \le 1 \cdot \|f\|_{0,\Omega}$

   Beweis: mms $$\int_\Omega f^2 \, dx = \int_\Omega \Delta u \Delta u \, dx \overset{\text{partielle Integration}}{=} \dots$$ #

4.4.4 Nitsche-Trick und L_2–Konvergenz

- **Trivial:** $\|u - u_h\|_{0,\Omega} \le \|u - u_h\|_{1,\Omega} \le c_{1,k+1} h^k |u|_{k+1,\Omega}$
  Approximation: $\inf\limits_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{0,\Omega} \le \bar{a}_{0,k+1} h^{k+1} |u|_{k+1,\Omega}$ h ?

- **Satz 4.9:** (L_2–Konvergenz)

Vor.:	1. Vor. 1 – 4 und 5 a) aus Satz 4.7 seien erfüllt ($m = 1, 2, 3$).
	2. W_2^2–Koerzitivität der adjungierten Aufgabe, d.h., für die Aufgabe Gesucht $w \in V_0 : a(v, w) = \int_\Omega e v \, dx \quad \forall v \in V_0$ mit $e \in L_2(\Omega)$ gilt:
	1) $\exists!\, w \in V_0$ (Lax-Milgram): $w \in W_2^2(\Omega)$!
	2) $|w|_{2,\Omega} \le c_K \|e\|_{0,\Omega}$ bzw. $\|w\|_{2,\Omega} \le c_K \|e\|_{0,\Omega}$. $\Rightarrow$ $\|w\|_{1,\Omega} \le c\|e\|_{0,\Omega}$
Bh.:	$\exists\, c_{0,k+1} = \text{const.} > 0, c_{0,k+1} \ne c(h)$:
(4.22)	$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \le c_{0,k+1} h^{k+1} |u|_{k+1,\Omega}$.

Beweis: (Beweistechnik: Nitsche-Trick, 1968 [32])

- Betrachten Hilfsaufgabe:

(4.23) Gesucht $w \in V_0 : a(v,w) = \underset{\Omega}{\int} \underset{\substack{\uparrow \\ e_h = u - u_h \in V_0 \subset L_2(\Omega) \\ (4.1) \quad (4.1)_h \\ \text{Diskretisierungsfehler}}}{e_h} v \, dx \quad \forall v \in V_0.$

- $$\begin{array}{llcll} (4.1) \text{ exakte Lösung } u \in V_g : & a(u,v) & = & < F, v > & \forall v \in V_0, \\ (4.1)_h \text{ FE-Lösung } u_h \in V_{gh} : & a(u_h, v_h) & = & < F, v_h > & \forall v_h \in V_{0h}, \end{array}$$

$$\text{(4.24)} \qquad \underline{\underline{a(e_h, v_h) \;=\; 0 \quad \forall v_h \in V_{0h}.}}$$

- Vor. 2. Satz 4.9: $\Rightarrow$ 1. $\exists!\, w \in V_0 \cap W_2^2(\Omega)$: (4.23)
  2. $|w|_{2,\Omega} \leq c_K \|e_h\|_{0,\Omega} = c_K \|u - u_h\|_{0,\Omega}.$ (4.25)

- Setzen in (4.23) $v = e_h = \underset{\substack{\cup\!\!\!\!\!\perp \\ V_g}}{u} - \underset{\substack{\cup\!\!\!\!\!\perp \\ V_{gh}}}{u_h} \in V_0$:

$$\Rightarrow \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 = \|e_h\|_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega e_h \cdot e_h \, dx = a(e_h, w)$$

$$= \quad a(u - u_h, w) \underset{\substack{\uparrow \\ (4.24)\ a(u-u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_{0h} \\ w_h = \text{int}_{V_h}(w) \in V_{0h} (w \in C(\bar{\Omega}) \text{ Einbettung !})}}{=} a(u - u_h, w - w_h) \leq$$

$$\leq \quad \mu_2 \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|w - w_h\|_{1,\Omega} \leq$$

Satz 4.7: W_2^1–Konvergenz
Satz 4.5: Approximationssatz, Bemerkung 4.6.2, $k = 1$

$$\leq \quad \mu_2 c_{1,k+1} h^k |u|_{k+1,\Omega} \bar{a}_{1,2} h |w|_{2,\Omega} \leq$$

$$\overset{(4.25)}{\leq} \quad \mu_2 c_{1,k+1} \bar{a}_{1,2} h^{k+1} |u|_{k+1,\Omega} \cdot c_K \|u - u_h\|_{0,\Omega}$$

$$\Rightarrow \|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq \underbrace{\mu_2 c_{1,k+1} \bar{a}_{1,2} c_K}_{=:c_{0,k+1}} h^{k+1} |u|_{k+1,\Omega}.$$ **q.e.d.**

■ **Ü 4.10** Beweisen Sie die L_2–Fehlerabschätzung (4.22) mit Hilfe von Satz I.4.4 [26] (Dualitätsargument von Aubin & Nitsche) ! Schwächen Sie die Voraussetzung 2 von Satz 4.9 ab ($W_2^{1+s}(\Omega)$–Koerzitivität ($0 < s \leq 1$) der adjungierten Aufgabe) !

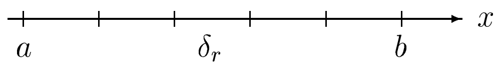
4.4.5 Bemerkungen zur L_∞– und W^1_∞–Konvergenz

- **Zeigen unter den Voraussetzungen des Satzes 4.9 (L_2–Konvergenz) die Abschätzung**

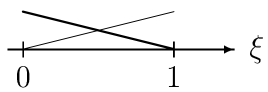
(4.26) $$\| \underbrace{u-u_h}_{\in C(\bar\Omega)} \|_{\underbrace{0,\infty,\Omega}_{L_\infty(\Omega)}} = \max_{x\in\bar\Omega} |u(x)-u_h(x)| \le ch^{k+1-\frac{m}{2}}|u|_{k+1,\Omega}$$

mit einer positiven Konstante $c = \text{const.} > 0,\ c \neq c(h,u)$.

- <u>**Beispiel:**</u> <u>$m=1$:</u> $\Omega = (a,b)$



$\bar\Delta = [0,1]$,



$k=1,\ \mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{P}_1$.

Es gilt: $W^1_2(a,b) \hookrightarrow C[a,b]$ (Punkt I.3.8, Numerik I [26]):

$\Rightarrow \|u-u_h\|_{0,\infty,\Omega} \le c_E\|u-u_h\|_{1,\Omega} \le c_E c_{1,2} h |u|_{2,2,\Omega}$.

Aber: a) (4.26) $\curvearrowright$ $h^{\frac{3}{2}}$, falls $u \in W^2_2(\Omega)$,

b) $\|u-u_h\|_{0,\infty,h} = O(h^2)$, falls $u \in W^2_\infty(\Omega)$, mms*.

Für <u>$m = 2,3$</u> gilt <u>nicht</u> $W^1_2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar\Omega)$:

$\curvearrowright$ L_∞–Abschätzungen sind <u>nicht</u> trivial !

- **Beweisen als Hilfsmittel zunächst sogenannte <u>inverse Ungleichungen:</u>**

<u>**Lemma 4.10:**</u> (Inverse Ungleichungen)

<u>Vor.:</u> Vor. 1. (Reguläre Triangularisierung von $\Omega \subset I\!R^m$) aus Satz 4.5 (Approximationssatz) sei erfüllt und $\dim \mathcal{F}(\Delta) = |A| < \infty$.

<u>Bh.:</u> Dann gelten die Ungleichungen

(4.27)
a) $\|v_h\|_{1,\Omega} \le ch^{-1}\|v_h\|_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h$,

b) $\underbrace{\|v_h\|_{0,\infty,\Omega}}_{C(\bar\Omega)} \le ch^{-\frac{m}{2}}\|v_h\|_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h$.

$\pitchfork\ C(\bar\Omega)$

Beweis:

a) mms (vergleiche auch Punkt 4.3).

b)
$$
\begin{aligned}
\underset{\substack{\cap\!\!\!|\\ C(\bar\Omega)}}{\|v_h\|_{0,\infty,\Omega}} &= \max_{x\in\bar\Omega=\cup\bar\delta_r} |v_h(x)| \underset{\substack{\uparrow\\ \exists\, r\in \mathbb{R}_h}}{=} \max_{x\in\bar\delta_r} |v_h(x)| = \\
&= \max_{\xi\in\bar\Delta} |v_h(x_{\delta_r}(\xi))| = \\
&= \max_{\xi\in\bar\Delta} \Big|\sum_{\alpha\in A_r} v^{(r,\alpha)} p^{(\alpha)}(\xi)\Big| \le
\end{aligned}
$$

Normen sind in endlichdimensionalen Räumen äquivalent !

$$
\begin{aligned}
&\le c_A(\Delta)\Big\|\sum_{\alpha\in A_r} v^{(r,\alpha)} p^{(\alpha)}(\xi)\Big\|_{0,\Delta} = c_A(\Delta)\|v_h(x_{\delta_r}(\xi))\|_{0,\Delta} = \\
&= c_A(\Delta)\sqrt{\int_{\delta_r} v_h^2(x)|J_{\delta_r}^{-1}|\,dx} \overset{(4.7)}{\le} \\
&\overset{(4.7)}{\le} c_A(\Delta)\underline{c}_1^{-0.5} h^{-\frac{m}{2}}\|v_h\|_{0,\delta_r} \le \underbrace{c_A(\Delta)\underline{c}_1^{-0.5}} h^{-\frac{m}{2}}\|v_h\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}
$$

■ $\boxed{\textbf{Ü 4.11}}$ Man bestimme $c_A(\Delta)$ für lineares Dreieckselement ($m = 2$, $k = 1$, $\mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{P}_1$) !

■ **Bemerkung 4.11:** (zu inversen Ungleichungen)

Seien $\|\cdot\|_{(1)}$ und $\|\cdot\|_{(2)}$ zwei Normen in V_h. Aufgrund der Äquivalenz von Normen in endlichdimensionalen Räumen $\exists\ \underline{c} = \underline{c}(h)$ und $\bar c = \bar c(h) = \text{const.} > 0$:

(4.28) $$\underline{c}(h)\|v_h\|_{(2)} \le \|v_h\|_{(1)} \le \bar c(h)\|v_h\|_{(2)} \quad \forall v_h \in V_h.$$

Frage: $\underline{c} = \underline{c}(h) = \underline{\alpha} h^{?}$ mit $\underline{\alpha} \ne \underline{\alpha}(h)$?
$\bar c = \bar c(h) = \bar\alpha h^{?}$ mit $\bar\alpha \ne \bar\alpha(h)$?

Technik:
- Abbildung $\delta_r \to \Delta$,
- Äquivalenz der Normen auf Δ mit h-unabhängigen Konstanten,
- Rückabbildung $\Delta \to \delta_r$.

■ $\boxed{\textbf{Ü 4.12}}$ Unter den Vor. 1. und 2. ($\mathcal{P}_k(\Delta) \subset \mathcal{F}(\Delta)$, $\dim \mathcal{F}(\Delta) = |A| < \infty$) aus dem Approximationssatz 4.5 zeige man die inverse Ungleichung

$$\|v_h\|_{L_\infty(\Omega)} \le c h^{-\frac{m}{p}} \|v_h\|_{Lp(\Omega)}$$

(entspricht $(4.27)_{b)}$ für $p = 2$).

■ **Satz 4.12:** (L_∞-Abschätzung für H^{k+1}–Lösungen)

> Vor.: Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.9 (L_2–Konv.) erfüllt.
>
> Bh.: $\exists\, c = \text{const.} > 0 : c \neq c(h,u)$:
>
> (4.26) $$\|\underbrace{\overset{(4.1)}{u} - \overset{(4.1)_h}{u_h}}_{\in C(\bar\Omega)}\|_{\underset{L_\infty(\Omega)}{0,\infty,\Omega}} = \max_{x\in\bar\Omega} |u(x) - u_h(x)| \le c h^{k+1-\frac{m}{2}} |u|_{k+1,\Omega}.$$

Beweis:

- $u \in W_2^{k+1}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar\Omega)$ für $k \ge 1$ und $m = 1,2,3$.
  Betrachten $v_h = I_h u = \text{int}_{V_h}(u) \in V_{gh}$ Interpolant der Lösung $u \in V_g \cap W_2^{k+1}(\Omega)$ von (4.1).
  $\Rightarrow$

  (4.29) $$\|u-u_h\|_{0,\infty,\Omega} \le \underbrace{\|u - I_h u\|_{0,\infty,\Omega}}_{\substack{\text{Interpolationsfeh-}\\ \text{ler in } L_\infty\text{-Norm}}} + \|\underbrace{I_h u - u_h}_{\substack{\in V_{0h} \subset V_h\\ \text{d.h., Lemma 4.10}\\ \text{b) anwendbar}}}\|_{0,\infty,\Omega}.$$

- Schätzen zunächst den Interpolationsfehler $\|u - I_h u\|_{0,\infty,\Omega}$ mit Hilfe des Bramble & Hilbert–Lemmas I.3.5 (Numerik I [26]) ab:

  (4.30) $$\|\underbrace{u - I_h u}_{\in C(\bar\Omega)}\|_{0,\infty,\Omega} \underset{\substack{\uparrow\\ \exists\, r \in \mathbb{R}_h}}{=} \max_{x\in\bar\delta_r} |u(x) - I_h u(x)| =$$

  $$= \max_{\xi\in\bar\Delta} |u(x_{\delta_r}(\xi)) - \underset{\substack{\|\\ \text{int}_{\mathcal{F}(\Delta)}(u(\xi))}}{I_{\mathcal{F}(\Delta)} u(x_{\delta_r}(\xi))}| =$$

  $$= \max_{\xi\in\bar\Delta} |\underbrace{\underbrace{u(x_{\delta_r}(\xi))}_{=u(\xi)} - \underbrace{I_{\mathcal{F}(\Delta)} u(x_{\delta_r}(\xi))}_{= \sum_{\alpha\in A_r} \underbrace{u(x_{\delta_r}(\xi^{(\alpha)}))}_{=u(\xi^{(\alpha)})} p^{(\alpha)}(\xi)}}_{=:l(u(\xi))}|$$

  $$= \max_{\xi\in\bar\Delta} |l(u(\xi))| = |l(u(\bar\xi))| \le$$

  $\exists\, \bar\xi \in \bar\Delta$ $(\bar\xi = \bar\xi(u) = \bar\xi$ (Lsg.)) !

  $\boxed{\text{B \& H-Lemma}}$ $l(v) := v(\bar\xi) - I_{\mathcal{F}(\Delta)} v(\bar\xi)$:
  1) $l \in [W_2^{k+1}(\Delta)]^*$ (mms)
  2) $l(q) = q(\bar\xi) - I_{\mathcal{F}(\Delta)} q(\bar\xi) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}_k \subset \mathcal{F}(\Delta)$

  $$\le c_B |u|_{k+1,\Delta} = c_B \left(|u(x_\delta(\xi))|^2_{k+1,\Delta}\right)^{\frac12} \le$$

  $$\overset{(4.7),(4.8)}{\le} c_B \left(\bar c \frac{h^{2(k+1)}}{h^m} |u(x)|^2_{k+1,\delta_r}\right)^{\frac12} \le c h^{k+1-\frac{m}{2}} |u|_{k+1,\Omega}.$$

- Aus (4.29), (4.30) und den Sätzen 4.5 und 4.9 folgt:

$$
\begin{aligned}
\|u-u_h\|_{0,\infty,\Omega} &\le \underset{(4.30)}{\|u-I_hu\|_{0,\infty,\Omega}} + \underset{(4.27)\text{ inverse Ungleichung}}{\|I_hu-u_h\|_{0,\infty,\Omega}} \le \\
&\le ch^{k+1-\frac{m}{2}}|u|_{k+1,\Omega} + ch^{-\frac{m}{2}}\|I_hu-u_h\|_{0,\Omega} \le \\
&\le ch^{k+1-\frac{m}{2}}|u|_{k+1,\Omega} + ch^{-\frac{m}{2}}\{\underset{\substack{\text{Beweis von}\\ \text{Satz 4.5}}}{\|I_hu-u\|_{0,\Omega}} + \underset{\substack{\text{Satz 4.9}\\ (L_2\text{-Abschätzung})}}{\|u-u_h\|_{0,\Omega}}\} \le \\
&\le ch^{k+1,-\frac{m}{2}}|u|_{k+1,\Omega} + ch^{-\frac{m}{2}}\left\{a_{0,k+1}h^{k+1}|u|_{k+1,\Omega} + c_{0,k+1}h^{k+1}|u|_{k+1,\Omega}\right\} = \\
&= ch^{k+1-\frac{m}{2}}|u|_{k+1,\Omega}
\end{aligned}
$$

mit verschiedenen positiven Konstanten $c = \text{const.} \neq c(h,u)$.

q.e.d.

■ **Bemerkung 4.13:**

1. Falls u die stärkere Regularitätsvoraussetzung

   (4.31) $$u \in V_g \cap W_\infty^{k+1}(\Omega)$$

   erfüllt, dann gelten die Interpolationsfehlerabschätzungen ($\curvearrowright$ Approximationsfehlerabschätzungen)

   (4.32) $$|u-I_hu|_{s,\infty,\Omega} \le ch^{k+1-s}|u|_{k+1,\infty,\Omega}, \quad s=0,1.$$

   Beweis: Analog zu (4.30) mit $l \in [W_p^{k+1}(\Delta)]^*$, $p \to \infty$!

2. Frage: $\|u-u_h\|_{s,\infty,\Omega} \le\ ?$ falls $u \in V_g \cap W_\infty^{k+1}(\Omega)$, mit $s=0,1$.

   Antwort: nichttrivial !

   (a) Für $m=2, k=1, \mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{P}_1$  (lineares Dreieckselement):

   $$
   \begin{aligned}
   \|u-u_h\|_{0,\infty,\Omega} &\le ch^2\ |\log h|^{\frac{3}{2}}\ |u|_{2,\infty,\Omega},\\
   \|u-u_h\|_{1,\infty,\Omega} &\le ch\ \ |\log h|\ \ |u|_{2,\infty,\Omega}.
   \end{aligned}
   $$

   Beweistechnik:

   1 Methode der gewichteten Sobolev-Räume von Nitsche (1975)

   2 Methode der diskreten Greenschen Funktion von Scott (1975)

   Literatur: FEM-Standardwerk von Ciarlet [9].

   (b) Für „alle“ (?) anderen Fälle konnten quasioptimale L_∞– bzw. W_∞^1–Konvergenzabschätzungen, d.h., entsprechend der Approximationsordnung, bewiesen werden (siehe z.B. [9]).

4.5 Konvergenzanalysis im nichtstandarden Fall

4.5.1 Verletzung des Variationsprinzips (Variational Crimes)

- **Standardfall (Variationsprinzip = Galerkinprinzip):**

$$
\begin{array}{llcccccc}
(4.1) & \text{Ges. } u \in V_g & : & a(u,v) & = & <F,v> & \forall v \in V_0 & \subset V \\
 & \qquad \cup & & \downarrow & & \downarrow & \qquad \cup & \cup \\
(4.1)_h & \text{Ges. } u_h \in V_{gh} & : & a(u_h,v_h) & = & <F,v_h> & \forall v_h \in V_{0h} & \subset V_h \\
 & \qquad \boxed{\begin{smallmatrix}3\\ \checkmark\end{smallmatrix}} & & \boxed{\begin{smallmatrix}5\\ \checkmark\end{smallmatrix}} & & \boxed{\begin{smallmatrix}4\\ \checkmark\end{smallmatrix}} & \qquad \boxed{\begin{smallmatrix}2\\ \checkmark\end{smallmatrix}} & \boxed{\begin{smallmatrix}1\\ \checkmark\end{smallmatrix}}
\end{array}
$$

+ Standardvoraussetzungen: $\boxed{\begin{smallmatrix}6\\ \checkmark\end{smallmatrix}}$

$$
(4.33)\quad \begin{cases}
1) & F \in V_0^*. \\
2) & a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow I\!R^1 \text{ – stetige Bilinearform:} \\
2a) & a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|^2 \quad \forall v \in V_0, \\
2b) & |a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\| \, \|v\| \quad \forall v \in V_0.
\end{cases}
$$

- **Die Praxis zwingt uns oft, dieses standarde Vorgehen (Variationsprinzip) zu verletzen: $\curvearrowright$ Variational Crimes !**

1. Numerische Integration: $\int \longrightarrow \sum$

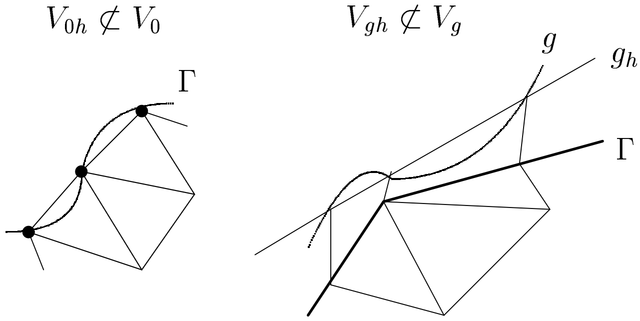
   In $(4.1)_h$: $a(\cdot,\cdot) \longrightarrow a_h(\cdot,\cdot)$ $\boxed{\cancel{5}}$ $\curvearrowright$ $\widetilde{(4.1)}_h$

   $<F,\cdot> \longrightarrow <F_h,\cdot>$ $\boxed{\cancel{4}}$

2. RB 1. Art können nicht immer in V_h exakt erfüllt werden, d.h., $V_{0h} \not\subset V_0$ $\boxed{\cancel{2}}$ und/oder $V_{gh} \not\subset V_g$ $\boxed{\cancel{3}}$, obwohl $\boldsymbol{V_h \subset V}$!

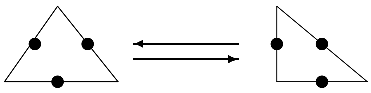
   Bsp.

   $V_{0h} \not\subset V_0$ $\qquad$ $V_{gh} \not\subset V_g$



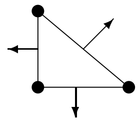
3. Konformität der Elemente ist verletzt (insbesondere bei PDgl. 4. Ordnung $\curvearrowright$ $V = H^2(\Omega)$!); d.h., $V_h \not\subset V$ $\boxed{\not A}$ (z.B. Benutzung von C^0–Elementen für PDgl. 4. Ordnung) !

   $\boxed{\text{Bsp.}}$ a) PDgl. 2. Ordnung: Crouzeix–Paviart–Element

   $\mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{P}_1$
   (siehe [5] 99 ff.)

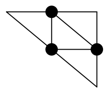
   b) PDgl. 4. Ordnung: Morley–Element

   $\mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{P}_2$
   (siehe [8] S. 110)

   $\cup$

   Schöberl–Element

   $\mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{P}_2$

4. Voraussetzungen $(4.33)_{2a)+2b)}$ $\boxed{6}$ müssen ergänzt werden durch Zusatzvoraussetzungen an die diskrete Bilinearform $a_h(\cdot,\cdot)$ $\curvearrowright$ (4.34) bzw. (4.39) !

4.5.2 Das erste Lemma von Strang

■ **Btr. die folgende Situation**

$$\begin{array}{lllcll}
(4.1) & \text{Ges. } u \in V_g & : a(u,v) & = & < F, v > & \forall v \in V_0 \subset V \\
 & \quad\;\; \cup & & & & \qquad\;\; \cup \quad\;\; \cup \\
(\widetilde{4.1})_h & \text{Ges. } u_h \in V_{gh} & : a_h(u,v) & = & < F_h, v_h > & \forall v_h \in V_{0h} \subset V_h \\
 & & \quad \boxed{\not b} & & \boxed{\not A} &
\end{array}$$

unter den Voraussetzungen (4.33) und der Zusatzvoraussetzung der gleichgradigen V_{0h}–Elliptizität der diskreten Bilinearform $a_h(\cdot,\cdot) : V_h \times V_h \longmapsto I\!R^1$:

$$\begin{array}{ll}
(4.34) & \exists\, \mu_3 = \text{ const. } > 0,\ \mu_3 \neq \mu_3(h) : \\
 & a_h(v_h, v_h) \geq \mu_3 \|v_h\|^2 \quad \forall v_h \in V_{0h}.
\end{array}$$

Diese Situation ist typisch für die numerische Integration.

■ **Satz 4.14:** (Das erste Strangsche Lemma)

Vor.: Es seien die obigen Voraussetzungen erfüllt, d.h.,
$V_h \subset V,\ V_{gh} \subset V_g,\ V_{0h} \subset V_0$, (4.33), (4.34).

Bh.: Dann gilt die Diskretisierungsfehlerabschätzung

$$(4.35) \quad \underset{(4.1)\ (\widetilde{4.1})_h}{\|u - u_h\|} \leq c \left(\inf_{v_h \in V_{gh}} \left\{ \|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|} \right\} + \right.$$
$$\left. + \sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|< F, w_h > - < F_h, w_h >|}{\|w_h\|} \right)$$

mit $c = \max \left\{ \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_3}\right), \frac{1}{\mu_3} \right\}$.

Beweis:

- Sei $v_h \in V_{gh}$ beliebig. Dann gilt per Dreiecksungleichung

(4.36) $$\|u - u_h\| \leq \|u - v_h\| + \| \underbrace{v_h - u_h}_{=: -w_h \in V_{0h} \ \text{beliebig !}} \|.$$

- Für $w_h = u_h - v_h \in V_{0h}$ erhalten wir die Abschätzungen

(4.37) $$\mu_3 \|u_h - v_h\|^2 \overset{(4.34)}{\leq} a_h(u_h - v_h, u_h - v_h) = a_h(u_h - v_h, w_h) =$$
$$= a(u - v_h, w_h) + [a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)] + [\underbrace{a_h(u_h, w_h)}_{\overset{(\widetilde{4.1})_h}{=} <F_h, w_h>} - \underbrace{a(u, w_h)}_{\overset{(4.1)}{=} <F, w_h>}] =$$
$$= a(u - v_h, w_h) + [a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)] + [< F_h, w_h > - < F, w_h >]$$
$$\overset{(4.33)}{\leq} \mu_2 \|u - v_h\| \, \|w_h\| + [a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)] +$$
$$+ [< F_h, w_h > - < F, w_h >].$$

- Dividieren zunächst durch $\|w_h\| \equiv \|u_h - v_h\|$ und nehmen danach auf der rechten Seite der Ungleichung das Supremum über $w_h \in V_{0h}$:

(4.38) $$\|u_h - v_h\| \leq \frac{\mu_2}{\mu_3} \|u - v_h\| + \frac{1}{\mu_3} \sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|} +$$
$$+ \frac{1}{\mu_3} \sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|< F, w_h > - < F_h, w_h >|}{\|w_h\|}.$$

- Aus (4.36), (4.38) und $\inf\limits_{v_h \in V_{gh}}$ folgt sofort (4.35). Tatsächlich,

$$\|u - u_h\| \leq \inf_{v_h \in V_{gh}} \left\{ \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_3}\right) \|u - v_h\| + \frac{1}{\mu_3} \sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|} \right\} +$$
$$+ \frac{1}{\mu_3} \sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|< F, w_h > - < F_h, w_h >|}{\|w_h\|}.$$

q.e.d.

■ **Typische Anwendung des 1. Strangschen Lemmas:**

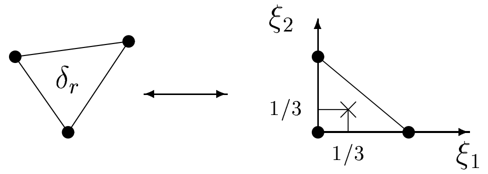
= Analysis der Effekte der numerischen Integration (siehe Ü 4.12)

Btr. dazu wieder das Modellproblem aus Pkt. 4.2.1 (z.B. „CHIP“) mit den Daten $\kappa = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, $g_1 = 0$, $a = 0$:

- $V = H^1(\Omega)$, $V_0 = \{v \in V, \ v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\} = V_g$,

- $a(u,v) = \int\limits_\Omega \lambda(x) \nabla^T u(x) \nabla v(x)\, dx$

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{r \in I\!R^h} \underbrace{\sum_{\beta \in S_r} w_r^{(\beta)}}_{\uparrow \text{ Gewichte}} \left(\lambda(x_{\delta_r}(\xi)) J_{\delta_r}^{-T} \nabla_\xi u_h(\cdot) J_{\delta_r} \nabla_\xi v_h(\cdot) |J_{\delta_r}| \right)_{\underbrace{\xi = \zeta^{(\beta)}}_{\uparrow \text{ Stützstellen}}},$$



z.B. $S_r = \{1\},\ \zeta^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\ w_r^{(1)} = \frac{1}{2}$

$$(\tilde{K}_h u_h, v_h) \overset{!}{=} a_h(u_h, v_h)$$

$$\tilde{K}_h = \sum C_r^T \tilde{K}^{(r)} C_r$$

$$\tilde{K}^{(r)} = [\tilde{K}_{\alpha,\beta}^{(r)}]$$

$$\tilde{K}_{\alpha,\beta}^{(r)} := (\uparrow) \text{ Pkt. } 4.2.4$$

- $< F, v > := \int\limits_\Omega f(x) v(x)\, dx$

$$< F_h, v > := \sum_{r \in I\!R_h} \sum_{\beta \in S_r} w_r^{(\beta)} f(x_{\delta_r}(\rho^{(\beta)}) v_h(x_{\delta_r}(\rho^{(\beta)})) |J_{\delta_r}(\rho^{(\beta)})|\ .$$

■ **Ü 4.13** Welche Voraussetzungen müssen die Daten $\lambda \in L_\infty(\Omega) \cap W_?^?(\delta_r)$, $f \in L_2(\Omega) \cap W_?^?(\delta_r)$ $\forall r \in I\!R_h$ $\forall h \in \Theta$ und die Quadraturformel (algebr. Genauigkeit für $\int\limits_\Delta \varphi(\rho)\, d\xi$) erfüllen, damit $\|u - u_h\|_1 \le c(u, f, \lambda) h$, d.h., die gleiche Genauigkeit wie im exakten Fall erreicht wird ?
Kann die $O(h)$–Genauigkeit bereits für die Schwerpunktformel $\left\{ S_r = \{1\},\ w_r^{(1)} = 1/2,\ \zeta^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$ garantiert werden ?

Trainieren Sie die Technik zunächst für den 1D–Fall:
Ges. $u \in \overset{\circ}{H}(0,1) : \int\limits_0^1 \lambda(x) u'(x) v'(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x) v(x)\, dx$

$$\forall v \in V_0 = \overset{\circ}{H}(0,1)$$

und linearen finiten Elementen auf gleichmäßigem Gitter !

4.5.3 Das zweite Lemma von Strang

- **Btr. nun die folgende Situation**

$$
\begin{array}{llclcll}
(4.1) & \text{Ges. } u \in V_g & : & a(u,v) & = & <F,v> & \forall v \in V_0 \;\subset\; V \\
 & \qquad \not\cup & & & & & \quad\;\; \not\cup \quad\;\; \not\cup \\
(\widetilde{\widetilde{4.1}})_h & \text{Ges. } u_h \in V_{gh} & : & a_h(u_h,v_h) & = & <F_h,v_h>_{\not h} & \forall v_h \in V_{0h} \subset V_h \\
 & \qquad \boxed{\not 3} & & \;\boxed{\not 5} & & \boxed{\not 4}\;\; \overset{\uparrow}{\text{weglassen}} & \quad\;\; \boxed{\not 2} \quad \boxed{\not 1} \\
 & & & & & & \quad\;\; U_{0h} \subset U_h
\end{array}
$$

unter den Standardvoraussetzungen (4.33) und den Zusatzvoraussetzungen

(4.39) 1) $| < F_h, v_h >_h | \leq \|F_h\|_{V_{0h}^*} \, \|v_h\|_h \quad \forall v_h \in V_{0h}$.

2) $a_h(\cdot,\cdot) : V_h \times V_h \longmapsto I\!R^1$ – diskrete Bilinearform:

a) $\exists\, \mu_3 = \text{const.} > 0,\ \mu_3 \neq \mu_3(h)$:
$a_h(v_h, v_h) \geq \mu_3 \|v_h\|_h^2 \quad \forall v_h \in V_{0h}$,

b) $\exists\, \mu_4 = \text{const.} > 0,\ \mu_4 \neq \mu_4(h)$:
$|a_h(v, v_h)| \leq \mu_4 \|v\|_h \, \|v_h\|_h \quad \forall v_h \in V_{0h}$,
$\forall v \in V \oplus V_h$ (genauer: $\forall v \in g + V_0 - V_{gh}$),
wobei die „diskrete“ Norm $\|\cdot\|_h$ auf $V \oplus V_{0h}$ definiert sei.

Die Zusatzvoraussetzungen (4.39) garantieren $\exists!$ (Lax-Milgram–Satz I.2.9 [26]). Diese Situation ist typisch für <u>nichtkonforme</u> finite Elemente ($V_h \not\subset V$) und für die approximative Erfassung von wesentlichen Randbedingungen ($V_{0h} \not\subset V_0$ und/oder $V_{gh} \not\subset V_g$).

- <u>**Satz 4.15:**</u> (Das zweite Strangsche Lemma)

<u>Vor.:</u> Es seien die obigen Voraussetzungen erfüllt, d.h., (4.33) und (4.39), wobei i. a. $V_h \not\subset V,\ V_{0h} \not\subset V_0,\ V_{gh} = g_h + V_{0h} \not\subset V_g \;\; (g_h \notin V_g)$.

<u>Bh.:</u> Dann gilt die Diskretisierungsfehlerabschätzung

$$
(4.40) \qquad \|u - u_h\|_h \underset{(4.1)\ (\widetilde{\widetilde{4.1}})_h}{\leq} c \left\{ \underbrace{\inf_{v_h \in V_{gh}} \|u - v_h\|_h}_{\text{Approximationsfehler}} + \underbrace{\sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|a_h(u,w_h) - <F_h,w_h>|}{\|w\|_h}}_{\text{Konsistenzfehler}} \right\}
$$

mit $c = \max\left\{ \left(1 + \frac{\mu_4}{\mu_3}\right), \frac{1}{\mu_3} \right\}$.

Beweis:

- Sei $v_h \in V_{gh}$ beliebig. Dann gilt per Dreiecksungleichung

$$\|u-u_h\|_h \le \|u-v_h\|_h + \|\underbrace{v_h-u_h}_{=:-w_h\in V_{0h}\ \underline{\text{beliebig}}\,!}\|_h. \tag{4.41}$$

- Für $w_h = u_h - v_h \in V_{0h}$ erhalten wir jetzt die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\mu_3\|u_h-v_h\|_h^2 &\overset{(4.39)_{a)}}{\le} a_h(u_h-v_h,u_h-v_h) = a_h(u_h-v_h,w_h) = \\
&= a_h(u-v_h,w_h) + [\underbrace{a_h(u_h,w_h)}_{\substack{\| \ \widetilde{(4.1)}_h \\ <F_h,w_h>}} - a_h(u,w_h)] = \\
&= a_h(u-v_h,w_h) + [<F_h,w_h> - a_h(u,w_h)] \le \\
&\overset{(4.39)_{b)}}{\le} \mu_4\|u-v_h\|_h\,\|w_h\|_h + [<F_h,w_h> - a_h(u,w_h)]
\end{aligned}$$

- Dividieren wieder durch $\|\overbrace{u_h-v_h}^{w_h}\|$ und nehmen dann auf der rechten Seite Supremum über $w_h \in V_0$:

$$\|u_h-v_h\|_h \le \frac{\mu_4}{\mu_3}\|u-v_h\|_h + \frac{1}{\mu_3}\sup_{w_h\in V_{0h}}\frac{|a_h(u,w_h)-<F_h,w_h>|}{\|w_h\|_h}. \tag{4.42}$$

- Aus (4.41), (4.42) und $\inf\limits_{v_h\in V_{gh}}$ folgt sofort (4.40). Tatsächlich,

$$\|u-u_h\|_h \le \left(1+\frac{\mu_4}{\mu_3}\right)\inf_{v_h\in V_{gh}}\|u-v_h\|_h + \frac{1}{\mu_3}\sup_{w_h\in V_{0h}}\frac{|a_h(u,w_h)-<F_h,w_h>|}{\|w_h\|_h}\ .$$

q.e.d.

4.6 A posteriori Fehlerabschätzung und adaptive Netzverfeinerung

- Wir betrachten im folgenden der Einfachheit halber das homogene Dirichlet-Problem für die Poissongleichung in einem polygonal berandeten, beschränkten Gebiet $\Omega \subset I\!R^2$:

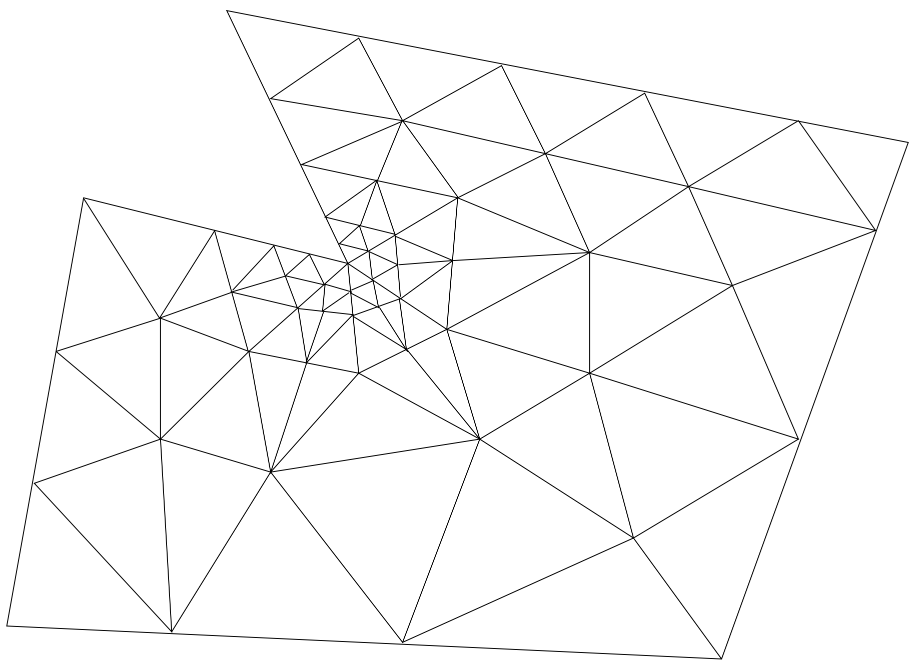
$$(43)_{KF} \qquad \begin{cases} -\triangle u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma := \partial\Omega. \end{cases}$$

Die **Variationsformulierung**

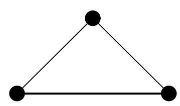
$$(43)_{VF} \text{ Ges. } \underbrace{u \in \overset{o}{H}{}^1(\Omega)}_{V_0} : \underbrace{\int_\Omega \nabla^T u \nabla v \, dx}_{a(u,v)} \underset{=}{=} \underbrace{\int_\Omega f v \, dx}_{<F,V>} \qquad \forall v \in V_0$$

besitzt nach Lax-Milgram ein eindeutig best. Lsg. $u \in V_0$.

- Sei τ_h eine **Dreiecksvernetzung** von Ω, sodaß (4.3) mit lokalen $h^{(r)}(h \curvearrowright h^{(r)})$ gilt. Derartige Vernetzungen nennt man <u>quasiregulär</u> (= shape regular).



- Wir definieren nun den zu τ_h gehörenden FE-Raum



$V_{0h} := \text{span } \{p^{(i)} : i \in \omega_h\} \subset V_0$
basierend auf lineare Elemente $(\mathcal{F}(\triangle) = P_1(\triangle))$.
Dann ergibt sich das FE-Galerkin-Schema:

$$(4.44) \qquad \text{Ges. } u_h \in V_{0h} : a(u_h, v_h) =< F, V_h > \ \forall V_h \in V_{0h}.$$

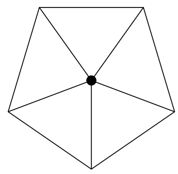
- Gesucht ist eine berechenbare und lokalisierbare obere Schranke $\eta := \eta(u_h)$, sodaß $\exists\, \underline{c} = \underline{c}\,(\Omega, \alpha_0, \theta_0) = \text{const} > 0$ und $\bar{c} = \bar{c}\,(\Omega, \alpha_0, \theta_0) = \text{const} > 0$:

  1. zuverlässig (reliable): $\| u - u_h \|_1 \leq \bar{c}\, \eta(u_h)$
  2. effektiv (effective): $\underline{c} \cdot \eta(u_h) \leq \| u - u_h \|_1$.

4.6.1 Der Clément-Interpolator

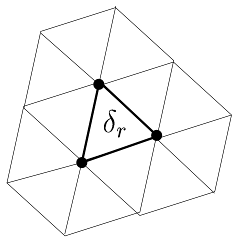
- **Bezeichnungen**:

  $\bar{U}(x^{(j)}) := \bigcup\limits_{r \in \beta_j} \bar{\delta}_r,$ wobei $B_j := \{r \in I\!R_n : x^{(j)} \in \bar{\delta}_r\}$



$x^{(j)}$

  $\bar{U}(\delta_r) := \bigcup\limits_{x^{(j)} \in \bar{\delta}_r} \bar{U}(x^{(j)})$



- **Def. 4.16 :** (Clément-Interpolator)
  Der Operator $I_h : V := H^1(\Omega) \to V_h := \text{span}\,\{p^{(i)} \mid i \in \bar{\omega}_h\}$ definiert durch

$$I_h v := \sum_{j \in \bar{\omega}_h} : \overbrace{(P_j v)}^{Zahl!} p^{(j)} \in V_h \quad \forall v \in V$$

  heißt Clément-Interpolator wobei zu jedem Gitterpunkt $x^{(j)}$ die lokale L_2- Projektion

$$P_j : L_2(U(x^{(j)})) \to P_0(U(x^{(j)})) = I\!R^1$$

$$\text{d. h. } P_j v := \frac{1}{\mid U(x^{(j)}) \mid} \int_{U(x^{(j)})} v(x)\, dx \in I\!R^1$$

  gehört, wobei $\mid U(x^{(j)}) \mid := \text{mcas}\,(u(x^{(j)}))$.

- **Bemerkung:**
  Für $u \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset I\!R^d, d \geq L$, ist der Langrangsche Interpolationsoperator $I_h v := \sum\limits_{j \in \bar{\omega}_h} v(x^{(j)}) p^{(j)}$ wegen $H^1 \not\subset C'$ nicht definiert!

■ **Lemma 4.17**: (Clémentscher Approximationssatz)

Vor.: Sei τ_h eine quasireguläre Dreiecksvernetzung von Ω und $V_h := \text{span}\,\{p^{(i)} \mid i \in \bar{\omega}_h\}$ der Courant-FE-Raum (lineare Dreieckselemente).

Bh.: Dann gelten für den Clémentschen Interpolationsoperator I_h die folgenden Approximationsfehlerabschätzungen:

1) $\| v - I_h v \|_{k,\delta_r} \leq c\, h_r^{1-k} \mid v \mid_{1,U(\delta_r)} \quad \forall r \in I\!R_h \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad k = 0, 1;$

2) $\| v - I_h v \|_{0,e} \leq c\, h_r^{1/2} \mid v \mid_{1,U(\delta_r)}$
$\forall e = e_\alpha^{(r)} \in \partial\delta_r$ (Kanten) $\forall r \in I\!R_h \quad \forall v \in H^1(\Omega)$,

wobei $h_r := h^{(r)}$.

Beweisskizze (Beweis = mms):

- τ_h- quasiregulär $\Rightarrow \mid u(\delta_r) \mid \leq c\, h_r^2$. (mms)
- Bramble-Hilbert-Lemma liefert z.B. (mms)
  $\| v - P_j v \|_{0,U(x^{(j)})} \leq c\, h_j \mid v \mid_{1,U(x^{(j)})} \quad \forall v \in H^1(U(x^{(j)})$
- $\| v - I_h v \|_{0,\delta_r}^2 = \int_{\delta_r} (v(x) - \sum\limits_{j \in \bar{\omega}_h} : (P_j v) p^{(j)}(x))^2\, dx$

$$j \in \bar{\omega}_r := \{j : x^{(1)} \in \delta_r\}$$

$$= \int_{\delta_r} (\overbrace{\sum_{j \in \bar{\omega}_r} p^{(j)}(x)}^{=1} v(x) - \sum_{j \in \bar{\omega}_r} (P_j v) p^{(1)}(x))^2\, dx$$
$$= \int_{\delta_r} \sum_{j \in \bar{\omega}_r} p^{(1)}(x)(v - P_j v)\, dx \leq \cdots \leq c\, h_r \mid v \mid_{1,U(\delta_r)}$$

$$\nwarrow \nearrow$$
$$2 \times \text{Cauchy}$$

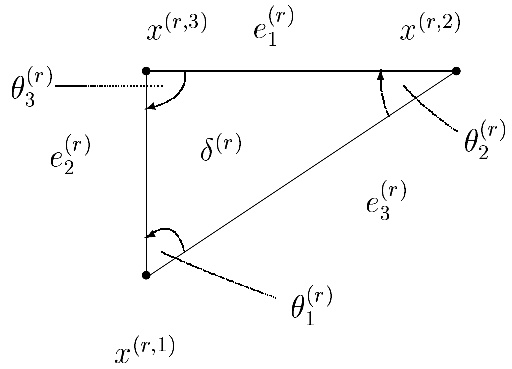
q.e.d.

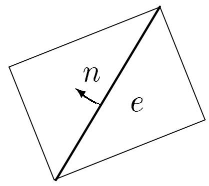
4.6.2 Der residuale Fehlerschätzer (Babuška/Rheinboldt)

■ Definieren zunächst

- für alle Elemente $\delta_r \in \tau_h$ die Residuen der PDgl:
  $$R_r := R_r(u_h) := \underbrace{\triangle u_h}_{\substack{\| \\ 0}} + f \quad \forall r \in I\!R_h, \quad \text{und} \quad \triangle u_h + f = f$$
  0 (da u_h auf δ_r linear ist)

- für alle Kanten $e \in \Gamma_h := \bigcup\limits_{r \in I\!R_h} \{e_1^{(r)}, e_2^{(r)}, e_3^{(r)}\}$ = Menge aller Kanten
  die kantenbezogenen Sprünge
  $$R_e := R_e(u_h) := [\frac{\partial u_h}{\partial n}] := [\nabla u_h] \cdot n \quad \forall e \in \Gamma_h$$
  der Normalenableitungen über die Kanten





■ **Satz 4.18 :** (A posteriori Fehlerabschätzung)

Vor.: τ_h sei eine quasireguläre Dreiecksvernetzung von Ω;
u sei Lsg. von (43), u_h sei Lsg. von (44).

Bh.: Dann gelten die a posteriori Abschätzungen:

a) $\| u - u_h \|_{1,\Omega} \leq c\{ \sum_{r \in I\!R_h} \eta_r^2(u_h)\}^{1/2} = c\,\eta(u_h)$,

b) $\eta_r(u_h) \leq c\{\| u - u_h \|^2_{1,U(\delta_r)} + \sum_{\delta_{r'} \subset U(\delta_r)} h_r^2 \| f - f_h \|^2_{0,\delta_{r'}}\}^{1/2} \quad \forall r \in I\!R_h$

wobei

$\eta_r := \eta_r(u_h) := \{h_r^2 \| R_r(u_h) \|^2_{0,\delta_r} + \frac{1}{2} \sum_{e \subset \partial\delta_r \setminus \Gamma} h_e \| R_e(u_n) \|^2_{0,e}\}^{1/2}$

$h_e = | e | =$ Länge der Kante $e \in \Gamma_h$,

$f_h = P_h f \in V_{0h} : (f_h, v_h)_{0,\Omega} = (f, v_h)_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in V_{0h}$,

$c = c(\Omega, \alpha_0, \theta_0)$ - generische Konstante

Beweis nur von Abschätzung a)

- Sei $w \in V_0 = \overset{o}{H}{}^1(\Omega) : e \subset \partial\delta_r \setminus \Gamma \mid w |_1 = \| \nabla w \|_0 = 1$, beliebig.
  Dann gilt:
  $$(\nabla(u - u_n), \nabla w)_0 = (\nabla(u - u_n), \nabla w)_{0,\Omega} =$$
  $$= (f, w)_{0,\Omega} - \sum_{r \in I\!R_h} (\nabla u_h, \nabla w)_{0,\delta_r} =$$
  $$= (f, w)_{0,\Omega} - \sum_{r \in I\!R_h} [(-\triangle u_n, w)_{0,\delta_r} + \sum_{e \in \partial\delta_r} (\nabla u_h \cdot n, w)_{0,e}]$$
  $$= \sum_{r \in I\!R_h} (\triangle u_h - f, w)_{0,\delta_r} + \sum_{e \in \Gamma_h} ([\tfrac{\partial u_h}{\partial_h}], w)_{0,e}$$
  $$= \sum_{r \in I\!R_h} (R_r(u_h), w)_{0,\delta_r} + \sum_{e \in \Gamma_h} (R_e(u_h), w)_{0,e}$$

- Wegen der Galerkin-Orthogonalität gilt mit der Clément-Interpolierenden $I_h w \in V_{0h}$: (in Def. 4.16 haben wir nur die Cl'ement-Interpolierende in V_h betrachtet: $\curvearrowright$ Modifikation!
$(\nabla(u-u_h), \nabla w)_0 = (\nabla(u-u_h), \nabla(w - I_h w))_0 =$
$= \sum_{r \in I\!R_h} (R_r(u_h), w - I_h w)_{0,\delta_r} + \sum\limits_{e \in \Gamma_h} (R_e(u_h), w - I_h w)_{0,e}$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\underset{\downarrow}{\le}} \quad \sum_{r \in I\!R_h} \| R_r(u_h) \|_{0,\delta_r} \| w - I_h w \|_{0,\delta_r} + \sum_{e \in \Gamma_h} \| R_e(u_h) \|_{0,e} \| w - I_h w \|_{0,e}$$

$$\overset{\text{L 4.17}}{\underset{\downarrow}{\le}} \quad c \sum_{r \in I\!R_h} h_r \| R_r(u_h) \|_{0,\delta_r} | w |_{1,u(\delta_r)} + c \sum_{e \in \Gamma_h} h_e^{1/2} \| R_e(u_h) \|_{0,e} | w | 1, u(e)$$

$\uparrow$
τ_n quasireg!! $\longrightarrow U(\delta_r)$
$\downarrow$

$$\underset{\text{Cauchy}}{\le} \quad c \Big(\sum_{r \in I\!R_h} h_r^2 \| R_r(u_e) \|_{0,\delta_r}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial\delta_r} h_e \| R_e(u_h) \|_{0,e}^2 \Big)^{1/2} | w |_{1,\Omega}$$

- Dann folgt sofort
$| u - u_h |_1 = \sup\limits_{w \in \overset{o}{H}{}^1(\Omega): |w|_1 = 1} (\nabla(u-u_n), \nabla w)_0 \le c\,\eta(u_h)$
- Wegen der Friedrichs-Ungleichung folgt Abschätzung a). **q.e.d.**

■ **Bem. 4.19 :**

1. Beweis der Abschätzung b) siehe [Braess, 1996], Seite 157f.
2. Andere Fehlerschätzer
   a) Schätzung über lokale Neumann-Probleme [Bank/Weiser,1985]
   b) Schätzung über lokale Dirichlet-Probleme [Babuška/Rheinboldt, 1978]
   c) Zienkiewicz-Zhou-Indikator (1987)
   d) Hierarchische Schätzer nach Deuflhard, Leinen und Yserentant (1990).
3. Standardliteratur zu Fehlerschätzern:
Verfürth R. (1996): *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques.* Wiley-Teubner.
4. Oft ist nicht die Lsg. u interessant, sondern ein lineares, stetiges Funktional φ auf der Lsg. u:

$$| \varphi(u) - \varphi(u_h) | \le \quad ?$$

Rannacher (1998f): Fehlerschätzung mit Hilfe der adjungierten Aufgabe:

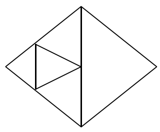
$$z \in V_0 : a(v,z) = \varphi(v) \quad \forall v \in V_0$$

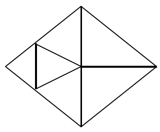
■ **Adaptive Netverfeinerung** (Netzvergröberung):
= mit Hilfe des lokalen Fehlermaßes ($\forall r \in I\!\!R_h$)

$$\eta_r(u_h) := \{h_r^2 \parallel R_h(u_h) \parallel_{0,\delta_r}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \subset \partial\delta_r \setminus \Gamma} h_e \parallel R_e(u_h) \parallel_{0,e}^2\}^{1/2}$$

möglich, z. B. Gleichverteilung der lokalen Fehler bzw. adaptive Netzverfeinerung nach folgenden Algorithmus:

1. Markiere alle $\delta_r : \eta_r(u_h) \geqslant \theta \max \eta_r(u_h)$ z. B. mit $\theta = 0.7$,

2. Verfeinere alle markanten δ, 

3. Herstellung der Konformität 

Kapitel 5

Differenzenverfahren für RWA: Klassische und moderne Zugänge

5.1 Das klassische Differenzenverfahren (DV)

- **FDM** = **F**inite **D**ifference **M**ethod.
- **Lehrbücher:** [15], [13], [37].

5.1.1 Grundideen des klassischen Differenzenverfahrens

- <u>**Ausgangspunkt**</u> = RWA in klassischer Formulierung:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Dgl.:} & Lu(x) = f(x),\ x \in \Omega \\ \text{RB:} & lu(x) = g(x),\ x \in \Gamma = \partial\Omega \end{array}\right\}$$

Ausgangsaufgabe (vergleiche Nu I [26])

$$Au = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} L \\ l \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

- <u>**Ziel:**</u> Diskrete Ersatzaufgabe = DS (Differenzenschema): $A_h u_h(x) = b_h(x), x \in \omega_h$,
  = GS (Gleichungssystem): $A_h \underline{u}_h = \underline{b}_h$.

- <u>**Etappen des Diskretisierungsprozesses mittels klassischem DV:**</u>

ersetzen durch
↓

1. Gebiet stetiger Veränderlicher $\longmapsto$ „Gebiet“ diskreter Veränderlicher
   $\Omega \ni x, \Gamma = \partial\Omega \ni x$, $\quad$ $\omega_h \ni x = x^{(i)} \leftrightarrow i \in \omega_h$,
   $\mathcal{T} = (0, T) \ni t, \ldots$ $\quad$ $\gamma_h = \partial\omega_h \ni x, \omega_\tau \ni t, \ldots$
   = Gitter

2. Funktion stetiger Veränderlicher $\longmapsto$ Funktion diskreter Veränderlicher
   = Gitterfunktion

3. Differentialausdrücke $\longmapsto$ Differenzenausdrücke
   $A = (L, l)$ $\quad$ $A_h = (L_h, l_h)$

wobei h – Ortdiskretisierungsparameter (Ortsschritt), $\tau = \Delta t$ – Zeitschritt.

- **Resultat:**

Ausgangsaufgabe $\longmapsto$ diskrete Ersatzaufgabe

= RWA bzw. AWA, ARWA (Nu III [28]) = DS (Differenzenschema)

ARWA $\longrightarrow$ Folge linearer GS, d.h., zu jedem Zeitschritt gehört i. a. 1 GS (DS)

RWA $\longrightarrow$ lineares (nichtlineares) DS $\leftrightarrow$ GS

$Au = b$ $\qquad$ $A_h u_h(x) = b_h(x), x \in \omega_h \leftrightarrow A_h \underline{u}_h = \underline{b}_h$

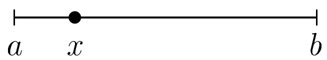
$\Rightarrow$ exakte Lösung: u $\qquad$ $\Rightarrow$ Skelettlösung:

$u_h : \bar{\omega}_h \to I\!R^{1(l)}$ – Gitterfunktion

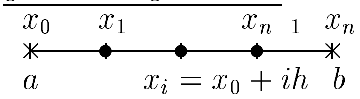
$\underline{u}_h = [u_h(x)]_{x \in \bar{\omega}_h}$ – Vektor

- **zu 1.:** $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \quad \longmapsto \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$

1D: $\bar{\Omega} = [a, b] \subset I\!R^1$



a) gleichmäßiges Gitter

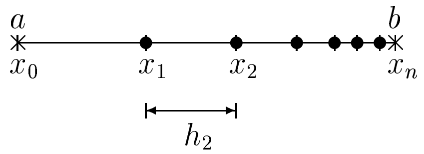


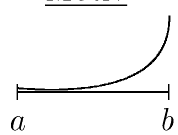
$h = \frac{b-a}{n}$

$\omega_h = \{x_i = x_0 + ih : i = \overline{1, n-1}\} = \{\bullet\}$
= innere Gitterpunkte,
$\gamma_h = \{x_0, x_h\} = \Gamma = \{\times\}$ = Randgitterpunkte.

b) ungleichmäßiges Gitter

Motiv

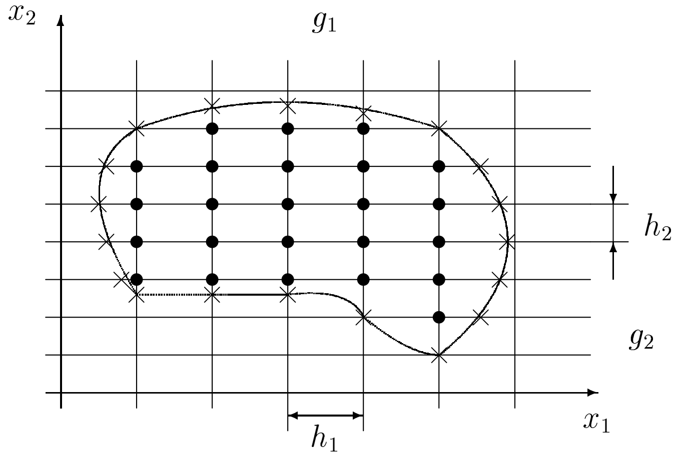




$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$
$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \sum\limits_{i=1}^{n} h_i = b - a,$
$\omega_h = \{x_i : i = \overline{1, n-1}\} = \{\bullet\},$
$\gamma_h = \{x_0, x_h\} = \{\times\} = \Gamma.$

regulär: $\exists\ \alpha = \text{const.} > 0$:
$\alpha h \leq h_i \leq h \quad \forall i = \overline{1, n} \quad \forall h \in \Theta.$

2D: $\Omega \subset I\!R^2$ $\ddagger$ $\mapsto$ gleichmäßiges Gitter in jeder Richtung



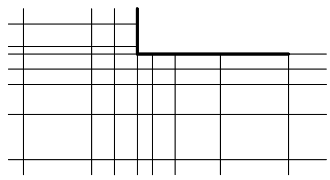
Gittergeraden:
$g_1 : x_1 = x_1^{(i_1)} = i_1 h_1; i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$g_2 : x_2 = x_2^{(i_2)} = i_2 h_2; i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\Rightarrow \bar{\omega}_h = \overset{\bullet}{\omega}_h \cup \overset{\times}{\gamma}_h$

$\bullet$ $\omega_h = \{x^{(i)} = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \Omega\}$ = inneren Gitterpunkten

$\times$ $\gamma_h = \{x = (x_1, x_2) \in \Gamma : x \in g_1, x \in g_2, x \in g_1 \cap g_2\}$ = Randgitterpunkte

Bemerkung:
- Ungleichmäßiges Gitter ist in beiden Richtungen möglich !
- 3D-Fall analog !



$$u_h(x) = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} \overset{u_i}{\overset{\|}{u^{(i)}}} \underbrace{\delta(x - \overset{x_i}{\overset{\|}{x^{(i)}}})}_{=\delta_i(x)}$$

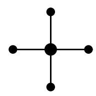
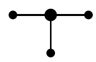
■ **zu 2.:** $u(x), x \in \bar{\Omega}$ $\mapsto$ Gitterfunktion $\downarrow$ Vektor

$u(\cdot) : \bar{\Omega} \to I\!R^1$ $v(x) = u_h(x)$ $\leftrightarrow$ $\underline{v} = \underline{u}_h = [u^{(i)}]_{i \in \bar{\omega}_h} \in I\!R^{\bar{N}_h}$ mit $u^{(i)} = v_i = v(x_i)$

$v(\cdot) : \bar{\omega}_h \mapsto I\!R^1$ $\underline{v} \in I\!R^{\bar{N}_h}$ bzw. $I\!R^{N_h}$

Analog: RS $f(x)$ RS: $\varphi(x) := f(x); x \in \omega_h$

■ **zu 3.:** $D = L, l, \ldots \longmapsto D_h = L_h, l_h, \ldots$

- $Lu(x) \mapsto L_h u_h(x) := \sum\limits_{\xi \in S_h(x)} k(x, \xi) u_h(\xi), x \in \omega_h$
  wobei $S_h(x) \subset \bar{\omega}_h$ – Differenzenstern: z.B.  für $-\Delta u$
- $lu(x) \longmapsto l_h u_h(x) := \sum\limits_{\xi \in S_h(x)} k(x, \xi) u_h(\xi), x \in \gamma_h$ 

■ **Beispiel:** 1D ($m = 1$): Differenzenausdrücke auf gleichmäßigen Gittern:
$\bar{\omega}_h = \{x_i = x_0 + ih : i = \overline{0,n}\}, h = (b-a)/n, x_0 = a,$
$v(\cdot) : \bar{\omega}_h \mapsto I\!R^1.$

a) $Du(x) := u'(x) \mapsto$
$x \in \bar{\Omega} = [a,b]$

$\boxed{v_x, v_{\bar{x}}, v_{\overset{\circ}{x}}}$

- Vorwärtiger Differenzenquotient: $S_h(x) =$ $x \quad x+h$

$$\begin{aligned} D_h v(x) &:= D_h v(x) := v_x = v_{x,i} := \tfrac{v_{i+1}-v_i}{h} \\ &= \tfrac{1}{h} u_h(x+h) - \tfrac{1}{h} u_h(x) = \\ &= \sum_{\xi \in S_h(x) = \{x, x+h\}} k(x,\xi) u_h(\xi) \end{aligned}$$

mit $k(x,x) = -\frac{1}{h}, k(x,x+h) = \frac{1}{h}$,
$x = x_i \in \overset{\vdash}{\omega}_h = \{x_i : i = \overline{0, n-1}\}$.

- Rückwärtiger Differenzenquotient: $S_h(x) =$ $x-h \quad x$

$D_h v(x) := v_{\bar{x}} = v_{\bar{x},i} := \frac{v_i - v_{i-1}}{h}$,
$x = x_i \in \overset{\dashv}{\omega}_h = \{x_i : i = \overline{1,n}\}$.

- Zentraler Differenzenquotient: $S_h(x) =$ $x-h \quad x \quad x+h$

$D_h v(x) := v_{\overset{\circ}{x}} = v_{\overset{\circ}{x},i} := \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}, \; x = x_i \in \omega_h$.

b) $Du(x) := u''(x) \mapsto$ Zweiter Differenzenquotient: $S_h(x) =$ $x-h \quad x \quad x+h$
$x \in \Omega = (a,b)$

$$\begin{aligned} D_h v(x) &= v_{\bar{x}x,i} \overset{\text{mms}}{=} v_{x,\bar{x},i} = \\ &= \tfrac{1}{h}\left[v_{\bar{x},i+1} - v_{\bar{x},i}\right] = \\ &= \tfrac{1}{h}\left[\tfrac{v_{i+1}-v_i}{h} - \tfrac{v_i - v_{i-1}}{h}\right] = \\ &= \tfrac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}. \end{aligned}$$

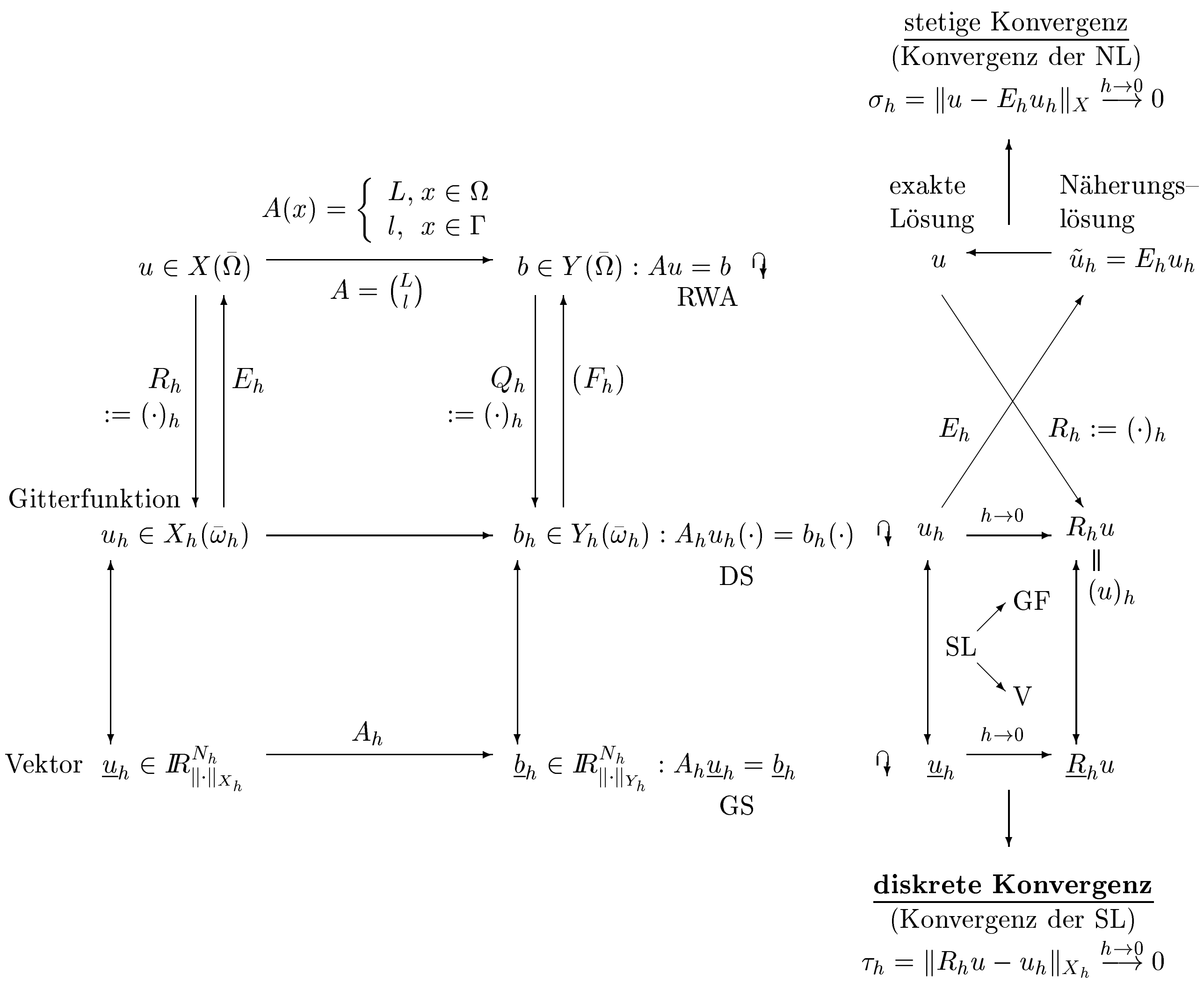
■ **Bemerkung:**

1. Differenzenausdrücke auf ungleichmäßigen Gittern $\bar{\omega}_h = \{x_i : i = \overline{0,n}\}$ analog z.B.:

$$\begin{aligned} v_{x,i} &= \tfrac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}}, v_{\bar{x},i} = \tfrac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \\ v_{\overset{\circ}{x}} &= \tfrac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\tilde{h}_i} \text{ mit } \tilde{h}_i = \tfrac{1}{2}(h_{i+1} + h_i), \\ v_{\hat{x},i} &= \tfrac{v_{i+1} - v_i}{\tilde{h}_i}, \\ v_{\bar{x}\hat{x},i} &= \tfrac{1}{\tilde{h}_i}\left[\tfrac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}} - \tfrac{v_i - v_{i-1}}{h_i}\right]. \end{aligned}$$

2. Differenzenausdrücke für $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \Delta u$ etc. analog (siehe Punkt 5.1.3).

■ **Approximationsschema:** RWA $\longmapsto$ DS



Beispiel: für diskrete Räume: $X_h \simeq I\!R^{N_h}_{\|\cdot\|_{X_h}}, Y_h \simeq I\!R^{N_h}_{\|\cdot\|_{Y_h}}$:

$$X_h = C(\bar{\omega}_h) : \|u_h\|_{C(\bar{\omega}_h)} := \max_{x\in\bar{\omega}_h} |u_h(x)|,$$

$$X_h = C(\omega_h) \times C(\gamma_h) : \|u_h\|_{X_h} := \max_{x\in\omega_h} |u_h(x)| + \max_{x\in\gamma_h} |u_h(x)|,$$

$$X_h = L_2(\omega_h) \times L_2(\gamma_h) : \|u_h\|^2_{X_h} := \sum_{x\in\omega_h} h^m u_h^2(x) + \sum_{x\in\gamma_h} h^{m-1} u_h^2(x),$$

$$X_h = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega_h), \omega_h = \{x_i = x_0 + ih\} : \|u_h\|^2_{X_h} = \sum_{x\in\omega_h} h(u_h(x_i))^2 + \sum_{x\in\overset{\dashv}{\omega}_h} h(u_{h,\bar{x}}(x_i))^2.$$

5.1.2 Lokale und globale Approximation

- **Definition 5.1:** lokale Approximation bzw. Konsistenz ($\sim$ordnung).

  1. $|(Lu)_h(x) - L_h(u)_h(x)| = |Q_h Lu(x) - L_h R_h u(x)| \leq c(u)h^p, x \in \omega_h$
     ↪ lokale Approximationsordnung des Differentialausdrucks $= O(h^p)$.
  2. $|(lu)_h(x) - l_h(u)_h(x)| = |Q_h lu(x) - l_h R_h u(x)| \leq \bar{c}(u)h^q, x \in \gamma_h$
     ↪ lokale Approximationsordnung der RB $= O(h^q)$.

- **Klassische Technik zur Bestimmung der lokalen Approximationsordnung:**
  = Taylor–Entwicklung im Punkt $x \in \omega_h$ bzw. $x \in \gamma_h$ bzw. „Zwischenpunkt".
  Beachte: Klassische Glattheitsvoraussetzungen, z.B. $u \in C^k(\bar{\Omega})$!
  Moderner: Bramble/Hilbert-Lemma-Technik (siehe Punkt 5.2).

- **Definition 5.2:** globale Approximation bzw. Konsistenz ($\sim$ordnung).
  1) $\gamma_{h,L}(u) := \|(Lu)_h - L_h(u)_h\|_{Y_h(\omega_h)} \quad = \quad O(h^p) \quad ? \quad$ Dgl.
  2) $\gamma_{h,l}(u) := \|(lu)_h - l_h(u)_h\|_{Y_h(\gamma_h)} \quad = \quad O(h^q) \quad ? \quad$ RB

  $$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Approximationsmaß}}}{\gamma_h(u)} := \|A_h R_h u - Q_h A u\|_{Y_h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition } \|\cdot\|_{Y_h(\bar{\omega}_h)} := \|\cdot\|_{Y_h(\omega_h)} + \|\cdot\|_{Y_h(\gamma_h)}}}{=} \gamma_{h,L}(u) + \gamma_{h,l}(u) = O(h^p + h^q).$$

- **Bemerkung:**
  – Abschätzung des Approximationsmaßes $\gamma_h(u)$ gewinnt man je nach der verwendeten Norm in Y_h „leicht" aus der lokalen Approximation:
    ↪ $\gamma_h(u) \leq c_A(u)(h^p + h^q)$; möglichst: $p = q$!
  – Solche Abschätzungen (genauer die h-Potenz) hängen von der gewählten Differenzenapproximation und von der Glattheit der Lösung u (Taylor !) ab.

■ **Beispiel:**

$\boxed{\text{RWA}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} -u''(x) = f(x), x \in \Omega = (a,b) \\ u(a) = g_a, u(b) = g_b \end{array}} \qquad \left.\begin{array}{l} Lu = f \\ lu = g \end{array}\right\}$$

Ausgangsaufgabe:
Ges. $u \in X = C^2(a,b) \cap C[a,b]$:
$Au = b$ in $Y = C(a,b) \times I\!R^2$.

$$\bar{\Omega} \mapsto \bar{\omega}_h = \{x_i = x_0 + ih : i = \overline{0,n}\}, x_0 = a, h = (b-a)/n$$

$\boxed{\text{DS}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } v \equiv u_h : \bar{\omega}_h \to I\!R^1: \\ -v_{\bar{x}x}(x) = \varphi(x), x \in \omega_h \\ v_0 \equiv v(x_0) = g_a \\ v_n \equiv v(x_n) = g_b \\ \text{mit } \varphi(x) \equiv f_h(x) := f(x) \end{array}} \qquad \left.\begin{array}{l} L_h u_h = f_h \\ l_h u_h = g_h \end{array}\right\}$$

Diskrete Ersatzaufgabe:
Ges. $u_h \in X_h = X(\bar{\omega}_h)$:
$A_h u_h = b_h$
in $Y_h = Y_h(\bar{\omega}_h)$.

$\boxed{\text{GS}}$

$$\begin{array}{cccccl}
g_a \\
\| \\
-v_0 & +2v_1 & -v_2 & & = & h^2\varphi_1 + g_a \\
 & -v_1 & +2v_2 & -v_3 & = & h^2\varphi_2 \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & -v_{n-2} & +2v_{n-1} & -v_n & = & h^2\varphi_{n-1} + g_b \\
 & & & \| & & \\
 & & & g_b & &
\end{array}$$

Homogenisieren
der RB im Diskreten

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2\varphi_1 + g_a \\ h^2\varphi_2 \\ \vdots \\ h^2\varphi_{n-2} \\ h^2\varphi_{n-1} + g_b \end{bmatrix}$$

Tridiagonales GS
$A_h \underline{u}_h = \underline{b}_h$
Diskrete Ersatz-
aufgabe

Approximation:

$X_h = Y_h = C(\omega_h) \times C(\gamma_h) = C_h, \quad Q_h = R_h = (\cdot)_h.$

$$
\begin{aligned}
\gamma_h(u) &= \|A_h R_h u - Q_h A u\|_{Y_h} = \|L_h u - Lu\|_{C(\omega_h)} + \|l_h u - lu\|_{C(\gamma_h)} = \\
&= \max_{x \in \omega_h} | - u_{\bar{x}x}(x) - (-u''(x))| + \max\{\underbrace{|g_a - g_a|}_{\|\atop 0}, \underbrace{|g_b - g_b|}_{\|\atop 0}\} = \\
&= \max_{x \in \omega_h} |u''(x) - u_{\bar{x}x}(x)| \leq \frac{1}{12} \max_{x \in [a,b]} |u^{(4)}(x)| h^2 = \underbrace{\frac{1}{12} \|u^{(4)}\|_{C[a,b]}}_{=: c_A(u)} \, h^2.
\end{aligned}
$$

NR: lokale Approximation
Sei $x = x_i \in \omega_h$ und $u \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$, d.h., $u \in C^4[a,b]$

$$
\begin{aligned}
u_{\bar{x}x}(x_i) &= \frac{1}{h^2}\left[u(\boldsymbol{x}_i + h) - 2u(x_i) + u(\boldsymbol{x}_i - h)\right] \overset{\textbf{Taylor}\atop\downarrow}{=} \\
&= \frac{1}{h^2}\Bigg[u(x_i) \overset{-}{+} u'(x_i)h + \frac{u''(x_i)}{2}h^2 \overset{-}{+} \frac{u'''(x_i)}{6}h^3 + \frac{u^{(4)}(\xi_i +)}{24}h^2 - \\
&\quad -2u(x_i) + \dots\Bigg] \\
&= u''(x_i) + \frac{1}{24}\left(u^{(4)}(\xi_{i-}) + u^{(4)}(\xi_{i+})\right) h^2 \\
&\quad \text{mit } \xi_{i-} \in [x_{i-1}, x_i], \xi_{i+} \in [x_i, x_{x+1}].
\end{aligned}
$$

Stabilität: C_h-C_h–Stabilität siehe $\boxed{\text{Ü 5.1}}$.

Approximation + Stabilität $\Rightarrow$ **diskrete Konvergenz:**

$$\|u - u_h\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq c_S c_A(u) h^2.$$

■ $\boxed{\textbf{Ü 5.1}}$ Man zeige C_h-C_h–Stabilität für obiges Beipsiel und gebe c_S an !
Hinweis: Benutzen Sie die Resultate von Punkt 5.1.4.

$\boxed{\textbf{Ü 5.2}}$ Man bestimme die lokale Approximationsordnung von $u_x, u_{\bar{x}}$ und $u_{\overset{\circ}{x}}$ für die 1. Ableitung $u'(x)$!

5.1.3 Approximation (u) + Stabilität $\Rightarrow$ Diskrete Konvergenz

- **Ausgangsaufgabe** = RWA: $Au = b$: $\begin{pmatrix} Lu \\ lu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\text{in } \Omega \\ \text{auf } \Gamma\end{matrix}$

  Diskrete Ersatzaufgabe = DS: $A_h u_h = b_h$: $\begin{pmatrix} L_h u_h \\ l_h u_h \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} f_h \\ g_h \end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\text{in } \omega_h \\ \text{auf } \gamma_h\end{matrix}$

  $\updownarrow$

  GS

  Betrachten Fehler: $z_h = R_h u - u_h = (u)_h - u_h$

  $$\Rightarrow \quad A_h z_h = A_h R_h u - \underbrace{A_h u_h}_{=b_h = Q_h b = Q_h Au} = A_h R_h u - Q_h A u = \Psi_h(u)$$

  Resultat: $\boxed{z_h : A_h z_h = \Psi_h(u) := A_h R_h u - Q_h A u}$ (Fehler-DS; Approximationsfehler)

- **Definition 5.3:** Wiederholung Numerik I (Definition I.1.6) [26]:
  Das DS $A_h u_h = b_h$ heißt stabil (gleichmäßig korrekt gestellt) im Raumpaar $[X_h, Y_h]$, wenn für $h \leq h_0$ gilt:

  1. $\exists\, A_h^{-1} : Y_h = R(A_h) \rightarrowtail X_h$,
  2. A_h^{-1} gl. $\ddagger$, d.h., $\|A_h^{-1}\|_{[Y_h \to X_h]} \leq c_S = \text{const.} \neq c(h)$.

- **Bemerkung 5.4:**

  1. $\|A_h^{-1}\|_{[Y_h \to X_h]} \leq c_S \Leftrightarrow$ A-priori-Abschätzung:
  $$\begin{array}{lll} \|u_h\|_{X_h} & \leq & c_S \|A_h u_h\|_{Y_h} \quad \forall u_h \in X_h, \\ \hline \|A_h^{-1} b_h\|_{X_h} & \leq & c_S \|b_h\|_{Y_h} \quad \forall b_h \in Y_h. \end{array}$$
  2. Für stabile DS gilt der Störungssatz I.1.3 + Folgerungen (siehe Numerik I, Kapitel 1 und Kapitel 2 [26]).

- **Satz 5.5: $\widehat{=}$ Satz I.1.1 + Folgerung über diskrete Konvergenz [26]**

  Vor.: 1. DS $A_h u_h = b_h$ sei stabil (i. S. der Definition 5.3).

  2. DS $A_h u_h = b_h$ approximiere RWA $Au = b$ auf Lösung u, und für das Approximationsmaß $\gamma_h(u)$ gelte die Abschätzung
  $$\gamma_h(u) := \|\Psi_h(u)\|_{Y_h} \leq c_A(u)(h^p + h^q).$$

  Bh.: Dann konvergiert die Skelettlösung, und es gilt die Abschätzung
  $$\|R_h u - u_h\|_{X_h} \leq c_S c_A(u)(h^p + h^q).$$

Beweis: (siehe Satz I.1.1 aus Numerik I [26])
Aus

$$z_h = A_h^{-1}\Psi_h$$

folgt sofort

$$\begin{aligned}\|z_h\|_{X_h} &\le \|A^{-1}\|_{[Y_h\to X_h]}\|\Psi_h(u)\|_{Y_h} \le \\ &\le c_S c_A(u)(h^p + h^q).\end{aligned}$$

q.e.d.

5.1.4 Monotone Differenzenschemata, M-Matrizen und das diskrete Maximumprinzip (C_h-C_h–Stabilität)

5.1.4.1 Monotone Differenzenschemata

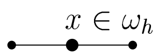
■ $\omega_h \subset \Omega$ – nichtnotwendig gleichmäßiges Gitter für † Gebiet $\Omega \subset I\!R^m$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

$\bar\omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ mit γ_h – Menge der Randgitterpunkte (eigentlich der Dirichletrandgitterpunkte !)

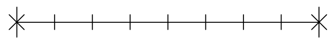
mit $\omega_h \neq \emptyset$ und $\gamma_h \neq \emptyset$. ($\gamma_h = \emptyset$ muß gesondert behandelt werden).
$S_h(x) = \{x, \ldots\} \subset \bar\omega_h$ – Differenzenstern in $x \in \omega_h$,
$S'_h(x) = S_h(x) \setminus \{x\}$ – Gitterumgebung von $x \in \omega_h$.

■ **Definition 5.6:** (Verbundenes Gitter $\bar\omega_h$ bezüglich $S_h(\cdot)$):
Das Gitter $\bar\omega_h$ heißt verbunden, wenn zu je 2 beliebigen Gitterpunkten $x \in \omega_h$ und $\bar x \in \bar\omega_h$ eine Folge von Gitterpunkten $\{x^{(k)}\}_{k=\overline{0,n}}$ existiert, sodaß $x^{(0)} = x, x^{(n)} = \bar x$ und $x^{(k+1)} \in S_h(x^{(k)})$ $\forall k = 0, 1, \ldots, n-1$.

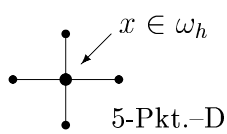
Beispiel: $m = 1$ $m = 2$ $m = 2$

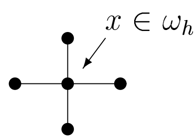


3-Pkt.–Differenzenstern im Inneren

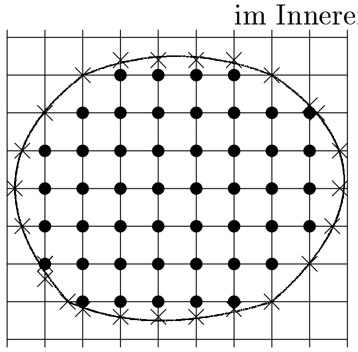


= verbundenes Gitter

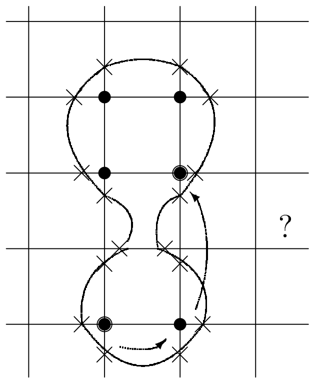




5-Pkt.–Differenzenstern im Inneren



= verbundenes Gitter



kein verbundenes Gitter, aber bei genügend kleinem h kann verbundenes Gitter erzeugt werden

■ **Definition 5.7:** (Monotones DS).
Der Differenzenoperator

$$L_h v_h(x) \equiv Lv(x) := A(x)v(x) - \sum_{\xi \in S'_h(x) \equiv S'(x)} B(x,\xi)v(\xi), \quad x \in \omega \tag{5.1}$$

heißt monoton, falls

$$\begin{array}{ll} A(x) > 0, B(x,\xi) > 0 & \forall \xi \in S'(x) \quad \forall x \in \omega_h \equiv \omega, \\ D(x) := L \cdot 1 = A(x) - \sum\limits_{\xi \in S'(x)} B(x,\xi) \geq 0 & \forall x \in \omega. \end{array}$$

DS mit monotonem Differenzenoperator L_h heißen monoton.

5.1.4.2 Das diskrete Maximumprinzip für monotone Differenzenoperatoren

■ **Satz 5.8:** (Diskretes Maximumprinzip):

Vor.:	1. $\bar{\omega}_h$ – verbundenes Gitter; L – monotoner Differenzenoperator. 2. $v = v(\cdot) : \bar{\omega}_h \to I\!R^1$ - nichtidentisch konstante Gitterfunktion.
Bh.:	Dann gilt: 1. $Lv(x) \equiv f(x) \leq 0\ \forall x \in \omega_h \Rightarrow v(\cdot)$ hat in ω_h kein positives Maximum, 2. $Lv(x) \geq 0\ \forall x \in \omega_h \Rightarrow v(\cdot)$ hat in ω_h kein negatives Minimum.

Beweis: (indirekt)

1. Sei $v \not\equiv$ const. in $\bar{\omega}_h$ und $Lv \leq 0$ in ω_h.
   Annahme: $\exists$ positives Maximum in ω_h, d.h.,
   $\exists\, \bar{x} \in \omega_h : \max\limits_{x \in \bar{\omega}_h} v(x) = v(\bar{x}) = M > 0.$

   o. B. d. Allg. $\exists$ (bei entsprechender Wahl von $\bar{x}$) $\tilde{x} \in S_h(\bar{x})$
   $$v(\tilde{x}) < M,$$
   da $v \not\equiv$ const. und $\bar{\omega}_h$ – verbundenes Gitter !

   Schreiben Differenzengleichung im Punkt $\bar{x}$ auf:

$$\begin{aligned} 0 &\geq f(\bar{x}) \equiv Lv(\bar{x}) = A(\bar{x})v(\bar{x}) - \sum_{\xi \in S'(\bar{x})} B(\bar{x},\xi)v(\xi) = \\ &= \underbrace{\Big[A(\bar{x}) - \sum_{\xi \in S'(\bar{x})} B(\bar{x},\xi)\Big]}_{=D(\bar{x}) \geq 0 \ (L\text{-monoton})} \underbrace{v(\bar{x})}_{= M > 0} + \sum_{\xi \in S'(\bar{x})} \underbrace{B(\bar{x},\xi)}_{>0} \underbrace{[v(\bar{x}) - v(\xi)]}_{\geq 0} \geq \\ &\geq \underbrace{B(\bar{x},\tilde{x})}_{> 0} \underbrace{[v(\bar{x}) - v(\tilde{x})]}_{>0} > 0 \qquad ↯ \end{aligned}$$

2. Analog bzw. in 1. Übergang von v zu $(-v)$. **q.e.d.**

■ **Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.8 und der Zusatzvoraussetzung $\gamma_h \neq \emptyset$ kann man aus Satz 5.8 sofort die folgenden Aussagen schließen:**

Folgerung 5.9: (Unmittelbare Folgerungen aus diskretem Maximumprinzip):

1. $\left.\begin{array}{ll} Lv(x) \leq 0 & \forall x \in \omega_h \\ v(x) \leq 0 & \forall x \in \gamma_h \end{array}\right\} \Rightarrow v(x) \leq 0 \quad \forall x \in \bar{\omega}_h.$

2. $\left.\begin{array}{ll} Lv(x) \geq 0 & \forall x \in \omega_h \\ v(x) \geq 0 & \forall x \in \gamma_h \end{array}\right\} \Rightarrow v(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\omega}_h.$

3. Die homogene Gleichung $Lv(x) = 0 \quad \forall x \in \omega_h$ hat bei homogenen RB $v(x) = 0 \quad \forall x \in \gamma_h$ nur die triviale Lösung $v(x) = 0 \quad \forall x \in \bar{\omega}_h$.

4. Monotone $\boxed{\text{DS}} \left\{\begin{array}{ll} L\ v(x) = f(x) & \forall x \in \omega_h \\ v(x) = g(x) & \forall x \in \gamma_h \end{array}\right\} = \boxed{\text{GS}}\ \{A\underline{v} = \underline{b}\}$ besitzt genau eine Lösung.

Beweis:

1. a) $v \equiv \text{const.} = c \curvearrowright v \equiv c \leq 0$ wegen $\gamma_h \neq \emptyset$.
   b) Sei $v \not\equiv \text{const.}$ Annahme: $\exists\, \bar{x} \in \bar{\omega}_h : v(\bar{x}) > 0 \curvearrowright \bar{x} \in \omega_h$
   $\Rightarrow \exists$ positives Maximum in $\omega_h \curvearrowright \lightning$ zu Satz 5.8. #
2. analog #
3. folgt sofort aus 1. und 2., tatsächlich

$$\left.\begin{array}{rcl} Lv &=& 0 \text{ in } \omega_h \\ v &=& 0 \text{ auf } \gamma_h \end{array}\right\} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} 1.\ \left.\begin{array}{rcl} Lv &\leq& 0 \text{ in } \omega_h \\ v &\leq& 0 \text{ auf } \gamma_h \end{array}\right\} \Rightarrow v(x) \leq 0 \quad \forall x \in \bar{\omega}_h \\ 2.\ \left.\begin{array}{rcl} Lv &\geq& 0 \text{ in } \omega_h \\ v &\geq& 0 \text{ auf } \gamma_h \end{array}\right\} \Rightarrow v(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\omega}_h \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v(x) = 0 \\ \forall x \in \bar{\omega}_h \end{array}$$

4. folgt sofort aus 3. **q.e.d.**

5.1.4.3 Der Vergleichssatz

■ **Satz 5.10:** (Vergleichssatz):

Vor.:
1. $\bar{\omega}_h$ - verbundenes Gitter, $\gamma_h \neq \emptyset, \omega_h \neq \emptyset$.
2. $Lv(x) := A(x)v(x) - \sum\limits_{\xi \in S'(x)} B(x,\xi)v(\xi)$ - monotoner Differenzenoperator.
3. $v : \bar{\omega}_h \mapsto I\!R^1 : Lv(x) = f(x) \quad \forall x \in \omega_h$,
   $\bar{v} : \bar{\omega}_h \mapsto I\!R^1 : L\bar{v}(x) = \bar{f}(x) \quad \forall x \in \omega_h : \bar{f}(x) \geq 0 \quad \forall x \in \omega_h$.

Bh.: Aus

$$\left.\begin{array}{ll} |f(x)| \leq \bar{f}(x) & \forall x \in \omega_h \\ |v(x)| \leq \bar{v}(x) & \forall x \in \gamma_h \end{array}\right\} \Rightarrow |v(x)| \leq \bar{v}(x) \quad \forall x \in \bar{\omega}_h.$$

Beweis:

- Folgerung 5.9.2: $\left.\begin{array}{rcll} L\bar{v}(x) & = & \bar{f}(x) \geq 0 & \forall x \in \omega_h \\ \bar{v}(x) & \geq & 0 & \forall x \in \gamma_h \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{v}(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\omega}_h$
- Betrachten a) $u(x) := \bar{v}(x) + v(x)$ und b) $w(x) = \bar{v}(x) - v(x)$:

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{l} Lu(x) = L\bar{v}(x) + Lv(x) = \bar{f}(x) + f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \omega_h \\ u(x) = \bar{v}(x) + v(x) \geq 0 \quad \forall x \in \gamma_h \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow\ u(x) \geq 0 \\ \uparrow \quad \forall x \in \bar{\omega}_h, \end{array}$$

Folgerung 5.9.2

$\downarrow$

$$\text{b)}\ \left.\begin{array}{l} Lw(x) = L\bar{v}(x) - Lv(x) = \bar{f}(x) - f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \omega_h \\ w(x) = \bar{v}(x) - v(x) \geq 0 \quad \forall x \in \gamma_h \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow\ w(x) \geq 0 \\ \quad \forall x \in \bar{\omega}_h. \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} u(x) = \bar{v}(x) + v(x) \geq 0 \\ w(x) = \bar{v}(x) - v(x) \geq 0 \\ \forall x \in \bar{\omega}_h \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} -\bar{v}(x) \leq v(x) \leq \bar{v}(x) \\ \forall x \in \bar{\omega}_h \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} |v(x)| \leq \bar{v}(x). \\ \forall x \in \bar{\omega}_h \end{array}$$

q.e.d.

5.1.4.4 A-priori Abschätzungen in der diskreten C-Norm (C_h-C_h–Stabilität)

■ **Satz 5.11:**

Vor.: 1. $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ - verbundenes Gitter ($\omega_h \neq \emptyset, \gamma_h \neq \emptyset$).

2. L – monotoner Differenzenoperator.

3. $v : \bar{\omega}_h \to I\!R^1 : Lv(x) = 0 \quad \forall x \in \omega_h$.

Bh.: Dann nimmt die Gitterfunktion $|v|$ ihr Maximum auf γ_h an:

(5.2)
$$\|v\|_{C(\bar{\omega}_h)} := \max_{x \in \bar{\omega}_h} |v(x)| \leq \|v\|_{C(\gamma_h)}.$$

Beweis: folgt sofort aus diskreten Maximumprinzip Satz 5.8 !
Tatsächlich,

- falls $v \equiv$ const. in $\bar{\omega}_h \Rightarrow$ (5.2) trivialerweise erfüllt.
- Sei nun $v \not\equiv$ const. in $\bar{\omega}_h$. Dann gilt nach Satz 5.8:

$$Lv = 0 \begin{array}{l} \nearrow Lv(x) \leq 0\ \forall x \in \omega_h \Rightarrow v \text{ hat kein positives Maximum in } \omega_h \\ \searrow Lv(x) \geq 0\ \forall x \in \omega_h \Rightarrow v \text{ hat kein negatives Minimum in } \omega_h \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \text{Bh.}$$

q.e.d.

■ **Satz 5.12:**

Vor.:
1. $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ - verbundenes Gitter ($\omega_h \neq \emptyset, \gamma_h \neq \emptyset$).
2. $Lv(x) = A(x)v(x) - \sum\limits_{\xi \in S'(x)} B(x,\xi)v(\xi)$
   sei streng monotoner Differenzenoperator, d.h., L ist monoton und zusätzlich gilt:
$$D(x) \equiv L1 \equiv A(x) - \sum_{\xi \in S'(x)} B(x,\xi) > 0 \quad \forall x \in \omega_h.$$
3. $v : \bar{\omega}_h \to I\!R^1 :$ $\begin{array}{rcll} Lv(x) &=& f(x) & \forall x \in \omega_h, \\ v(x) &=& 0 & \forall x \in \gamma_h. \end{array}$

Bh.: Dann gilt die A-priori–Abschätzung

(5.3) $$\|v\|_{C(\bar{\omega}_h)} = \|v\|_{C(\omega_h)} \leq \left\| \frac{f(\cdot)}{D(\cdot)} \right\|_{C(\omega_h)} \leq \frac{1}{\min\limits_{x \in \omega_h} |D(x)|} \|f\|_{C(\omega_h)}.$$

Beweis: (benutzen Vergleichssatz 5.10)

- Betrachten DS: $\bar{v}(\cdot) : \bar{\omega}_h \to I\!R^1 :$ $\begin{array}{rcll} L\bar{v}(x) &=& \bar{f}(x) := |f(x)| & \forall x \in \omega_h, \\ \bar{v}(x) &=& 0 & \forall x \in \gamma_h. \end{array}$

  Aus Vergleichssatz 5.10 folgt:
  1. $\bar{v}(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\omega}_h$,
  2. $|v(x)| \leq \bar{v}(x) \quad \forall x \in \bar{\omega}_h$.
- Dann gilt:
$$\|v\|_{C(\omega_h)} \leq \|\bar{v}\|_{C(\omega_h)} = \max_{x \in \omega_h} \bar{v}(x) \underset{\exists\, \bar{x} \in \omega_h}{\overset{\uparrow}{=}} \bar{v}(\bar{x}).$$
- Betrachten Vergleichs-DS $L\bar{v}(x) = \bar{f}(x)$ im Punkt $x = \bar{x}$:

(5.4) $$\begin{array}{rcl} \bar{f}(\bar{x}) &=& A(\bar{x})\bar{v}(\bar{x}) - \sum\limits_{\xi \in S'(\bar{x})} \underbrace{\overset{\leq 0}{B(\bar{x},\xi)}}_{>0} \underset{\leq \bar{v}(\bar{x})}{\bar{v}(\xi)} \quad \begin{array}{c} 0 \leq \bar{v}(\xi) \leq \bar{v}(\bar{x}) \\ \downarrow \\ \geq \end{array} \\ &\geq& A(\bar{x})\bar{v}(\bar{x}) - \sum\limits_{\xi \in S'(\bar{x})} B(\bar{x},\xi)\bar{v}(\bar{x}) = D(\bar{x})\bar{v}(\bar{x}) \end{array}$$

- Resultat:
$$\|v\|_{C(\omega_h)} \leq \bar{v}(\bar{x}) \leq \frac{\bar{f}(x)}{D(\bar{x})} = \frac{|f(\bar{x})|}{D(\bar{x})} \leq \max_{x \in \omega_h} \left| \frac{f(x)}{D(x)} \right| = \left\| \frac{f}{D} \right\|_{C(\omega_h)}.$$

q.e.d.

■ **Satz 5.13:**

<u>Vor.:</u> 1. $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ - verbundenes Gitter $(\omega_h \neq \emptyset, \gamma_h \neq \emptyset)$.

2. $Lv(x) := A(x) - \sum\limits_{\xi \in S'(x)} B(x,\xi)v(\xi)$ – monotoner Differenzenoperator.

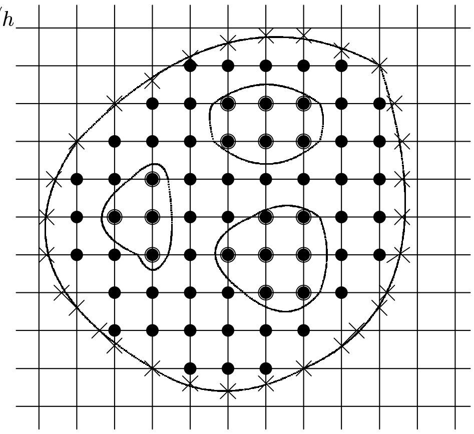
3. $v : \bar{\omega}_h \mapsto I\!R^1 : \begin{array}{rcll} Lv(x) & = & f(x) & \forall x \in \omega_h, \\ v(x) & = & g(x) & \forall x \in \gamma_h. \end{array}$

4. $f(x) = 0 \quad \forall x \in \tilde{\omega}_h := \{x \in \omega_h : D(x) = 0\}$.

<u>Bh.:</u> Dann gilt die A-priori–Abschätzung

(5.5) $$\|v\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \max\left\{\max_{x\in\gamma_h} |g(x)|, \max_{x \in \omega_h \setminus \tilde{\omega}_h} \left|\frac{f(x)}{D(x)}\right|\right\}.$$

$L\bar{v}(x) = |f(x)|$ in ω_h
$\bar{v}(x) = |g(x)|$ auf γ_h



● $x \in \tilde{\omega}_h$ $\quad$ $\times$ $x \in \gamma_h$
• $x \in \omega_h \backslash \tilde{\omega}_h$

<u>Beweis:</u>

- Betrachten Vergleichsfunktion $\bar{v}(\cdot)$ analog zum Beweis von Satz 5.12.

  $\tilde{\omega}_h = \bigcup\limits_{k=1}^{k_0} \tilde{\omega}_{h,k} : \bar{\tilde{\omega}}_{h,k} = \{●\}$ - verbundenes Gitter

  $\Rightarrow L\bar{v}(x) = 0 \quad \forall x \in \tilde{\omega}_{h,k} \quad \forall k = \overline{1, k_0}$.

- Satz 5.11: ↷ $\|\bar{v}(*)\|_{C(\tilde{\omega}_{h,k})} \leq \|\bar{v}(*)\|_{C(\partial\tilde{\omega}_{h,k})}$.
  $\forall k = 1, 2, \ldots, k_0$

- $\Rightarrow \|\bar{v}(*)\|_{C(\underbrace{\cup\tilde{\omega}_{h,k}}_{:=\tilde{\omega}_h})} \leq \|\bar{v}(\cdot)\|_{C(\cup\partial\tilde{\omega}_{h,k})} \leq \|\bar{v}(\cdot)\|_{C(\bar{\omega}_h\setminus\tilde{\omega}_h)} \overset{\overset{\exists\, \bar{x} \in \bar{\omega}_h \setminus \tilde{\omega}_h}{\downarrow}}{=} |\bar{v}(\bar{x})| = \bar{v}(\bar{x})$.

- a) $\bar{x} \in \gamma_h$ ↷ Bh. #

  b) $\bar{x} \notin \gamma_h$ d.h., $\bar{x} \in \bar{\omega}_h \setminus \{\tilde{\omega}_h \cup \gamma_h\}$ ↷ Bh. (analog zu (5.4) im Beweis von Satz 5.12). #

q.e.d.

■ **Ü 5.3** Man zeige für das DS (Fehlerschema)

$$\begin{cases} Lz(x) \equiv -\left(a(x)z_{\bar{x}}(x)\right)_x + d(x)z(x) = \Psi(x), & \forall x \in \omega_h, \\ z(x) = 0 \quad \forall x \in \gamma_h = \{x_0 = a, x_n = b\}. \end{cases}$$

C_h-C_h–Stabilität, d.h., $\|z\|_{C(\omega_h)} \le c_S \|\Psi\|_{C(\omega_h)}$, unter den Voraussetzungen

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & a(x) \ge \bar{\mu}_1 = \text{ const. } > 0 \quad \forall x \in \omega_h, \\ \text{(ii)} & d(x) \ge q_0 = \text{ const. } > 0 \quad \forall x \in \omega_h \end{array}$$

mit $h = (b-a)/n, \omega_h = \{x_i = x_0 + ih : i = \overline{1, n-1}\}$ und gebe c_S an. Gilt C_h-C_h–Stabilität auch dann, wenn anstelle von (ii) nur $d(x) \ge 0 \quad \forall x \in \omega_h$ gilt ?

Ü 5.4 Man zeige, daß die Upwind-Diskretisierung

$$\begin{cases} v : \bar{\omega}_h = \{x_i = ih : i = \overline{0, n}; h = 1/n\} \mapsto \mathbb{R}^1 : \\ -v_{\bar{x}x,i} + b_i \begin{cases} v_{x,i}, & \text{falls } b_i < 0 \\ v_{\bar{x},i}, & \text{falls } b_i > 0 \end{cases} \Bigg\} = 0, i = \overline{1, n-1}, \\ v_0 = 0, v_1 = 1 \end{cases}$$

eine monotone Differenzenapproximation des Konvektions-Diffusions–RWP

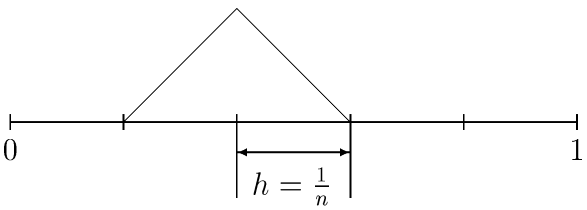
$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) = 0 \quad \forall x \in (0,1), \\ u(0) = 0, u(1) = 1 \end{cases}$$

ist ! Wie würden Sie b_i, $i = \overline{1, n-1}$, wählen ?
Bestimmen Sie die Approximationsordnung (Konsistenzordnung) für die von Ihnen gewählten b_i und für den trivialen Fall $b(x) = b =$ const. ($\curvearrowright$ $b_i = b \quad \forall i = \overline{1, n-1}$).

Ü 5.5 Zeigen Sie, daß die FE-Approximation der RWA

$$\begin{cases} -u''(x) + bu'(x) = 0 \quad \forall x \in (0,1), \\ u(0) = 0, u(1) = 1, \\ b = \varrho c \vec{w} / \lambda = \text{ const.} \end{cases}$$

mit linearen Elementen auf gleichmäßigem Gitter



auf das Differenzenschema ($v_i = u^{(i)} \approx u(x_i)$)

$$\begin{cases} \frac{-v_{i-1}+2v_i-v_{i+1}}{h^2} + b\frac{v_{i+1}-v_{i-1}}{2h} = 0, \; i = \overline{1, n-1}, \\ v_0 = 0, v_1 = 1 \end{cases}$$

führt !
Unter welchen Bedingungen ist dieses Differenzenschema monoton ?

Bemerkung: $p = b \cdot h = \varrho c \vec{w} \, h/\lambda$ nennt man diskrete Peclet-Zahl !

5.1.4.5 Monotone Differenzenschemata und M-Matrizen

- **Jedem $\boxed{\text{DS}}$ läßt sich eindeutig ein $\boxed{\text{GS}}$ zuordnen**

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$(5.6) \; \boxed{\begin{array}{rcl} L_h u_h(x) &=& f_h(x), x \in \omega_h \\ u_h(x) &=& g_h(x), x \in \gamma_h \end{array}} \qquad \boxed{A_h \underline{u}_h = \underline{b}_h}$$

Die Gestalt von A_h hängt von der Durchnumerierung ab. Regularität, Symmetrie, positive Definitheit, EW und andere analytische Eigenschaften natürlich nicht !
Insbesondere führen monotone Differenzenschemata auf sogenannte M-Matrizen. Damit übertragen sich die für monotone DS bekannten Eigenschaften auf GS mit M-Matrizen und umgekehrt.

- **Definition 5.14:** (M-Matrizen):
Eine Matrix $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,N}}$ heißt M-Matrix genau dann, wenn

1. $a_{ii} > 0 \quad \forall i = \overline{1, N}$,
2. $a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in I = \{1, 2, \ldots, N\}$,
3. A ist regulär und $A^{-1} \geq 0$ (elementweise).

- **Ü 5.6** Zeigen Sie, daß ein monotones DS der Art (5.6) auf verbundenem Gitter $\bar{\omega}_h$ mit $\gamma_h \neq \emptyset$ und $\omega_h \neq \emptyset$ auf ein GS mit M-Matrix führt !

■ **Definition 5.15:**

Sei $A = [a_{ij}]_{i,j\in I=\{1,2,\ldots,N\}}$ eine Matrix der Dimension $N \times N$.

1. Ein Index $i \in I$ heißt mit einem Index $j \in I$ direkt verbunden, falls $a_{ij} \neq 0$.
2. Ein Index $i \in I$ heißt mit einem Index $j \in I$ verbunden, falls es eine Kette von direkten Verbindungen von i nach j gibt (vergleiche Definition 5.6 „Verbundenes Gitter").
3. A heißt irreduzibel, falls jeder Index $i \in I$ mit jedem Index $j \in I$ verbunden ist (vergleiche Definition 5.6 „Verbundenes Gitter").
4. A heißt irreduzibel diagonaldominant, falls A irreduzibel ist und
$$\begin{aligned} &|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad \forall i \in I \text{ sowie} \\ &|a_{i_0 i_0}| > \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0 j}| \text{ für mindestens einen Index } i_0 \in I. \end{aligned}$$
5. A heißt wesentlich diagonaldominant, falls
$$\begin{aligned} &|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad \forall i \in I \text{ und} \\ &|a_{i_0 i_0}| > \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0 j}| \text{ für mindestens einen Index } i_0 \in I \end{aligned}$$
und jeder Index $j \in I$ mit einem solchen Index i_0 verbunden ist.

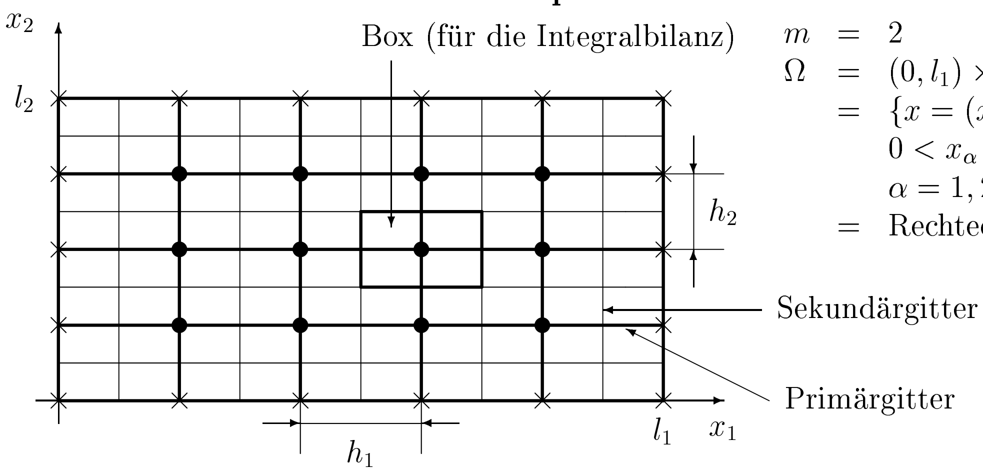
■ **Ü 5.7** Man zeige, daß eine Matrix $A = [a_{ij}]_{i,j\in I=\{1,\ldots,n\}}$, die die Vorzeichenbedingungen $a_{ii} > 0 \quad \forall i \in I$ und $a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j,\ i,j \in I$ erfüllt, sowie irreduzibel diagonaldominant ist, eine M-Matrix ist !
Diese Aussage bleibt erhalten, falls die Matrix A nur wesentlich diagonaldominant ist.

■ **Ü 5.8** Es sei A eine M-Matrix, und es gebe einen Vektor $\underline{w} \in I\!R^N : A\underline{w} \geq \underline{e}$ (elementweise) mit $\underline{e} = (1,1,\ldots,1)^T$.
Man zeige, daß dann gilt:
$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \|w\|_\infty := \max_{i=\overline{1,N}} |w_i|$$
wobei $\|A^{-1}\|_\infty$ – Zeilensummennorm ist !

5.1.5 Beispiel: FDM zur Lösung des Dirichlet-Problems für $-\Delta u + qu = f$ in Rechteckgebieten

5.1.5.1 Die Ausgangsaufgabe (RWA) und die diskrete Ersatzaufgabe (DS)

- **Betrachten stationäres Wärmeleitproblem im Rechteck**



$$\begin{aligned} m &= 2 \\ \Omega &= (0,l_1)\times(0,l_2) \\ &= \{x=(x_1,x_2): \\ &\quad\; 0<x_\alpha<l_\alpha, \\ &\quad\; \alpha=1,2\} \\ &= \text{Rechteck } \subset \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

<u>**Ausgangsaufgabe:**</u> $\lambda(x) = \lambda(x_1, x_2) =$ Wärmeleitzahl $=$ const. $= 1$ (o. B. d. Allg.)

(5.7) Ges. $u(x) = u(x_1,x_2):$ $\; -\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(x), x \in \Omega,$
$\qquad u(x) = g(x), x \in \Gamma = \partial\Omega,$

wobei $\Delta u = L_1 u + L_2 u$ mit $L_\alpha = \partial^2/\partial x_\alpha^2, \alpha = 1,2.$

- <u>**Diskretisierung:**</u> ($\curvearrowright$ Primärgitter)

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \{x=(x_1,x_2):\ x_\alpha = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0,1,\ldots,n_\alpha;\ n_\alpha h_\alpha = l_\alpha;\ \alpha=1,2\}, \\ \omega_h &= \bar{\omega}_h \setminus \gamma_h = \{\bullet\},\ \gamma_h = \{\times\}, \\ x^{(i)} &= (i_1 h_1, i_2 h_2). \end{aligned}$$

Konstruktion des DS:

a) Konstante Wärmeleitzahl: $\curvearrowright$ Einfaches Ersetzen: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \mapsto u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$

(5.8)
$$v(\cdot) : \bar{\omega}_h \mapsto I\!R^1 : \begin{array}{rcl} -\Lambda v(x) + d(x)v(x) &=& \varphi(x),\ x \in \omega_h, \\ v(x) &=& g(x),\ x \in \gamma_h, \end{array}$$

wobei $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2,\ \Lambda_\alpha v := v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},\ \alpha = 1,2;$
$d(x) = q(x),\ \varphi(x) = f(x), \quad \forall x \in \omega_h.$

b) Veränderliche Wärmeleitzahl: $\curvearrowright$ Integralbilanzmethode (siehe Punkt 5.2: FVM):

$\lambda = 1$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\text{div } (\lambda(x)\nabla u(x)) + q(x)u(x) &=& f(x),\ x \in \Omega, \\ u(x) &=& g(x),\ x \in \Gamma. \end{array} \right.$$

$\Downarrow$ (siehe Kapitel 1) $\Uparrow \leftarrow$ Vor., $h_1, h_2 \to 0$

$$\int_{\square} (-\text{div } (\lambda \nabla u) + qu)\, dx = \int_{\square} f\, dx \quad \forall \square \subset \Omega$$

$\Downarrow$

$$-\int_{\partial \boxdot} \lambda \frac{\partial u}{\partial n}\, ds + \int_{\boxdot} qu\, dx = \int_{\boxdot} f\, dx \quad \forall x = \bullet \in \omega_h$$

$\Downarrow$

(5.9)
$$\boxed{\begin{array}{l} -\left(-\lambda_{i_1-\frac{1}{2},i_2} h_2 v_{\bar{x}_1,i} + \lambda_{i_1+\frac{1}{2},i_2} h_2 v_{x_1,i}\right) - \left(-\lambda_{i_1,i_2-\frac{1}{2}} h_1 v_{\bar{x}_2,i} + \lambda_{i_1,i_2+\frac{1}{2}} h_1 v_{x_2,i}\right) + \\ \qquad + d_i v_i h_1 h_2 = \varphi_i h_1 h_2 \qquad \forall i = (i_1, i_2) \in \omega_h, \\ \qquad\qquad v_i = g_i \qquad\qquad \forall i \in \gamma_h, \end{array}}$$

mit $d_i = q(x^{(i)}),\ \varphi_i = f(x^{(i)}),\ g_i = g(x^{(i)}),$
$\lambda_{i_1 \pm \frac{1}{2}, i_2} = \lambda\left((i_1 \pm \frac{1}{2})h_1, i_2 h_2\right), \lambda_{i_1, i_2 \pm \frac{1}{2}} = \lambda(i_1 h_1, (i_2 \pm \frac{1}{2})h_2),$
wobei λ, q, f und g als stetig vorausgesetzt wurden.

■ **Ü 5.9** Leiten Sie mit Hilfe der Integralbilanzmethode ein DS für stückweise Konstante λ, q, f her, wenn die Interfacelinien durch das Primärgitter erfaßt werden !

■ **Fehlerschema:** Fehler $z(x) = \overset{(5.7)}{u(x)} - \overset{(5.8)}{v(x)}, x \in \bar{\omega}_h$:

(5.10)
$$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{-\Lambda z(x) + d(x)z(x)}_{=:L_h z(x)} = -\Lambda u + du - \underbrace{(-\Lambda v + dv)}_{\varphi = f = -\Delta u + qu} \equiv \psi(x), x \in \omega_h, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Approximationsfehler} \\ z(x) = 0, x \in \gamma_h. \end{array}}$$

5.1.5.2 Untersuchung der lokalen Approximationsordnung (Konsistenzfehler) mittels Taylorreihentechnik

- **Lemma 5.16:**

Vor.:	$\left\lvert \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} \right\rvert \le c_{A,\infty}(u) \quad \forall x \in \Omega, \alpha = 1,2$
Bh.:	$\lvert \psi(x) \rvert \le \frac{c_{A,\infty}(u)}{12} \lvert h \rvert^2$ mit $\lvert h\rvert^2 = h_1^2 + h_2^2, h_\alpha \le l_\alpha/2.$

Beweis:

$$\psi(x) = -\Lambda u + du - (-\Delta u + qu) = \Delta u - \Lambda u + \underbrace{(d-q)}_{=0,\ \text{da } d(x)=q(x), x\in\omega} u =$$

$x \in \omega_h$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} \right] =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{u(\boldsymbol{x}_1 - h_1, x_2) - 2u(x_1,x_2) + u(\boldsymbol{x}_1 + h_1, x_2)}{h_1^2} \right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} - \frac{u(x_1, \boldsymbol{x}_2 - h_2) - 2u(x_1,x_2) + u(x_1, \boldsymbol{x}_2 + h_2)}{h_2^2} \right] =$$

$$\overset{\textbf{Taylor}}{=} -\frac{h_1^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u(x_1 - \theta_1 h_1, x_2)}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4 u(x_1 + \bar\theta_1 h_1, x_2)}{\partial x_1^4} \right] -$$

$$-\frac{h_2^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u(x_1, x_2 - \theta_2 h_2)}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u(x_1, x_2 + \bar\theta_2 h_2)}{\partial x_2^4} \right].$$

$\uparrow$

$\exists\ \theta_1, \bar\theta_1, \theta_2, \bar\theta_2 \ \in [0,1]$ **q.e.d.**

- **Bemerkung:** $c_{A,\infty}(u) := \max\limits_{\alpha=1,2} \max\limits_{x\in\bar\Omega} \left\lvert \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x_\alpha^4} \right\rvert.$

5.1.5.3 Untersuchung der C_h-C_h–Stabilität mittels Maximumprinzip

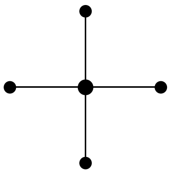
Fall 1 Vor.: $q(x) \ge q_0 = \text{const.} > 0 \quad \forall x \in \Omega.$

- $\Rightarrow d(x) = q(x) \ge q_0 = \text{const.} > 0 \quad \forall x \in \omega_h.$
- Bezeichnung: $v(\cdot) : \bar\omega_h \to I\!R^1,$
  $v^{1\pm} = v(x_1 \pm h_1, x_2), v^{2\pm} = v(x_1, x_2 \pm h_2).$
- Fehlerschema:

  (5.10)

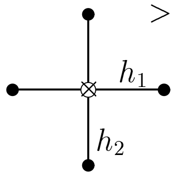
$$\left\{ \begin{array}{l} -\Lambda z + dz = \psi(x), x \in \omega_h \\ z(x) = 0, x \in \gamma_h \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} -\frac{z^{1-} - 2z + z^{1+}}{h_1^2} - \frac{z^{2-} - 2z + z^{2+}}{h_2^2} + dz = \psi(x), x \in \omega_h \\ z(x) = 0 \end{array} \right\}$$

$L_h z(x) =$



$S_h(x)$
$x \in \omega_h$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{\left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}+d(x)\right)}_{\substack{A(x)\\ >0}} z(x) - \underbrace{\left\{\frac{1}{h_1^2}z^{1-}+\frac{1}{h_1^2}z^{1+}+\frac{1}{h_2^2}z^{2-}+\frac{1}{h_2^2}z^{2+}\right\}}_{\sum\limits_{\xi\in S_h'(x)} B(x,\xi)z(\xi) \quad > 0} = \psi(x) \end{array}}$$



- Nun gilt:

  1. $A(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} + d(x) > 0, B(x,\xi) = \frac{1}{h_\alpha^2} > 0$
  2. $L_h 1 \equiv D(x) = d(x) \geq q_0 = \text{const.} > 0$

  $\Bigg\}$ DS (5.10) ist streng monoton !

  $\Rightarrow$ Voraussetzungen von Satz 5.12 sind erfüllt:

  (5.11') $\boxed{\|z\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \left\|\frac{\psi}{D}\right\|_{C(\omega_h)} \leq \frac{1}{q_0}\|\psi\|_{C(\omega_h)}}$

  $= C_h$-C_h–Stabilität des Fehlerschemas $(X_h = C(\bar{\omega}_h), Y_h = C(\omega_h))$.

Fall 2 Vor.: $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$ (z.B. $q = 0$: Poisson-Gleichung).

- $\Rightarrow d(x) = q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \omega_h$.

- Nun gilt:

  1. $A(x) > 0, B(x,\xi) > 0$
  2. $L_h 1 \equiv D(x) = d(x) \geq 0$

  $\Bigg\}$ DS (5.10) ist nur monoton !

  $\Rightarrow$ Satz 5.12 ist nicht anwendbar !!

- Ausweg:
  - Gershgorinsche Majorantenfunktion $\bar{z}(x) = c(R^2 - r^2), r^2 = x_1^2 + x_2^2$ mit noch frei wählbaren Konstanten $c, R = \text{const.} > 0$.
  - Anwendung des Vergleichssatzes 5.10 !

- Zur Wahl von R und c:

$$\begin{aligned} L\bar{z}(x) &\overset{\text{NR.}}{=} c(4 + d(x)(R^2 - r^2)) \geq |\psi(x)| \qquad \forall x \in \omega_h \\ \bar{z}(x) &= c(R^2 - r^2)|_{\gamma_h} \geq 0 = |z|_{\gamma_h}| = 0 \qquad \forall x \in \gamma_h \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R^2 \geq l_1^2 + l_2^2 \;\; \text{z.B. } R^2 = l_1^2 + l_2^2 \\ c = \|\psi\|_{C(\omega_h)}/4 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } L\bar{z}(x) &= -\bar{z}_{\bar{x}_1 x_1} - \bar{z}_{\bar{x}_2 x_2} + d(x)c(R^2 - r^2) \\ &= -c(R^2 - r^2)_{\bar{x}_1 x_1} - c(R^2 - r^2)_{\bar{x}_2 x_2} + d(x)c(R^2 - r^2) \\ &= c(2 + 2 + d(R^2 - r^2)) \end{aligned}$$

Vergleichssatz 5.10:

$$\left.\begin{array}{l} |\psi(x)| \leq \frac{1}{4}\|\psi\|_{C(\omega_h)}(4 + d(x)(R^2 + r^2)) \quad \forall x \in \omega_h \\ 0 = z(x) \leq \bar{z}(x) \quad \forall x \in \gamma_h. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |z(x)| \leq \bar{z}(x) \\ x \in \bar{\omega}_h. \end{array}$$

- Resultat:

$$\text{(5.11”)} \quad \boxed{\|z\|_{C(\bar{\omega}_h)} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |z(x)| \leq \max_{x \in \bar{\omega}_h} \bar{z}(x) = \max_{x \in \bar{\omega}_h} \frac{\|\psi\|_{C(\omega_h)}}{4}(R^2 - r^2) = \frac{R^2}{4}\|\psi\|_{C(\omega_h)}}$$

■ **Lemma 5.17:**

Vor.: $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \omega_h$,

$$z : \bar{\omega}_h \to \mathbb{R}^1 : L_h \left.\begin{array}{ll} z(x) = \psi(x), & x \in \omega_h \\ z(x) = 0, & x \in \gamma_h \end{array}\right\} \text{Fehler–DS.}$$

Bh.: Dann gilt:

(5.11) $\|z\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq c_S \|\psi\|_{C(\omega_h)}$,

$$\text{mit} \quad c_S = \begin{cases} \min\{1/q_0, R^2/4\}, & \text{falls } q(x) \geq q_0 = \text{ const. } > 0 \ \forall x \in \omega_h, \\ R^2/4, & \text{falls } q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \omega_h, \end{cases}$$

$$R^2 = l_1^2 + l_2^2.$$

Beweis: folgt sofort aus (5.11’) und (5.11”). **q.e.d.**

5.1.5.4 Diskrete Konvergenz in der $C_h = C(\bar{\omega}_h)$-Norm als unmittelbare Folgerung aus der Approximation und der Stabilität

Satz 5.18:

Vor.: 1. $u \in C^4(\bar{\Omega}) : \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4}\right| \leq c_{A,\infty}(u) \quad \forall x \in \bar{\Omega},\ \alpha = 1, 2.$

2. $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$

Bh.: Dann gilt die Diskretisierungsfehlerabschätzung:

$$\|u - v\|_{C(\bar{\omega}_h)} := \max_{x \in \bar{\omega}_h} |u(x) - v(x)| \leq c_S \frac{c_{A,\infty}(u)}{12} |h|^2,$$

(5.7) (5.8)

wobei $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2,\ R^2 = l_1^2 + l_2^2,$

$$c_S = \begin{cases} \min\{1/q_0, R^2/4\}, & \text{falls } q(x) \geq q_0 = \text{const.} > 0 \quad \forall x \in \Omega, \\ R^2/4, & \text{falls } q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

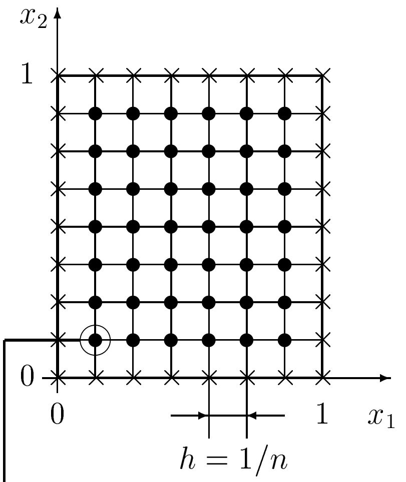
Beweis: folgt sofort aus Lemma 5.16 und Lemma 5.17. **q.e.d.**

5.1.5.5 Einige Bemerkungen zu Eigenschaften und Auflösung des DS (8)

- **Setzen o. B. d. Allg.:** $\boldsymbol{l_1 = l_2 = 1,\ n_1 = n_2 = n, h = 1/n = h_1 = h_2,}$
  $\boldsymbol{q = 0(\curvearrowright d = 0)}$.

Betrachten DS (5.8): $v(\cdot) : \bar{\omega}_h \to I\!R^1 :$

$$\begin{aligned} -\Lambda v(x) &= \varphi(x),\ \forall x \in \omega_h, \\ v(x) &= g(x),\ \forall x \in \gamma_h. \end{aligned}$$



× in den Randpunkten ist $v(x) = g(x)$ bekannt !

• in den $(n-1)^2$ inneren Punkten ist $v(x), x \in \omega_h$ gesucht !

• DS (6) wird nur in den inneren Gitterpunkten $x \in \omega_h$ aufgeschrieben

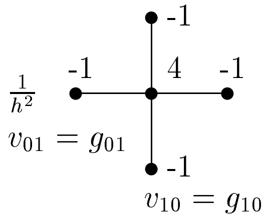
$\Downarrow$

GS der Dimension $N = (n-1)^2$ zur Bestimmung der $(n-1)^2$ unbekannten Werten der Gitterfunktion $u(x), x \in \omega_h$.

$x^{(i)} = (i_1 h, i_2 h), i_1, i_2 = \overline{0, n}$

⊙ Einbau der wesentlichen RB ⇒ Korrektur der rechten Seite !

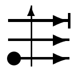
Beispiel:

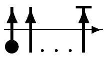


$\bar{\varphi}11 = \varphi_{11} + \frac{1}{h^2} g_{01} + \frac{1}{h^2} g_{10}$

- **Aussehen der Systemmatrix des GS** hängt von der Art und Weise der Anordnung der Werte der Gitterfunktion $v(x), x \in \omega_h$, in einem Vektor $\underline{v} \equiv \underline{v}_h$ ab:

  $\Rightarrow$ Durchnumerierungsproblematik:

  a) horizontale Anordnung: 
  $v(x), x \in \omega_h \leftrightarrow \underline{v} = [v_{11}, \ldots, v_{n-1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{n-1,2}, \ldots, v_{n-1,n-1}]^T \in I\!R^{(n-1)^2}$.

  b) vertikale Durchnumerierung: 

  c) diagonale Durchnumerieurng:  (mms: Matrixgestalt !) usw.

- **Bei horizontaler Durchnumerierung erhalten wir:**

$$
\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{smallmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ & & & -1 \end{smallmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
\begin{smallmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & 4 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{smallmatrix} & \cdots & 0 \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \begin{smallmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{smallmatrix} \\ \hline
0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & 4 \end{smallmatrix}
\end{array}\right]}_{K}
\underbrace{\left[\begin{array}{c}
v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n-1,1} \\ \hline v_{1,2} \\ \vdots \\ v_{n-1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{1,n-1} \\ \vdots \\ v_{n-1,n-1}
\end{array}\right]}_{\underline{v}}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{c}
\bar{\varphi}_{11} \\ \bar{\varphi}_{21} \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_{n-1,1} \\ \hline \bar{\varphi}_{1,2} \\ \bar{\varphi}_{2,2} \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_{n-1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline \bar{\varphi}_{1,n-1} \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_{n-1,n-1}
\end{array}\right]}_{\underline{\varphi}}
$$

- **(Unabhängig von der Durchnumerierung) gelten folgende Eigenschaften:**

  1. GS ist großdimensioniert: Dim (GS) $= N = (n-1)^2 = \boldsymbol{O(h^{-2})}$
  2. K ist schwach besetzt: NNE pro Zeile $\leq 5 \qquad = \boldsymbol{O(1)}$
NNE $(K) = \boldsymbol{O(h^{-2})}$
  3. Halbe BW $(K) = h^{-1} = \boldsymbol{O(h^{-1})}$ (BW ist durchnumerierungsabhängig !)
$O(h^{-1})$ ist aber durch Umnumerierung nicht verbesserbar !
  4. $K = K^T$ p.d. (spd).
  5. EWP: $K\underline{\varphi} = \lambda\underline{\varphi}$

     EW: $\lambda_{k_1,k_2}(K) = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{k_1\pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}$

     $$\curvearrowright \left(\frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2}\right) \leq \lambda_{k_1k_2}(K) \leq 4\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)$$

     EV=E-Funktion: $\underline{\varphi}_{k_1k_2} = [\varphi_{k_1k_2}(i_1h_1, i_2h_2)]_{i_1=\overline{1,n_1-1},i_2=\overline{1,n_2-1}}$

     $$\varphi_{k_1k_2}(i_1h_1, i_2h_2) = \frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\sin\frac{k_1\pi i_1}{h_1}\sin\frac{k_2\pi i_2}{h_2}$$

     $k_\alpha = \overline{1, n_\alpha - 1}, \quad \alpha = 1, 2.$
  6. $\kappa(K) = \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_{\min}(K)} = O(h^{-2})$

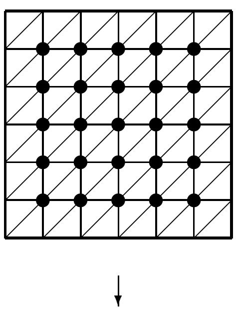
  (vergleiche auch Punkt 4.3 „Eigenschaften der FE-Gleichungssysteme“)

- $\boxed{\textbf{Ü 5.10}}$ Man zeige, daß gilt:

  $$K_h^{\text{FEM}} = h^2 K_h^{\text{FDM}},$$

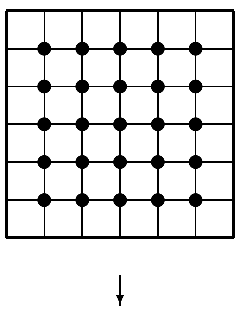
  wobei $\Omega = (0,1)^2, q = 0, h_1 = h_2 = h = 1/n$:

FEM



K_h^{FEM}

FDM



K_h^{FDM}

- **Auflösung von $\boldsymbol{K\underline{v} = \underline{\varphi}}$:** (siehe Kapitel 6 und Praktikum)

  1. Direkte Verfahren: [13], [20].
  2. Iterative Verfahren: [2], [5], [13], [17], [20].

5.2 Die Finite Volumen Methode (FVM)

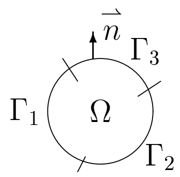
- **FVM** = **F**inite **V**olumen **M**ethode
  = Integralbilanzmethode = Box-Methode.

- **Lehrbücher:** [13], [15], [18].

5.2.1 Die Integralbilanzformulierung von elliptischen RWA 2. Ordnung

- **Sei $\Omega \subset I\!R^2$ (bzw. $I\!R^m$) – † Gebiet: $\partial\Omega \in C^{0,1} \cap PC^k$ (mit gewissem $k \geq 2$).**
  Betrachten elliptische RWA 2. Ordnung (siehe Kapitel 1 – 3):

$$(5.12)\quad Lu(x) := -\mathrm{div}(\underline{a(x)}\nabla u(x)) + \underbrace{b^T(x)\nabla u(x)}_{\text{Konvektionsterm}} + c(x)u(x) = f(x),\ \ x \in \Omega,$$



$$\boxed{\begin{array}{l} a(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{bmatrix} = a^T(x) \quad \text{gleichmäßig p.d. (Elliptizitätsbedingung !)} \\ \underline{\text{Spezialfall:}} \\ a(x) = a(x)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,\ \ c(x) \geq 0. \end{array}}$$

$$lu(x) := \left\{ \begin{array}{l} u(x) \\ \frac{\partial u}{\partial N} := \big(a(x)\nabla u(x), \vec{n}(x)\big) \\ \frac{\partial u}{\partial N} + \kappa(x)u(x) \end{array} \right\} = g(x) := \left\{ \begin{array}{l} g_1(x),\ x \in \Gamma_1 \\ g_2(x),\ x \in \Gamma_2 \\ g_3(x),\ x \in \Gamma_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \}\,\Gamma_D \\ \Big\}\,\Gamma_N \end{array}$$

- **Sei $\mathcal{H}(x) \in \mathcal{L}(x) := \{\mathcal{H}(x) : \mathcal{H} \subset \Omega$ – offenes, einfachzusammenhängendes, sternförmiges Gebiet, $x \in \overline{\mathcal{H}}, \partial\mathcal{H} \in C^{0,1} \cap PC^2$ (stückweise glatt)$\}$** zulässige Box im Punkt $x \in \bar{\Omega}$ und integrieren PDgl. $Lu = f$ über die Box $\mathcal{H}(x)$:

$$(5.13)\qquad \int\limits_{\mathcal{H}(x)} Lu(y)\,dy = \int\limits_{\mathcal{H}(x)} f(y)\,dy \Leftrightarrow \int\limits_{\Omega} Lu \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{H}(x)}\,dy = \int\limits_{\Omega} f(y)\mathcal{X}_{\mathcal{H}(x)}(y)\,dy$$

Testfunktion = charakteristische Funktion der Box $\mathcal{H}(x)$, d.h.,

$$\mathcal{X}_{\mathcal{H}(x)}(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & y \in \bar{\mathcal{H}}(x), \\ 0, & \text{sonst.} \end{array} \right.$$

Partielle Integration im Hauptteil ergibt

$$-\int\limits_{\mathcal{H}(x)} \mathrm{div}\ \big(a(y)\nabla u(y)\big)\,dy = -\int\limits_{\partial\mathcal{H}(x)} \underbrace{\big(a(y)\nabla u(y), \vec{n}(y)\big)}_{=:\partial u/\partial N}\,ds.$$

Unter Beachtung der natürlichen RB auf $\partial\mathcal{H}_N(x) := \partial\mathcal{H}(x) \cap \Gamma_N$, d.h.,

$$\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_{\partial\mathcal{H}_2 := \partial\mathcal{H}\cap\Gamma_2} = g_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_{\partial\mathcal{H}_3 := \partial\mathcal{H}\cap\Gamma_3} = -\kappa u + g_3$$

erhalten wir die Integralbilanzformulierung:
(5.14)

Kann abgeschwächt werden,
siehe Bemerkung 5.19 !
↓

Gesucht $u \in V_g := \{v \in V = W_2^1(\Omega) : v = g_1 \text{ auf } \Gamma_1\} \cap W_2^2(\Omega)$:

$$-\int\limits_{\partial\mathcal{H}\setminus\partial\mathcal{H}_N} (a\nabla u, \vec{n})\, ds + \int\limits_{\mathcal{H}} (b, \nabla u)\, dy + \int\limits_{\mathcal{H}} cu\, dy + \int\limits_{\partial\mathcal{H}_3} \kappa u\, ds = \\ = \int\limits_{\mathcal{H}} f\, dy + \int\limits_{\partial\mathcal{H}_N} g\, ds$$

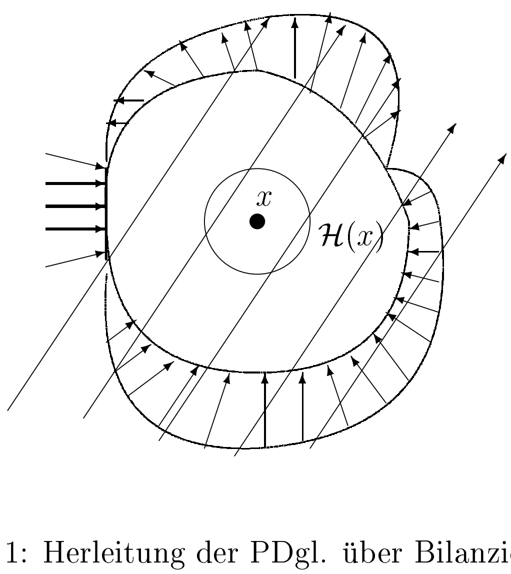
$\forall$ zulässige Boxen $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x) \in \mathcal{L}(x) \quad \forall$ (fix) $x \in \Omega \cup \Gamma_N$.

■ **Bemerkung 5.19:**

1. $u \in V_g \cap W_2^{1+\lambda}(\Omega)$ garantiert integrierbare Spur von $\frac{\partial u}{\partial N}$ auf $\partial\mathcal{H}$ $\left(\frac{\partial u}{\partial N} \in L_1(\partial\mathcal{H})\ !\right)$, falls $\lambda > \frac{1}{2}$ und $a(\cdot)$ sowie $\partial\mathcal{H}$ „hinreichend" glatt sind (Sobolev'sche Einbettungssätze auf Mannigfaltigkeiten, siehe Numerik I [26], Kapitel 3 !)

3. Physikalische Bedeutung von (14):
Bilanzgleichung (5.14) drückt das Gleichgewicht (Balance) zwischen den folgenden Größen aus:

Gesamtfluß durch $\partial\mathcal{H} \setminus \partial\mathcal{H}_N$ + Eintrag in $\mathcal{H}$ durch Konvektion + Gegenreaktion durch die lösungabhängigen Quellen cu und κu (Reaktionsterme) = Gesamtquellintensität, hervorgerufen durch Flächenquellen in $\mathcal{H}$ mit der Dichte f und Linienquellen auf $\partial\mathcal{H}_N$ (falls $\neq \emptyset$) mit der Dichte g.



Vergleiche Kapitel 1: Herleitung der PDgl. über Bilanzierung !

3. Im Punkt 5.2.3 nutzen wir die Bilanzgleichung (5.14) in diskreten Punkten $x \in \omega = \overset{\circ}{\omega} \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ (= Primärgitter) und dazu speziell konstruierten Boxen $\mathcal{H}(x)$ (= Sekundärgitter) zur Konstruktion von DS auf beliebigen Dreiecks-, Vierecks- bzw. kombinierten Netzen.
4. Verallgemeinerung auf 3D liegt auf der Hand !

5.2.2 Primär- und Sekundärgitter

■ **Das polygonalberandete** † **Gebiet $\Omega \subset I\!R^2$ sei regulär triangularisiert** (→ siehe Kapitel 4):

$\Rightarrow \quad \forall h \in \Theta : \bar{\Omega} = \bigcup\limits_{r \in I\!R_h} \bar{\delta}_r \qquad x = x_{\delta_r}(\xi) \in \mathcal{P}_1 \to$ Einheitsdreieck

$\underline{\underline{\tau = \{\delta_r : r \in I\!R_h\}}} \ni \delta_r \qquad \xi = \xi_{\delta_r}(x)$

= Primärgitter

= analog zur FEM-Vernetzung

$x = x_{\delta_r}(\xi) \in Q_1 \to$ Einheitsviereck

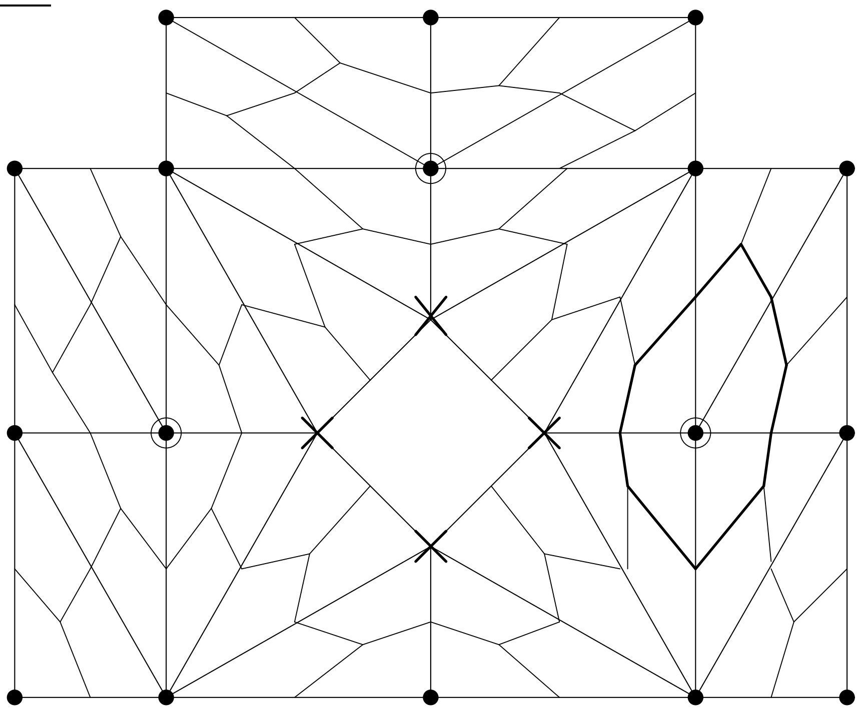
Kapitel 4: Defintion 4.3 (regulär)

(5.15) $\underline{c}_1 h^2 \le |J_{\delta_r}| \le \bar{c}_1 h^2$

(5.16) $\|J_{\delta_r}\| \le c_2 h$

(5.17) $\|J_{\delta_r}^{-1}\| \le c_3 h^{-1}$

Beispiel:

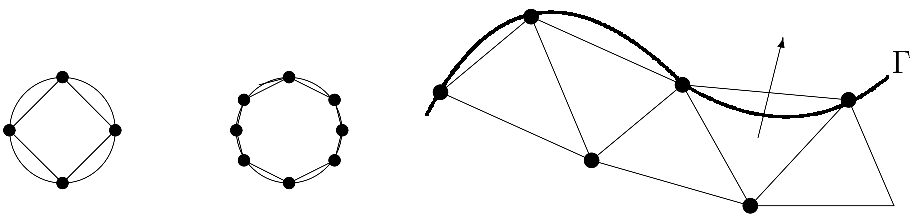


$\omega = \overset{\circ}{\omega} \equiv \{\odot\} \cup \gamma_N \equiv \{\bullet\}$

$$
\begin{array}{rclcrcl}
x \in \overset{\circ}{\omega} & \equiv & \{\odot\} \cup \gamma_N \equiv \{\bullet\} = \omega & \widehat{=} x^{(i)} : i \in \omega_h & = & \overset{\circ}{\omega}_h \cup \gamma_{N,h} \\
x \in \gamma & \equiv & \gamma_1 \equiv \{\times\} & \widehat{=} x^{(i)} : i \in \gamma_h & = & \gamma_{1h} \\
\bar{\omega} & = & \omega \cup \gamma & \bar{\omega}_h & = & \omega_h \cup \gamma_h
\end{array}
$$

- **Bemerkung 5.20:**

  Bei krummlinigen Randteilen ↷ polygonale Approximation:



$$
\begin{aligned}
\bar{\Omega} \quad &= \bigcup_{r\in I\!R_h} \bar{\tilde{\bar{\delta}}}_r,\ \tau\ = \left\{\bar{\tilde{\delta}}_r : r \in I\!R_h\right\} \ni \tilde{\delta}_r \ \overset{\text{nichtlineare Abbildung}}{\longleftrightarrow} \quad \equiv \Delta \\
&\wr\wr \uparrow h \to 0 \\
\bar{\Omega}_h \quad &= \bigcup_{r\in I\!R_h} \bar{\delta}_r,\ \tau\ = \left\{\delta_r : r \in I\!R_h\right\} \ni \delta_r \ \overset{P_1\text{-Abbildung}}{\longleftrightarrow} \quad \equiv \Delta
\end{aligned}
$$

Referenzdreieck

- In den Gitterpunkten $x \in \overline{\omega}$ definieren wir nun **Bilanzierungsboxen** $\mathcal{H}(x) \in \mathcal{L}(x)$:

$$
(5.18) \qquad \begin{cases} H(x) = \text{meas } \mathcal{H}(x) = O(h^2), \quad \forall x \in \bar{\omega}, \\ \bar{\Omega} = \bigcup\limits_{x\,\in\,\bar{\omega}} \overline{\mathcal{H}(x)}, \\ \overset{\circ}{\mathcal{H}}(x) \cap \overset{\circ}{\mathcal{H}}(y) = \emptyset \quad \forall x, y \in \bar{\omega} : x \neq y. \end{cases}
$$

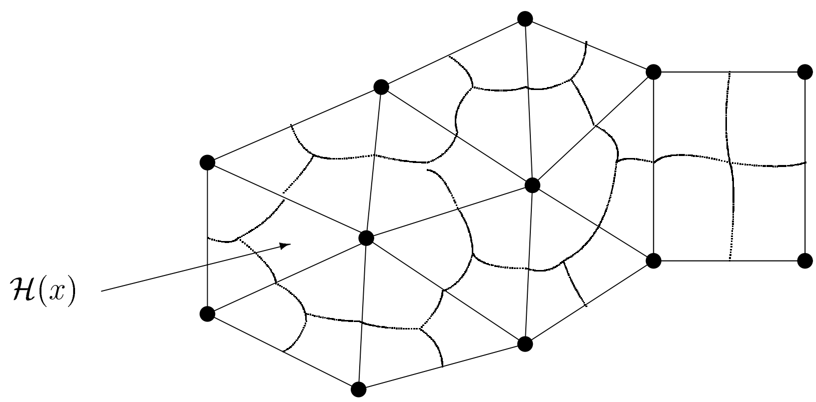
Die dadurch entstehende Zerlegung

$$\tau_{\mathcal{H}} := \{\mathcal{H}(x) : x \in \bar{\omega}\} = \text{Menge aller Boxen}$$

von Ω in Boxen (= Kontrollvolumen = Finites Volumen) heißt **Sekundärvernetzung** (bzw. Sekundärgitter).

- **Zur Konstruktion der Sekundärvernetzung zu einer primären Dreiecks- (Vierecks-) Vernetzung gibt es verschiedene Möglichkeiten:**

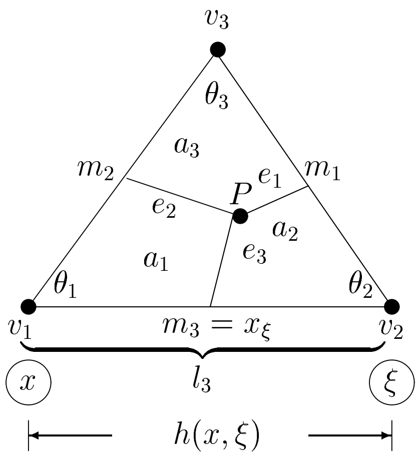
  1) Beliebige Sekundärvernetzung, z.B. der Art:

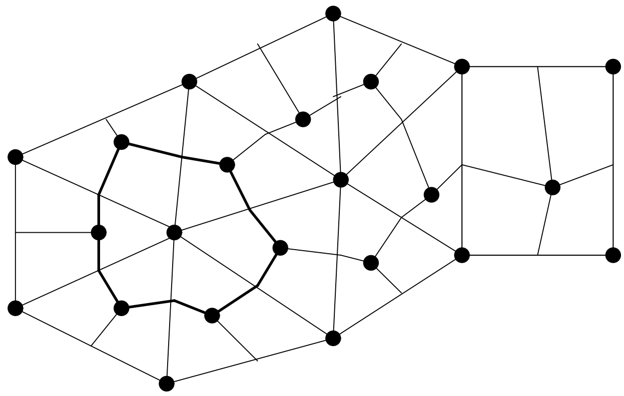


2) Polygonal berandete Boxen:

2a) Seitenmittelpunkt •—• allgemein Punkt $P_r \in \delta_r$ bzw. $\in \bar{\delta}_r$:

$\delta = \delta_r \in \mathcal{T}$

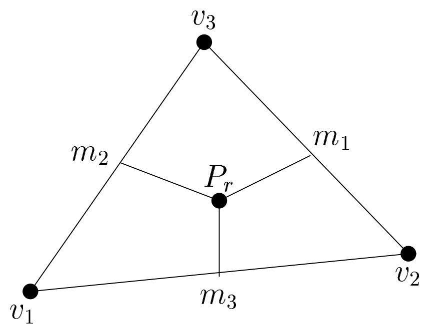


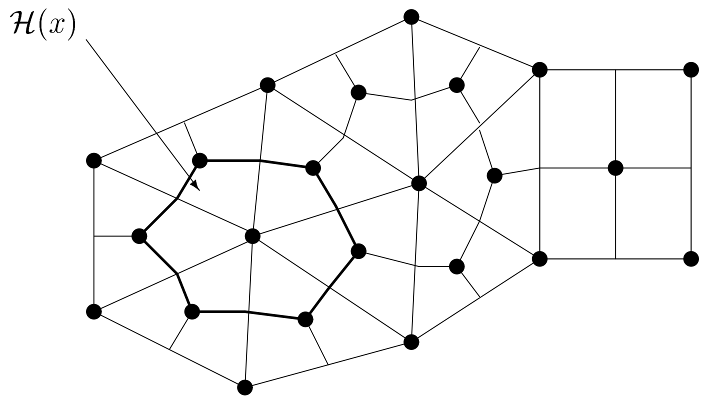


2b) Seitenmittelpunkt •—• Schwerpunktmethode: P_r = Schwerpunkt von δ_r:

Methode MD (<u>Me</u>d<u>i</u>ans):

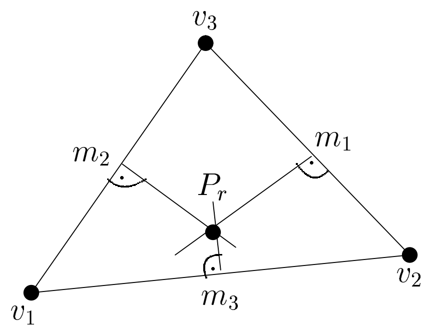
$P_r = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3), a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}|\delta_r|$

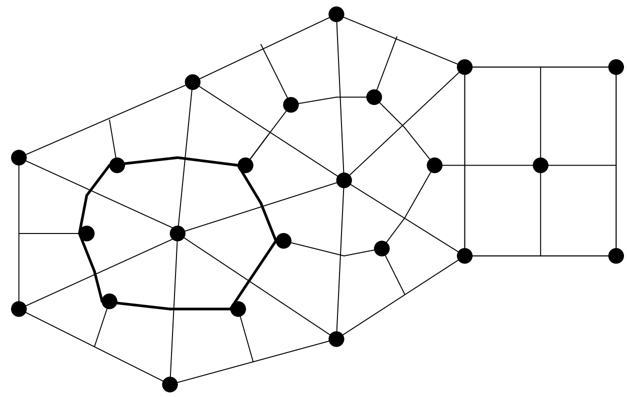




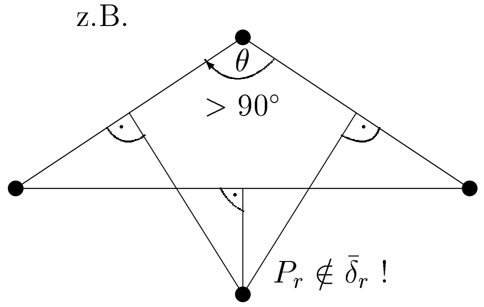
($\longrightarrow$ Siehe Modellbeispiel !)

2c) Mittelsenkrechtenmethode: P_r = Schnittpunkt der Mittelsenkrechten:
Methode PB (<u>P</u>erpendicular <u>B</u>isectors) = Voroni-Netz:



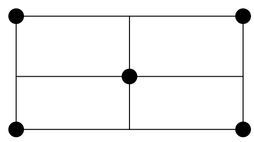


<u>Vorsichtig</u> $P_r \notin \bar{\delta}_r$ möglich !
z.B.

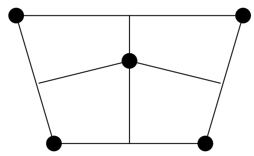


<u>Vor:</u> für $P_r \in \bar{\delta}_R : \Theta \leq \pi/2$
$\forall$ Innenwinkel Θ.
! $\Theta > \frac{\pi}{2}$ für einen Innenwinkel
$\curvearrowright$ $P_r \notin \bar{\delta}_R$.

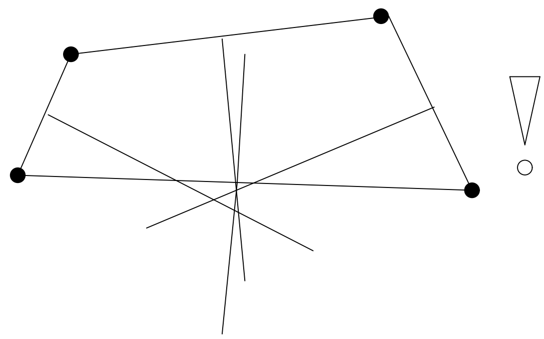
- <u>Rechteck:</u>



- <u>gl. Trapez:</u>



- <u>kein allgemeines Viereck zulässig !</u>



5.2.3 Konstruktion von Differenzenschemata mittels FVM

5.2.3.1 Direkte Approximation der Bilanzgleichungen

- **Betrachten reguläre Dreiecksvernetzung des polygonal-berandeten Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *:**

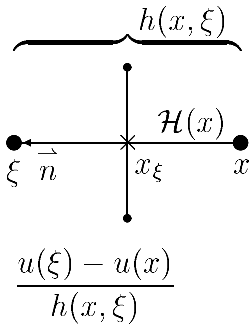
$$\bar{\Omega} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_h} \bar{\delta}_r, \ \tau := \{\delta_r : r \in \mathbb{R}_h\}, h \in \Theta :$$
$$\sphericalangle\, \delta_r < \pi/2 \ (\circlearrowright P_r \in \delta_r) \ (\text{bzw.} \ \leq \tfrac{\pi}{2} \circlearrowright P_r \in \bar{\delta}_r) \quad \forall r \in \mathbb{R}_h \quad \forall h \in \Theta.$$

Sekundärgitter sei der Einfachheit halber mittels PB-Methode (Voroni-Netz) konstruiert (siehe Punkt 5.2.2):

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{x \in \bar{\omega}} \bar{\mathcal{H}}(x), \quad \tau_{\mathcal{H}} := \{\mathcal{H}(x) : x \in \bar{\omega}\}.$$

- **Betrachten System der Bilanzgleichungen** $(5.14)_{\mathcal{H}(x)}$ $\forall x \in \omega = \mathring{\omega} \cup \gamma_N$ und approximieren:

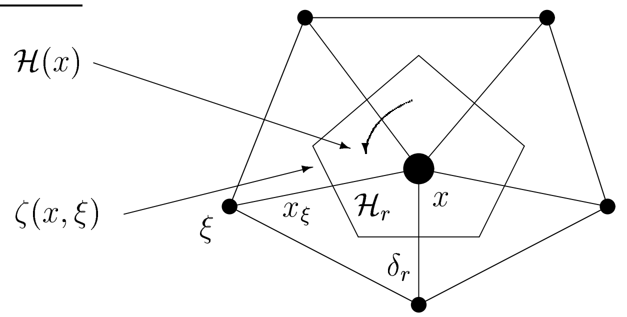
$$\int_{\partial\mathcal{H}\setminus\partial\mathcal{H}_N} \ldots ds \quad \text{mit Quadraturformeln,}$$
$$\int_{\mathcal{H}} \ldots dy \quad \text{mit Kubaturformeln,}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \quad \text{mit Differenzen}$$



für den Fall stetiger Daten, d.h.,

$$\text{(5.19)} \qquad a(x) = a(x)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a(\cdot) \in C(\bar{\Omega}),$$
$$b(\cdot) \equiv 0 \quad \text{(keine Konvektion; siehe auch Bemerkung 5.22)},$$
$$c(\cdot), \ f(\cdot) \in C(\bar{\Omega}),$$
$$\kappa(\cdot) \in C(\Gamma_3), g_\alpha(\cdot) \in C(\Gamma_\alpha), \ \alpha = 1,2,3 :$$

a) $\underline{\underline{\boldsymbol{x \in \mathring{\omega}}}}$:



PB–Methode
$H(x) = \text{meas}\,\mathcal{H}(x) = O(h^2)$

$\mathcal{H}_r = \mathcal{H} \cap \delta_r,$
$r \in B(x) := \big\{ r \in I\!R_h : x \in \bar{\delta}_r \big\},$
$S_{\not h}(x) = \{x, \xi, \ldots\} = \{\bullet \overbrace{\cdots\cdots}\} = S'_{\not h}(x) \cup \{x\}.$

Differenzenstern — Umgebung des Differenzensystems

Bilanzgleichung im Punkt $x \in \overset{\circ}{\omega}$ für Box $\mathcal{H}(x)$:

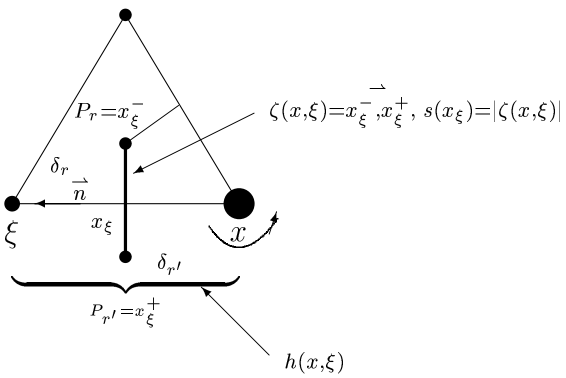
$$-\int\limits_{\partial\mathcal{H}(x)} \underbrace{(a\nabla u, \vec{n})}_{=a\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}}\, ds + \cancel{\int\limits_{\mathcal{H}(x)} \underbrace{(b,\nabla u)}_{\|\,0}\, dy} + \int\limits_{\mathcal{H}(x)} cu\, dy = \int\limits_{\mathcal{H}(x)} f(y)\, dy$$

1 $\quad\downarrow$ siehe Bemerkung 5.22 $\quad$ 2 $\quad$ 3

und approximieren die Terme 1 - 3 direkt:

1 $$\int\limits_{\partial\mathcal{H}(x)} a\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds = \sum_{\xi\in S'(x)} \int\limits_{\zeta(x,\xi)} a\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds \approx \sum_{\xi\in S'(x)} \bar{a}(x_\xi)\frac{u(\xi)-u(x)}{h(x,\xi)} s(x_\xi)$$

$\bar{a}(x_\xi) = a(x_\xi)$
für $a \in C(\bar{\Omega})$!



2 $\quad \int\limits_{\mathcal{H}(x)} cu\, dy \;\approx\; \bar{c}(x)u(x)H(x) \quad$ mit $\bar{c}(x) = c(x),\quad$ da $c \in C(\bar{\Omega})$

3 $\quad \int\limits_{\mathcal{H}(x)} f\, dy \;\approx\; \bar{f}(x)H(x) \quad$ mit $\bar{f}(x) = f(x),\quad$ da $f \in C(\bar{\Omega})$

<u>Resultat:</u> $u \mapsto v$ (Gitterfunktion), $L \mapsto L_h$ (Differenzenoperator):

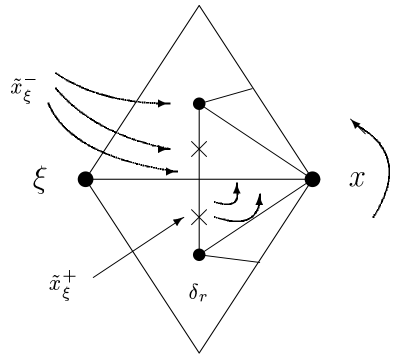
$$(5.20)_L \qquad \boxed{L_h v(x) := -\frac{1}{H(x)} \sum_{\xi\in S'(x)} \bar{a}(x_\xi) \underbrace{\frac{v(\xi)-v(x)}{h(x,\xi)}}_{=:v_{\vec{n}}(x_\xi)} s(x_\xi) + \bar{c}(x)v(x) = \bar{f}(x) =: f_h(x) \qquad \forall x \in \overset{\circ}{\omega}}$$

Bemerkung 5.21: zu stückweise stetigen Daten,

d.h., $a, c, f \in PC(\bar{\Omega})$ und Interface-Linien werden durch die Primärvernetzung erfaßt $\curvearrowright$ $a, c, f \in C(\bar{\delta}_r) \quad \forall r \in I\!R_h \quad \forall h \in \Theta$:

1

$$\bar{a}(x_\xi) := \left[a(\tilde{x}_\xi^-)s(\tilde{x}_\xi^-) + a(\tilde{x}_\xi^+)s(\tilde{x}_\xi^+)\right] / s(x_\xi)$$



„Stetigkeit des Flusses“ !

2

$$\int\limits_{\mathcal{H}(x)} cu\,dy \approx \sum_{r \in B(x)} \int\limits_{\mathcal{H}r} c\,dy \cdot u(x) \approx \ldots$$

3

$$\int\limits_{\mathcal{H}(x)} f\,dy = \sum_{r \in B(x)} \int\limits_{\mathcal{H}r} f\,dy \approx \ldots$$

Es sind verschiedene Approximationstechniken möglich, z.B. auch elementweises Vorgehen wie bei der FEM (vergleiche auch Punkt 5.2.3.1) !

Ü 5.11 Man zeige, daß in $(5.20)_L$ der Differenzenoperator L_h monoton ist ! Falls $c(x) \geq \underline{c} = \text{const.} > 0 \ \forall x \in \bar{\Omega}$, dann ist L_h sogar streng monoton !

Bemerkung 5.22: Zur Approximation des Konvektionsterms.

Der Konvektionsterm $\int\limits_{\mathcal{H}(x)} (b, \nabla u)\,dy$ kann so approximiert werden (Upwind-Approximation), daß die Monotonie von L_h erhalten bleibt (vergleiche auch Ü 5.4 für den 1D-Fall !).

Von B. Heinrich [18] stammt folgender Vorschlag:
Ausgangspunkt sind folgende Beziehungen: $x \in \omega = \overset{\circ}{\omega} \cup \gamma_N$

$$\int\limits_{\mathcal{H}(x)} (b, \nabla u)\, dy = \int\limits_{\partial\mathcal{H}(x)} (b, \vec{n}) u\, ds - \int\limits_{\mathcal{H}(x)} \text{div } b \cdot u\, dy$$

$$= \underbrace{\int\limits_{\partial\mathcal{H}(x)} (b, \vec{n})(y)\{u(y) - u(x)\}\, ds_y}_{=:I(x)} + \underbrace{\int\limits_{\mathcal{H}(x)} \text{div } b(y)\,(u(x) - u(y))\, dy}_{=:\rho_0(x)}$$

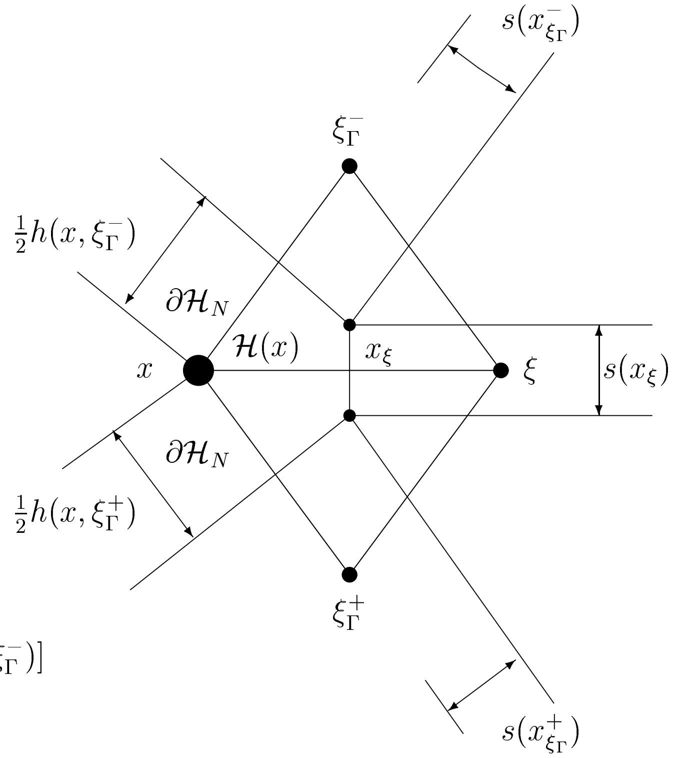
$$\uparrow$$

$$\underbrace{\left[\int\limits_{\mathcal{H}(x)} \text{div } b(y)\, dy - \int\limits_{\partial\mathcal{H}(x)} (b, \vec{n})\, ds\right]}_{=0} u(x) = 0$$

$$= I(x) + \rho_0(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{div } b = 0}}{=} I(x) \approx \ldots$$

b) $\underline{\underline{\boldsymbol{x \in \gamma_N = \gamma_2 \cup \gamma_3}:}}$

z.B.
$\partial\mathcal{H}_N = \partial\mathcal{H}_3 = \partial\mathcal{H}_3(x)$



$h(x) = \frac{1}{2}[h(x, \xi_\Gamma^+) + h(x, \xi_\Gamma^-)]$

4 $$\int\limits_{\partial\mathcal{H}_N(x)} \kappa u\, ds \approx \kappa(x) u(x) \underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(h(x, \xi_\Gamma^-) + h(x, \xi_\Gamma^+)\right)\right]}_{=:h(x)}$$

mit $\bar{\kappa}(x) = \kappa(x)$ falls $\kappa \in C(\Gamma_3)$,

⑤
$$\int\limits_{\partial\mathcal{H}_N(x)} g\,ds \approx \bar g(x)h(x) \text{ mit } \bar g(x) = g(x) \text{ falls } g \in C(\Gamma_3).$$

<u>Resultat:</u> $u \mapsto v, l \mapsto l_h$

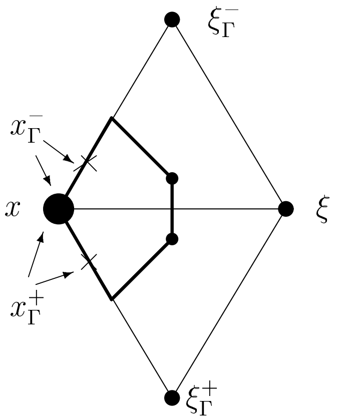
$(5.20)_l$

$$-\frac{1}{h(x)}\sum_{\xi\in S'(x)} \bar a(x_\xi)\frac{v(\xi)-v(x)}{h(x,\xi)}s(x_\xi) + \underbrace{\underbrace{\frac{H(x)}{h(x)}\bar c(x)v(x)}_{O(h)} + \bar\kappa(x)v(x)}_{:=} = \underbrace{\underbrace{\frac{H(x)}{h(x)}\bar f(x)}_{O(h)} + \bar q(x)}_{:=}$$

↖ kann weg- ↗
gelassen werden

$$\underbrace{-\frac{1}{h(x)}\sum_{\xi\in S'(x)} \bar a(x_\xi)\frac{v(\varphi)-v(x)}{h(x,\varphi)}s(x_\varphi) + \bar\kappa(x)v(x)}_{=:l_h v(x)} = \underbrace{\bar g(x)}_{=:g_h(x)}$$

<u>Bemerkung 5.23:</u> zu stückweise stetigen κ und g:
z.B.



$$h(x) = \frac{1}{2}[h(x,\xi_\Gamma^-) + h(x,\xi_\Gamma^+)]$$

$$\bar\kappa(x) = \frac{1}{2h(x)}\left\{h(x,\xi_\Gamma^-)\kappa(x_\Gamma^-) + h(x,\xi_\Gamma^+)\kappa(x_\Gamma^+)\right\} + \frac{H(x)}{h(x)}\bar c(x)$$

■ **Aus $(5.20)_L$ und $(5.20)_l$ folgt DS $A_h(x)u_h(x) = b_h(x), x \in \overline{\omega}_h$:**

(5.20)

Gesucht $u_h(\cdot) = v(\cdot) : \bar\omega \to \mathbb{R}^1$:

$$\left.\begin{array}{rcl} L_h u_h(x) &=& f_h(x), x \in \overset{\circ}{\omega} \\ l_h u_h(x) &=& g_h(x), x \in \gamma_N \end{array}\right\} \tilde L_h u_h(x) = \tilde f_h(x), x \in \omega_h$$

$$u_h(x) = g_1(x), x \in \gamma_1 \quad \} \; u_h(x) = \underset{\overset{\|}{g_1(x)}}{g_h(x)}, x \in \gamma_h := \gamma_1$$

$\boxed{\textbf{Ü 5.12}}$ Falls

$$\begin{array}{rcll} \bar a(x) &>& 0 & \forall x \in \omega, \\ \bar c(x) &\geq& 0 & \forall x \in \omega \quad (\text{bzw. } > 0 \text{ in } \omega) \text{ und} \\ \bar\kappa(x) &\geq& 0 & \forall x \in \gamma_N \quad (\text{bzw. } > 0 \text{ auf } \gamma_N = \gamma_3); \end{array}$$

dann ist das DS (5.20) monoton (bzw. streng monoton).

5.2.3.2 Konstruktion mittels Galerkin-Petrov Variationstechnik

- **Betrachten der Einfachheit halber Dirichlet-Problem in polygonal berandetem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ †:**

(5.21)$_{\text{KF}}$
$$\boxed{\begin{array}{l} -\text{div }\left(a(x)\nabla u(x)\right) + c(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1 = \Gamma = \partial\Omega \end{array}}$$

unter den Voraussetzungen

(5.22)
$$\left\{ \begin{array}{lll} a(\cdot) \in (P)C(\bar{\Omega}) : & 0 < \bar{\mu}_1 \leq a(x) \leq \bar{\mu}_2 & \forall \text{ (f. ü.) } x \in \Omega, \\ c(\cdot) \in (P)C(\bar{\Omega}) : & 0 \leq c(x) \leq \bar{c} & \forall \text{ (f. ü.) } x \in \Omega, \\ f \in L_2(\Omega), & & \\ \Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1} \cap PC^k \text{ mit } k \geq 2. & & \end{array} \right.$$

- **Variationsformulierung:**

(5.21)$_{\text{VF}}$
$$\boxed{\text{Gesucht } u \in V_0 = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : a(u,v) \ = \ < F, v > \quad \forall v \in V_0}$$

$$\text{mit} \quad \begin{array}{rcl} a(u,v) & = & \int\limits_{\Omega} \left(a(x)\nabla^T u \nabla v + c(x)u(x)v(x) \right) \, dx, \\ < F, v > & = & \int\limits_{\Omega} f(x)v(x) \, dx. \end{array}$$

$$\text{Aus (5.22)} \ \ ⤵ \ \ \left. \begin{array}{l} a(\cdot,\cdot) \ V_0\text{-elliptisch und } V_0\text{-} \ \ † \\ F \in V_0^* = W_2^{-1}(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists! \, u \in V_0 : \ (5.21)_{\text{VF}}.$$

- **Vernetzung:**

a) Primärvernetzung: reguläre Dreiecksvernetzung:

$$\mathcal{T}_\Delta = \{\delta_r : r \in \mathbb{R}_h\}, \bar{\Omega} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_h} \bar{\delta}_r.$$

b) Sekundärvernetzung: zum Dreiecksnetz gehörende polygonal berandete Boxen vom Typ 2) (siehe Punkt 5.2.2):

$$\mathcal{T}_{\mathcal{H}} = \{\mathcal{H}(x) : x \in \bar{\omega}_h\},$$

$$H(x) = \text{meas } \mathcal{H}(x) = O(h^2),$$

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{x \in \bar{\omega}_h} \overline{\mathcal{H}(x)} = \bigcup_{i \in \bar{\omega}_h} \overline{\mathcal{H}(x^{(i)})}.$$

- **FEM:** $\mathcal{T}_\Delta \longrightarrow V_h = \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_\Delta) \supset V_{0h} = \mathcal{P}_0^1(\mathcal{T}_\Delta) = \operatorname{span}\left\{p^{(i)} : i \in \omega_h\right\} \subset V_0 = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

  $\delta_r \underset{\text{Abb.}}{\overset{P_1\text{-}}{\leftrightarrow}} \Delta$ ↑ lineare Dreiecks-elemente ↓ $v_h|_\Gamma = 0$

$$(5.21)_{\text{FEM}} \quad \boxed{\text{Gesucht } u_L \equiv u_h \in V_{0h} : a(u_h, v_h) = < F, v_h > \quad \forall v_h \in V_{0h}}$$

$$\updownarrow \quad u_L = \sum_{i \in \omega_h} u^{(i)} p^{(i)}(x), \quad v \equiv v_h = p^{(k)}, k \in \omega_h$$

$$(\underline{5.21})_{\text{FEM}} \quad \boxed{\text{Gesucht } \underline{u}_L = \underline{u}_h = [u^{(i)}]_{i \in \omega_h} \in I\!R^{N_h} : K_L \underline{u}_L = \underline{f}_L}$$

mit $K_L = [a(p^{(i)}, p^{(k)})]_{k,i \in \omega_h} = K_L^T$ p.d.,

$\underline{f}_L = [< F, p^{(k)} >]_{k \in \omega_h} \in I\!R^{N_h}$.

- **Galerkin-Petrov-Zugang zur Box-Methode:**
  Definieren die Testräume

$$T_h := \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\mathcal{H}) = \left\{ \bar{v} \equiv \bar{v}_h = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} v^{(i)} \underbrace{\chi^{(i)}(x)} \right\} \subset L_2(\Omega) \not\subset W_2^1(\Omega) = V\ !$$

charakteristische Funktion der Box $\mathcal{H}(x)$:

$$\chi^{(i)}(x) = \chi_{\mathcal{H}(x^{(i)})}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{H}(x^{(i)}) \cup \partial\mathcal{H}^-(x^{(i)}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_{0h} = \mathcal{P}_0^0(\mathcal{T}_\mathcal{H}) = \left\{ \bar{v} = \sum_{i \in \omega_h} v^{(i)} \chi^{(i)}(x) \right\} = \operatorname{span}\left\{x^{(i)} : i \in \omega_h\right\} \subset L_2(\Omega) \not\subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\ !$$

$$\downarrow$$

$$\bar{v}(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma\ !$$

- **Idee:**

1 $$\int_\Omega \text{PDgl.} \cdot \bar{v}\, dx \quad \forall \bar{v} \in T_{0h},$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\substack{j \in \bar{\omega}_h \\ (j \in \omega_h)}} \int_{\mathcal{H}(x^{(j)})} (-\operatorname{div}(a \nabla u) + cu)\, \bar{v}\, dx = \int_\Omega f \bar{v}\, dx, \quad \forall \bar{v} \in T_{0h}.$$

2 Partielle Integration im Hauptteil (vergleiche auch (5.14))

$$-\sum_{j \in \omega_h} \int_{\partial\mathcal{H}(x^{(j)})} a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}} \bar{v}\, ds + \sum_{j \in \omega_h} \int_{\mathcal{H}(x^{(j)})} cu\bar{v}\, dx = \underbrace{\int_\Omega f \bar{v}\, dx}_{=:(f,\bar{v})_0} \quad \forall \bar{v} \in T_{0h}.$$

3 Suche $u = u_h \in V_{0h}$: 2 !

■ **Zwei Galerkin-Petrov-Schemata:**

$(5.21)_{\text{Box}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Gesucht } u_B = \sum\limits_{i\in\omega_h} u^{(i)}p^{(i)}(x) \in V_{0h} = \mathcal{P}_0^1(\tau_\Delta) \subset V_0: \\ \bar{a}(u_B,\bar{v}) = (f,\bar{v})_0 \quad \forall \bar{v} \in T_{0h} \not\subset V_0 \end{array}}$$

mit $\bar{a}(\cdot,\cdot) : V_{0h} \times T_{0h} \to I\!R^1$, wobei

a) „Echtes“ Galerkin-Petrov-Schema:

$$\bar{a}(u_B,\bar{v}) = -\sum_{j\in\bar{\omega}_h} \int\limits_{\partial\mathcal{H}(x^{(j)})} a(x)\frac{\partial u_B}{\partial\vec{n}}\bar{v}\,ds + (c\,\overset{\downarrow}{u}_B,\bar{v})_0$$

b) $\overline{\text{Lumping}}$ Galerkin-Petrov-Schema:

$$\bar{a}(u_B,\bar{v}) = -\sum_{j\in\omega_h} \int\limits_{\partial\mathcal{H}(x^{j)})} a(x)\frac{\partial u_B}{\partial\vec{n}}\bar{v}\,ds + (c\,\overset{\downarrow}{\bar{u}}_B,\bar{v})_0$$

wobei

$$V_{0h} \ni u_B = \sum_{i\in\omega_h} u^{(i)}p^{(i)}(x) \leftrightarrow \bar{u}_B = \sum_{i\in\omega_h} u^{(i)}\chi^{(i)}(x) \in T_{0h}.$$

Isomorphismus

$$\underline{u} = [u^{(i)}]_{i\in\omega_h} \in I\!R^{N_h}$$

■ **Ableitung des GS:**

$(5.21)_{\substack{\text{Box}\\ \text{b)}}}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Gesucht } u_B \in V_{0h}: & \bar{a}(u_B,\bar{v}) = (f,\bar{v})_0 \quad \forall \bar{v} \in T_{0h} \\ & \text{b) Lumping Galerkin-Petrov-Schema} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} u_B &= \sum_{i\in\omega_h} u^{(i)}p^{(i)}(x) \\ \bar{u}_B &= \sum_{i\in\omega_h} u^{(i)}\chi^{(i)}(x) \\ \bar{v} &= \chi^{(k)}, k = \omega \end{aligned} \qquad \bar{u} = [u^{(i)}]_{i\in\omega_h} \in I\!R^{N_h}$$

$$-\sum_{j\in\bar{\omega}_h} \int\limits_{\partial\mathcal{H}(x^{(j)})} a(x)\tfrac{\partial u_B(x)}{\partial\vec{n}}\chi^{(k)}(x)\,ds + \int\limits_\Omega c(x)\bar{u}_B(x)\chi^{(k)}(x)\,dx = \int\limits_\Omega f\chi^{(k)}\,dx$$

$$-\int\limits_{\partial\mathcal{H}(x^{(k)})} a(x)\tfrac{\partial u_B(x)}{\partial\vec{n}}\,ds + \int\limits_{\mathcal{H}(x^{(k)})} c(x)\bar{u}_B(x)\,dx = \int\limits_{\mathcal{H}(x^{(k)})} f(x)\,dx$$

$$\sum_{i\in\omega_h} u^{(i)} \left\{ -\int\limits_{\partial\mathcal{H}(x^{(k)})} a(x)\frac{\partial p^{(i)}(x)}{\partial\vec{n}}\,dx + \underbrace{\int\limits_{\mathcal{H}(x^{(k)})} c(x)\chi^{(i)}\,dx}_{\int\limits_{\mathcal{H}(x^{(k)})} c(x)\,dx\ \ \delta_{ki} \leftarrow \text{ Lumping}} \right\} = \int\limits_{\mathcal{H}(x^{(k)})} f(x)\,dx$$

■ **Resultat:**

(5.21) Box b)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Gesucht } \underline{u}_B = [u^{(i)}]_{i\in\bar\omega_h} \in I\!R^{N_h} : K_B\underline{u}_B = \underline{f}_B \\ \displaystyle\sum_{i\in\omega_h} u^{(i)} \underbrace{\left\{ - \int\limits_{\partial\mathcal{H}(x^{(k)})} a(x)\frac{\partial p^{(i)}(x)}{\partial\vec{n}}\,ds + \int\limits_{\mathcal{H}(x^{(k)})} c(x)\,dx\,\delta_{ki}\right\}}_{=K_{ki}} = \underbrace{\int\limits_{\mathcal{H}(x^{(k)})} f(x)\,dx}_{=f^{(k)}}\end{array}}$$

■ **Bemerkung 5.24:**

1. (5.21) Box a) Ges. $\underline{u}_B \in I\!R^{N_h} : \sum\limits_{i\in\omega_h} u^{(i)}\bar{a}(p^{(i)},\chi^{(k)}) = (f,\chi^{(k)})_0 \quad \forall k\in\omega_h.$
   Leiten Sie die explizite Form ab !
2. $K_B = K_B^T$ p.d. (mms).
3. Die auftretenden Linien- und Flächenintegrale müssen im allgemeinen numerisch berechnet werden:

   $$\int\limits_{\partial H(x^{(k)})} \ldots\, ds : \quad \text{Quadraturformel,}$$
   $$\int\limits_{H(x^{(k)})} \ldots\, dx : \quad \text{Kubaturformel,}$$

   (siehe auch Punkt 5.2.3.1 !).
4. Fehlerabschätzung in der Energienorm

   $$|||\cdot|||^2 := a(\cdot,\cdot) \simeq |\cdot|_1^2 \simeq \|\cdot\|_1^2 \text{ in } V_0$$

   unter der Voraussetzung

   $$u \in V_0 \cap S_0^1(\tau_\Delta) := \left\{ v\in V_0 = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \left(\sum_{r\in I\!R_h} h_r^2\|\Delta u\|_{0,\delta_r}^2\right)^{\frac12} \le c \inf_{v_h\in V_{0h}} |u-v_h|_{1,\Omega}\right\}$$

   mit $c = \text{const.} \neq c(h)$:

   (5.23) $$|||u-u_B||| \le C \inf_{T_{0h}\ni\bar{v}\leftrightarrow v\in V_{0h}} \{|||u-v||| + \|u-\bar{v}\|_{0,\Omega}\} \le \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Approximationssatz}\\ \underline{\text{Vor.:}}\ u\in W_2^2(\Omega)\ \text{(Kapitel 4)}}}{\bar{c}h\|u\|_{2,\Omega}}$$

   Da

   (5.24) $$\underset{\substack{\text{FE-Lösung}\\ \downarrow}}{|||u-u_L|||} \le \inf_{v\in V_{0h}} |||u-v|||$$

   gilt offenbar:

   (5.25) $$|||u-u_L||| \le |||u-u_B||| \le c\,\{|||u-u_L||| + \|u-\bar{u}_L\|_{0,\Omega}\}$$

5. Für den Spezialfall „Poisson-Gleichung“ ($a \equiv 1, c \equiv 0$) gilt:

   (a) $-\sum\limits_{j\in\bar{\omega}_h} \int\limits_{\partial H(x^{(j)})} \frac{\partial u}{\partial n}\bar{v}\,ds = \int\limits_{\Omega} \nabla^T u \nabla v\,dx,$

   $\forall u \in V_{0h} = \mathcal{P}_0^1(\tau_\Delta), \quad \forall v \in V_{0h} = \mathcal{P}_0^1(\tau_\Delta), v \leftrightarrow \bar{v} \in T_{0h} = \mathcal{P}_0^0(\tau_H),$

   d.h., $\bar{a}(u,\bar{v}) = a(u,v) \quad \forall u \in V_{0h}, \quad \forall v \in V_{0h}, v \leftrightarrow \bar{v} \in T_{0h}.$

   (b) $\curvearrowright \underset{\text{FVM}}{K_B} = \underset{\text{FEM}}{K_L}$, aber i. a. $\underline{f}_B \neq \underline{f}_L$!

   (c) Fehlerabschätzung: $u \in V_0 \cap S_0^1$ $(|||\cdot||| \simeq |\cdot|_1 \simeq \|\cdot\|_1)$

   (5.26) $$|||u - u_B||| \leq c \inf_{v_h \in V_{0h}} |||u - v_h|||.$$

   Aus (5.25) und (5.26) folgt

   (5.27) $$|||u - u_L||| \leq |||u - u_B||| \leq c|||u - u_L|||.$$

   Falls $u \in W_2^2(\Omega)$ folgt aus (5.26), $|||\cdot||| \simeq |\cdot|_1$ und dem Approximationssatz 4.5 sofort

   (5.28) $$\boxed{|u - u_B|_{1,\Omega} \leq \bar{c}a_{1,2}h|u|_{2,\Omega}}$$

■ **Literatur:**

[4] Bank R. E., Rose D. J.: Some error estimates for the box method. SIAM Journal Numer. Anal., 1987, v. 24, No. 4, 777 – 787.

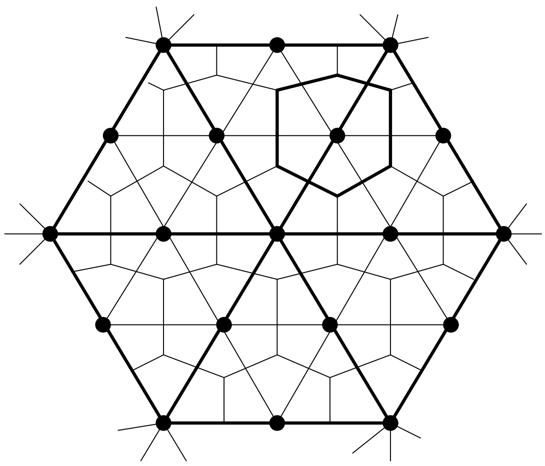
[16] Hackbusch W.: On first (a) and second (b) order box schemes, Computing, 1989, v. 41, 277 – 296:

(a) $\|u_L - u_B\|_1 = 0(h)$,

(b) $\|u_L - u_B\|_1 = 0(h^2)$.

■ **Bemerkung 5.25:**

In [30] Liebau F.: Analyse einer Finite-Volumen-Elemente-Methode mit quadratischen Ansatzfunktionen, Dissertation, Kiel, 1992.
wird eine Box-Methode höherer Ordnung vorgeschlagen:
$\rightarrow$ quadratische Ansätze $\rightarrow V_{0h} = \text{span}\,\{p^{(i)} : i \in \omega_h\}$:

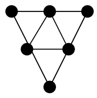


Resultat:

$$\boxed{\|u - u_B\|_{1,\Omega} \leq ch^2\|u\|_{3,\Omega}}$$

$x \in \bar{\omega}_h = \{\bullet\}$

$\mathcal{H}(x)$:

1. Dreiecksviertelung 

2. MD-Methode bzw. PB-Methode für Hilfsdreiecke

5.2.4 Bemerkungen zur Untersuchung der diskreten Konvergenz

- **Für das DV $(5.20)_{\mathbf{PB}}$** (ähnliches gilt für $(5.20)_{\mathrm{MD}}$, $(5.21)_{\mathrm{Box}}, \ldots$)

$$\boxed{\begin{array}{lcl} v \equiv u_h : \bar{\omega}_h \to I\!R^1 : \quad L_h v(x) & = & f_h(x), x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad l_h v(x) & = & g_h(x), x \in \gamma_N = \gamma_{23}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad v(x) & = & g_1(x), x \in \gamma_1 \end{array}}$$

können in diskreten Normen folgende **Fehlerabschätzungen** als Folge von Stabilität und Approximation (u) gezeigt werden:

1 **Diskrete Konvergenz in der $W_2^1(\omega_h)$–Norm:**

$$\text{(5.29)} \qquad \| \overbrace{\underset{\substack{(14)\\ \text{exakte Lösung}\\ \text{der RWA}}}{u} - \underset{\substack{(20)\\ \text{Lösung}\\ \text{des DS}}}{v}}^{\substack{\text{Fehler}\\ z}} \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)} \le c(u) \begin{cases} h, & \text{für (i) } u \in W_2^2(\Omega), \quad \bar{\omega} \text{ - beliebig reguläre Vernetzung,} \\ h^{\frac{3}{2}}, & \text{für (ii) } u \in W_2^3(\Omega), \quad \bar{\omega} \text{ - lokal ungleichmäßiges Gitter,} \\ h^2, & \text{für (iii) } u \in W_2^3(\Omega), \quad \bar{\omega} \text{ - gleichmäßiges Gitter } (\Gamma = \Gamma_1), \end{cases}$$

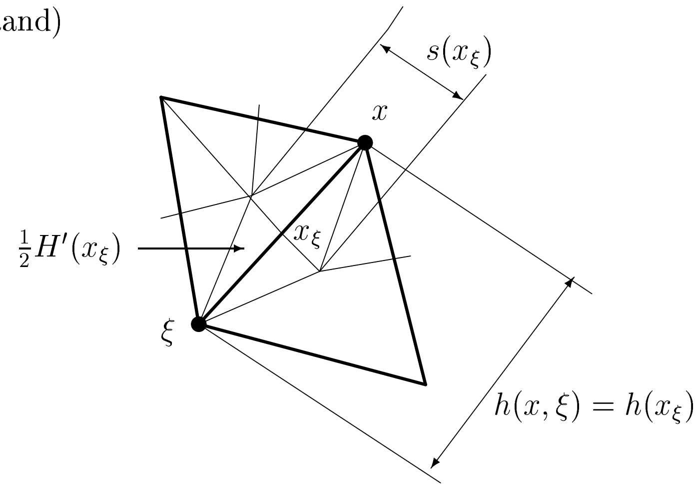
wobei

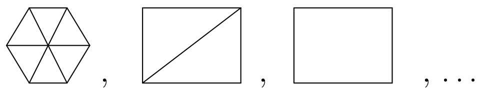
- $\|z\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)} := \underbrace{\sum_{x_\xi} z_n^2(x_\xi) H'(x_\xi)}_{=:|z|^2_{W_2^1(\omega)}} + \sum_{x \in \omega} z^2(x) H(x) + \sum_{x \in \gamma_N} z^2(x) h(x)$,

mit $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega) := \{ v : \bar{\omega} \mapsto I\!R^1 : v|_{\gamma_1} = 0, \ \| \cdot \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)} \}$ und mit $z_{\vec{n}}(x_\xi) := \frac{z(\xi)-z(x)}{h(x,\xi)}$

$H'(x_\xi) = s(x_\xi)h(x,\xi)$

(mit offensichtlicher Modifikation am γ_N-Rand)



- gleichmäßiges Gitter: 

- lokal ungleichmäßiges Gitter: bedeutet, daß die Gleichmäßigkeit nur am Rand Γ bzw. an Interface-Linien gestört ist, d.h., bei $O(h^{-1})$ Dreiecken [21].

Beweistechnik:

Betrachten o. B. d. Allg. das reine Dirichlet-Problem $\gamma_1 = \gamma$ $(\gamma_N = \emptyset)$.
Das Fehlerschema hat dann die Form

(5.30)
$$z : \bar{\omega} \to I\!R^1 : \begin{array}{rcll} L_h z(x) &=& \psi(x) & \forall x \in \omega = \mathring{\omega}, \\ z(x) &=& 0 & \forall x \in \gamma = \gamma_1. \end{array}$$

Zu zeigen ist:

$$\underbrace{\boxed{\begin{array}{l}\mathring{W}_2^1(\omega)\text{-}W_2^{-1}(\omega)\text{-}\\ \text{Stabilität}\end{array}}}_{\text{a) (5.31)}} + \underbrace{\boxed{\begin{array}{l}\text{Approximation}\\ \|\psi(u)\|_{W_2^{-1}(\omega)}\end{array}}}_{\text{b) (5.33)}} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\begin{array}{l}\text{diskrete Konvergenz}\\ \text{im } \mathring{W}_2^1(\omega)\end{array}}}_{(5.29)}$$

a) $\mathring{W}_2^1(\omega)$-$W_2^{-1}(\omega)$-Stabilität:

- Definieren diskretes $L_2(\omega)$–Skalarprodukt

$$(v,x) \equiv (v,z)_{L_2(\omega)} := \sum_{x\in\omega} v(x)z(x)H(x).$$

- Multiplizieren (5.30) skalar mit z und schätzen nach oben und unten ab:

$$\underset{\substack{\uparrow\\(5.32)}}{\tilde{\mu}_1\|z\|^2_{\mathring{W}_2^1(\omega)} \le} (L_h z, z) = (\psi, z) \le \left[\underbrace{\sup_z \frac{|(\psi,z)|}{\|z\|_{\mathring{W}_2^1(\omega)}}}_{=:\|\psi\|_{W_2^{-1}(\omega)}}\right] \cdot \|z\|_{\mathring{W}_2^1(\omega)}$$

- Resultat:

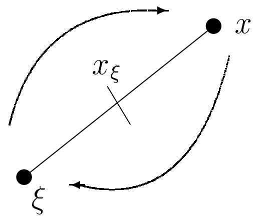
(5.31) $$\boxed{\|z\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)} \le c_S \|\psi\|_{W_2^{-1}(\omega)} \quad \text{mit} \quad c_S = \tilde{\mu}_1^{-1}}$$

- Dabei wurde die $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$–Elliptizität benutzt:

$$(L_h z, z) = \sum_{x\in\omega} \left(- \sum_{\xi \in S'(x)} a(x_\xi) \frac{z(\xi) - z(x)}{h(x,\xi)} s(x_\xi) z(x) \right) + \sum_{x\in\omega} \bar{c}(x) z^2(x) H(x)$$

$$\boxed{L_h z(x) = -\frac{1}{H(x)} \sum_{\xi\in S'(x)} \bar{a}(x_\xi) \frac{z(\xi)-z(x)}{h(x,\xi)} s(x_\xi) + \bar{c}(x) z(x)}$$

$$= \sum_{x\in\omega} \sum_{\xi\in S'(x)} \bar{a}(x_\xi) \left(- \frac{z(\xi) - z(x)}{h(x,\xi)} \frac{z(x)}{h(x,\xi)} \right) \underbrace{h(x,\xi) s(x_\xi)}_{H'(x_\xi)} + \sum_{x\in\omega} \bar{c}(x) z^2(x) H(x)$$



$$h(x,\xi) = h(\xi, x)$$

$$\begin{aligned} &-(z(\xi) - z(x)) z(x) - (z(x) - z(\xi)) z(\xi) = \\ &= z^2(x) - 2 z(x) z(\xi) + z^2(\xi) \\ &= (z(\xi) - z(x))^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{x_\xi} \bar{a}(x_\xi) \left(\underbrace{\frac{z(\xi) - z(x)}{h(x,\xi)}}_{z_{\overrightarrow{n}}(x)} \right)^2 H'(x_\xi) + \sum_{x\in\omega} \bar{c}(x) z^2(x) H(x)$$

$$\ge \tilde{\mu}_1 \|z\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)},$$

mit

$$\tilde{\mu}_1 = \begin{cases} \min\{\bar{a}_1, \bar{c}_1\}, & \text{falls } \bar{c}(x) \ge \bar{c}_1 = \text{const.} > 0 \quad \forall x \in \omega_h \quad \forall h \in \Theta, \\ \bar{a}_1 (1 + \tilde{c}_F^2)^{-1}, & \text{falls } \bar{c}(x) \ge 0 \quad \forall x \in \omega_h \quad \forall h \in \Theta, \end{cases}$$

wobei

$\bar{a}_1 = \text{const.} > 0:$ $\bar{a}(x_\xi) \ge \bar{a}_1 = \text{const.} > 0 \quad \forall x, \xi \in \bar{\omega}_h \quad \forall h \in \Theta$

$\tilde{c}_F = \text{const.} > 0:$ Konstante aus diskreter Friedrichs-Ungleichung (mms):

$$\|z\|_{L_2(\omega)} \le \tilde{c}_F |z|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)} \quad \forall z \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega) \quad \forall h \in \Theta.$$

Ü 5.13 Man zeige analog zu (5.32) die Beziehung

$$\begin{aligned}(L_h z, v) &= \sum_{x_\xi} \bar{a}(x_\xi) \underbrace{\frac{z(\xi)-z(x)}{h(x,\xi)}}_{=:z_{\vec{n}}(x_\xi)} \underbrace{\frac{v(\xi)-v(x)}{h(x,\xi)}}_{=:v_{\vec{n}}(x_\xi)} H'(x_\xi)+ \\ &\quad + \sum_{x\in\omega} \bar{c}(x)\, z(x)\, v(x)\, H(x),\end{aligned}$$

aus der zusammen mit (5.32) folgt, daß L_h (und damit die zu (5.30) gehörende Matrix A_h) symmetrisch und positiv definit ist !

b) Approximationsabschätzung durch Abbildung auf Referenzgebiet, dort Anwendung des Lemmas von Bramble & Hilbert und Rückabbildung [26]: Unter den Vor. (i) $u \in W_2^2(\Omega)$ und $\bar{\omega}$ – beliebig reguläres Gitter sowie zusätzlichen Glattheitsvoraussetzungen an die Daten $\{a, c, f\}$ erhält man [18]:

(5.33) $$|(\psi, z)| \le c(u) h \|z\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)}.$$

Tatsächlich, aus der Approximationsfehleraufsplittung

$$\begin{aligned}\psi(x) &= L_h u - L_h v \overset{(5.14)}{=} \\ &= \underbrace{L_h u - \left[-\frac{1}{H(x)} \int\limits_{\partial\mathcal{H}(x)} a(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds + \frac{1}{H(x)} \int\limits_{\mathcal{H}(x)} cu\, dy\right] + \frac{1}{H(x)} \int\limits_{\mathcal{H}(x)} f\, dy}_{=0} \\ &\quad -\bar{f}(x) \\ &= \left\{-\frac{1}{H(x)} \sum_{\xi\in S'(x)} \bar{a}(x_\xi) \frac{u(\xi)-u(x)}{h(x,\xi)} s(x_\xi) - \left[-\frac{1}{H(x)} \int\limits_{\partial\mathcal{H}(x)} a(x) \frac{\partial u}{\partial n}\, ds\right]\right\} \\ &\quad + \left\{\bar{c}(x)u(x) - \frac{1}{H(x)} \int\limits_{\mathcal{H}(x)} cu(y)\, dy\right\} + \left\{\frac{1}{H(x)} \int\limits_{\mathcal{H}(x)} f\, dy - \bar{f}(x)\right\} \\ &= \psi_H(x) + \psi_{cu}(x) + \psi_f(x)\end{aligned}$$

$$|(\psi, z)| \;\le\; \underset{\substack{1) \\ \text{Partielle} \\ \text{Summation}}}{|(\psi_H, z)|} \;+\; \underset{2)}{(\psi_{cu}, z)|} \;\le\; \ldots$$

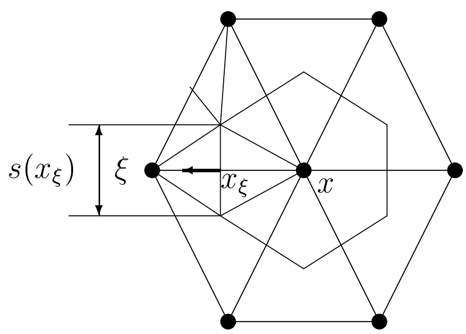
Schätzen beispielsweise

1) $|(\psi_H, z)| \le \ldots$

der Einfachheit halber unter der Vor. $\underline{a = \bar{a} = 1}$ ab:

$$(\psi_H, z) = \sum_{x\in\omega} \psi_H(x)\, z(x)\, H(x) =$$

$$= \sum_{x\in\omega} \left\{ \sum_{\xi\in S'(x)} \left[-\frac{u(\xi)-u(x)}{h(x,\xi)} s(x_\xi) + \int\limits_{\zeta(x,\xi)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \right] \right\} z(x)$$



$$s(x_\xi) = |\zeta(x,\xi)| \overset{\|}{} \zeta(x_\xi)$$

$$= \sum_{x_\xi} \underbrace{\left[\frac{1}{s(x_\xi)} \int\limits_{\zeta(x_\xi)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds - \frac{u(\xi)-u(x)}{h(x,\xi)} \right]}_{\kappa(x_\xi)} \frac{z(\xi)-z(x)}{h(x,\xi)} \underbrace{h(x,\xi)\, s(x,\xi)}_{H'(x_\xi)}$$

$$= \sum_{x_\xi} \kappa(x_\xi)\, z_{\vec{n}}(x_\xi)\, H'(x_\xi)$$

$$\begin{aligned}
|(\psi_H, z)| &\le \sqrt{\sum_{x_\xi} \kappa^2(x_\xi)\, H'(x_\xi)}\ \sqrt{\sum_{x_\xi} z^2_{\vec{n}}(x_\xi)\, H'(x_\xi)} \\
&\le \sqrt{\sum_{x_\xi} \kappa^2(x_\xi)\, H'(x_\xi)}\ \|z\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega)} \\
&\qquad \text{Bramble–Hilbert–Lemma (siehe [18])} \\
&\le ch\|u\|_{2,\Omega}\, \|z\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega)}.
\end{aligned}$$

Analog werden andere Terme abgeschätzt [18].

2 **Diskrete Konvergenz in der $C(\omega)$–Norm (in 2D):**

(5.34) $$\boxed{\|u-v\|_{C(\omega)} \le c(u)|\ln h|^{\frac{1}{2}} \begin{cases} h & \text{für (i)} \\ h^{\frac{3}{2}} & \text{für (ii)} \quad \text{(siehe (5.29))} \\ h^2 & \text{für (iii)} \end{cases}}$$

Beweistechnik:
Abschätzung (5.34) folgt sofort aus der $W_2^1(\omega)$-Abschätzung (5.29) und der sogenannten „schwachen“ $W_2^1(\omega)$-Einbettung in $C(\omega)$:

(5.35) $$\|z\|_{C(\omega)} := \max_{x\in\omega} |z(x)| \le c|\ln h|^{\frac{1}{2}} \|z\|_{W_2^1(\omega)}$$
$\forall$ Gitterfunktion $z : \bar{\omega} \to I\!R^1$ mit $z(x) = 0 \quad \forall x \in \gamma = \gamma_1$.

Die Ungleichung (5.35) folgt aus einer entsprechenden Ungleichung für FE-Funktionen. Es gilt nämlich

$$
\begin{array}{lll}
(5.36) & \|\tilde{z}_h\|_{C(\Omega)} \le c|\ln h|^{\frac{1}{2}}\|\tilde{z}_h\|_{W_2^1(\Omega)} & \\
& \forall \quad \tilde{z}_h \in V_{0h} & \text{FE-Raum der stückweise} \\
& \quad \updownarrow & \text{linearen Funktionen auf} \\
& \quad \underline{z}_h \in I\!R^{N_h} & \text{der Primärdreiecksvernetzung} \\
& \quad \updownarrow & \text{mit } \tilde{z}_h(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1 \\
& \quad z(\cdot) : \bar{\omega}_h \to I\!R^1 &
\end{array}
$$

(siehe [18] und vergleiche Punkt 4.4.5)

Wegen (mms)

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{z}_h\|_{C(\Omega)} &= \max_{x\in\omega} |z(x)| \quad \text{und} \\
\underline{c}\|z\|_{W_2^1(\omega)} &\le \|\tilde{z}_h\|_{W_2^1(\Omega)} \le \bar{c}\|z\|_{W_2^1(\omega)}
\end{aligned}
$$

folgt tatsächlich sofort (5.35) aus (5.36).

5.2.5 Schlußbemerkungen

- **Vorteile des modernen DV (Punkt 5.2) gegenüber dem klassischen DV (Punkt 5.1):**

  – Flexibilität des Netzes: Dreiecksnetze, Vierecksnetze, ...

  – Leichte Behandlung sowohl von wesentlichen als auch natürlichen Randbedingungen.

  – Symmetrieerhaltung (auch bei natürlichen Randbedingungen) und p.d.:
  $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch und V_0-elliptisch $\Rightarrow K_{\mathrm{FDM}} = K_{\mathrm{FDM}}^T$ p.d.

  – Konservativität.

  – M-Matrizeneigenschaft von K_{FDM} (bzw. Monotonität des Differenzenschemas) kann auch für Konvektionsprobleme ($b \neq 0$) durch geschickte Upwind-Approximation erhalten werden (↷ Maximumprinzip; C_h-C_h–Stabilität; siehe Punkt 5.1.4).

  – Standarde Stabilitätsresultate:

    a) $a(\cdot,\cdot)$ V_0-elliptisch und V_0-beschränkt ↷ $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega_h)$-$W_2^{-1}(\omega_h)$–Stabilität

    b) $W_2^1(\omega)$ „$\hookrightarrow$“$C(\omega)$ ↷ $C(\omega_h)$-W_2^{-1}–„Stabilität“

  – Approximationsuntersuchung:
  Taylorreihentechnik $\mapsto$ Bramble-Hilbert-Lemma !

  – Fehlerabschätzung in diskreten Normen für Lösungen aus Sobolev-Räumen:
  $u \in W_2^{1+\lambda}(\Omega)$ z.B. starke Lösung $u \in W_2^2(\Omega)$ oder $u \in PW_2^2(\Omega)$ und nicht
  $u \in C^4(\bar{\Omega})$!

■ **Standardliteratur:** (siehe auch Literaturliste: [4], [16], [18], [30]).

1. Direkte Approximation der Bilanzgleichungen: B. Heinrich (1987)
   [18] **Heinrich, B.:** *Finite Difference methods on Irregular Networks.* **Mathematical Research. Akademie–Verlag, Berlin, 1987.**
2. Galerkin-Petrov-Technik: R. E. Bank/D. J. Rose (1987)
   [4] **Bank, R. and Rose, R.** Some Error Estimates for the Box Method. *SIAM J. Numer. Anal.,* 24(4): 777 – 787, 1987.

Kapitel 6

Auflösungsverfahren

■ **Siehe auch**

- Praktikum
- Praktische Aspekte zur Implementierung und Bewertung von direkten und iterativen Auflösungsverfahren in
  [20] Jung M., Langer U.: Finite-Elemente-Methode. Vorlesungsskriptum, S. 116 – 143.
- Lehrbücher: [2], [5], [14], [17].

6.1 Bewertung der klassischen direkten und iterativen Auflösungsverfahren

■ **Betrachten lineares Gleichungssystem der Form**

(6.1) $$\text{Gesucht } \underline{u} = \underline{u}_h \in \mathbb{R}^N : \; K\underline{u} = \underline{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

das durch Diskretisierung einer elliptischen RWA zweiter Ordnung mittels FEM (Kapitel 4) oder FDM (Kapitel 5) entstanden sei. Wir setzen voraus, daß die Systemmatrix K symmetrisch und positiv definit sei ($\rightarrow$ s.p.d. Matrix). Weitere Eigenschaften von K sind (vergleiche Punkt 4.3 für FEM und Punkt 5.1.5.5 für FDM):

1. GS ist typischerweise großdimensioniert: $N = \dim K = O(h^{-m})$, wobei h - Diskretisierungsparameter, m – Ortsdimension ($\Omega \subset \mathbb{R}^m$);
2. GS ist schwach besetzt: NNE$= O(h^{-m})$;
3. BW $= O(h^{-(m-1)})$ (durchnumerierungsabhängig !);
4. EW $\lambda(K)$: $\begin{array}{c} \underline{c}h^m \\ \underline{c} \end{array} \leq \lambda(K) \leq \begin{array}{ll} \bar{c}h^{m-2} & \text{FEM} \\ \bar{c}h^{-2} & \text{FDM} \end{array}$;
5. Konditionszahl: $\kappa(K) = \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_{\min}(K)} = O(h^{-2})$.

■ Folgerungen für die Auflösung von (6.1):

1. **Klassische direkte Verfahren:**
   Gauß-Elimination, L^TDL-Zerlegung, Cholesky-Zerlegung, ...:

$$
\begin{array}{lll}
M = \text{Memory } (\curvearrowright \text{ Fill-in !}) & \approx \text{BW} \cdot N & = O(h^{-2m+1}), \\
Q = \text{Anzahl der arithmetischen Operationen} & \approx (\text{BW})^2 \cdot N & = O(h^{-3m+2}), \\
s = \text{Verlust an gültigen Ziffern} & \approx \lg \kappa(K). &
\end{array}
$$

   Situation: $m = 1$: $M = O(h^{-1})$, $Q = O(h^{-1})$
   $\curvearrowright$ (asymptotisch) optimal !

   $m = 2, 3$: Starkes Anwachsen von M und Q für $h \searrow 0$!
   (Optimal: $M = O(h^{-m}), Q = O(h^{-m})$!)

   $m = 1, 2, 3$: Bei einfacher Genauigkeit kann Verlust der gültigen Ziffern schnell zu sinnlosen Resultaten führen !

   Fazit: Direkte Verfahren sollten nur für diskrete 1D-Probleme und für moderate mehrdimensionale Probleme eingesetzt werden.
   Die Vorteile der direkten Verfahren liegen sicherlich in ihrer Robust– heit auch bei Lösung nichtsymmetrischer Probleme (LU–, LDU–Zerlegung) !

   Bemerkung: Implementierungshinweise für Cholesky-Verfahren (Profilerhaltung, Speichertechniken etc.) und numerische Vergleiche siehe [20] Punkt 5.1.

2. **Klassische iterative Verfahren:**
   Jacobi-Verfahren (GSV), Gauß-Seidel-Verfahren (ESV), Richardson-Verfahren ([20] Punkt 5.2.1):

$$
\begin{array}{lcl}
M \approx \text{NNE} & = & O(h^{-m}), \\
I(\varepsilon) & = & \text{Anzahl der Iterationen} = O(\kappa(K) \ln \varepsilon^{-1}) = O(h^{-2} \ln \varepsilon^{-1}), \\
Q(\varepsilon) & = & I(\varepsilon) * \text{ Aufwand pro Iteration + eventueller Voraufwand} \\
 & & = O(h^{-m-2} \ln \varepsilon^{-1}),
\end{array}
$$

   wobei $\varepsilon \in (0, 1)$ – relative Genauigkeit.

   Situation:

   - $\oplus$ Speicherplatzbedarf ist optimal, d.h., nur die NNE der Matrix K (+ Vektoren) werden gespeichert $\curvearrowright$ Kompaktspeichertechniken !
   - $\oplus$ Aufwand pro Iterationsschritt ist optimal, nämlich $O(h^{-m})$ arithmetische Operationen !
   - $\ominus$ Die Anzahl der Iterationen ist proportional zur Konditionszahl und wächst damit zu stark an !

Auswege: (vergleiche auch [26] Numerik I, Punkt 4.2.2)

1. Konvergenzbeschleunigungstechniken:
   - Überrelaxation: SOR, SSOR,
   - CG-Beschleunigung ([20] Punkt 5.2.2).
2. Vorkonditionierung $C = C^T$ p.d.: $K\underline{u} = \underline{f} \mapsto C^{-1}K\underline{u} = C^{-1}\underline{f}$:
   - $\kappa(C^{-1}K) \equiv \kappa(C^{-0.5}KC^{-0.5)}) \ll \kappa(K)$,
   - Aktion $\underline{w} = C^{-1}\underline{d}$ schnell ausführbar, d.h., $Q(C^{-1}d) = O(h^{-m})$.

   C: SSOR [Praktikum], IC, MIC ([20] Punkt 5.2.3), ..., BPX
3. Mehrgitter-Verfahren = Multigrid-Methoden (siehe [20], Punkt 5.2.4 und Vorlesung [25]).
4. Nested Iteration: $\varepsilon = O(h^p)$ = Diskretisierungsfehler mit optimalem Aufwand $Q = O(N)$:

   z.B.: FMGM [25], Cascadic CG.

6.2 Zur Vorkonditionierungsproblematik

- **Lösen (6.1) zunächst durch das Verfahren der einfachen Iteration (= Richardson-Verfahren):**

$$(6.2)\quad \left\{\begin{array}{ll} \underline{\text{Anfangsnäherung:}}\ \underline{u}^0 \in I\!R^N - \text{geg.}; & \\ \underline{\text{Iteration:}}\ j = 0,1,\ldots & \\ & 1.\ \underline{d}^j := \underline{f} - K\underline{u}^j \\ & \quad \text{IF } \|\underline{d}^j\| \le \varepsilon \|\underline{d}^0\| \text{ THEN Stop;} \\ \frac{\underline{u}^{j+1}-\underline{u}^j}{\tau} + K\underline{u}^j = \underline{f} & 2.\ \underline{w}^j := \underline{d}^j; \\ & 3.\ \underline{u}^{j+1} = \underline{u}^j + \tau \underline{w}^j. \end{array}\right.$$

- **Die Konvergenzgeschwindigkeit des IV (6.2)** ist von $\kappa(K)$ abhängig bzw. von den sogenannten Spektraläquivalenzkonstanten γ_1 und γ_2 aus den Spektraläquivalenzungleichungen

$$(6.3)\qquad \begin{array}{ccccc} \gamma_1(\underline{v},\underline{v}) & \le & (K\underline{v},\underline{v}) & \le & \gamma_2(\underline{v},\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in I\!R^N \\ \gamma_1 I & \le & K & \le & \gamma_2 I \end{array}$$

$$\gamma_1 \le \lambda_{\min}(K) := \min_{\substack{\underline{v}\in I\!R^N \\ \underline{v}\neq \mathbf{O}}} \frac{(K\underline{v},\underline{v})}{(\underline{v},\underline{v})}; \quad \gamma_2 \ge \lambda_{\max} = \max_{\substack{\underline{v}\in I\!R^N \\ \underline{v}\neq \mathbf{O}}} \frac{(K\underline{v},\underline{v})}{(\underline{v},\underline{v})}$$

$$\kappa(K) := \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_{\min}(K)} \le \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \curvearrowright \kappa(K) = O(h^{-2})\ !,$$

wobei $(\cdot,\cdot)$ das gewöhnliche Euklidische Skalarprodukt ist. Die Abschätzungen γ_1 und γ_2 von $\lambda_{\min}(K)$ und $\lambda_{\max}(K)$ sind ordnungsgemäß scharf. Damit verhält sich $\kappa(K)$ tatsächlich wie $O(h^{-2})$!

Bezeichnen mit

$$\underline{z}^j = \underline{u} - \underline{u}^j \qquad (\underline{u} \text{ ist Lösung von (6.1)})$$

den <u>Fehler</u>, dann ergeben sich aus dem <u>Fehlerschema</u>

$$\begin{aligned} \underline{z}^j &= (I - \tau K)\underline{z}^{j-1} \\ K^{\frac{s}{2}}\underline{z}^j &= K^{\frac{s}{2}}(I - \tau K)K^{-\frac{s}{2}}K^{\frac{s}{2}}\underline{z}^{j-1} = (I - \tau K)K^{\frac{s}{2}}\underline{z}^{j-1} \end{aligned}$$

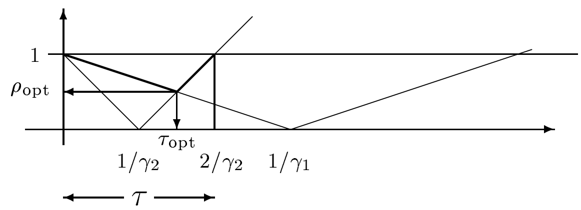
und aus der daraus folgenden Ungleichung

$$\|K^{s/2}\underline{z}^j\| = \|(I - \tau K)K^{s/2}\underline{z}^{j-1}\| \leq \|I - \tau K\| \, \|K^{s/2}\underline{z}^{j-1}\|$$

die Fehlerabschätzungen

$$\text{(6.4)} \qquad |||\underline{z}^j|||_s \;\leq\; q^j \; |||\underline{z}^0|||_s \quad \text{für} \quad s = 0, 1, \ldots \quad (\text{sogar } \forall s \in I\!R)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad |||\underline{v}|||_s \;&:=\; \|\underline{v}\|_{K^s} \equiv (K^s\underline{v}, \underline{v})^{0.5}, \\ \|\underline{v}\| \;&=\; |||\underline{v}|||_0 = \|\underline{v}\|_I = (\underline{v}, \underline{v})^{0.5}, \\ \underbrace{\varrho(I - \tau K)}_{\text{Spektralradius}} \;&\underset{K=K^T}{\overset{\uparrow}{=}}\; \|I - \tau K\| = |||I - \tau K|||_s = \\ &=\; \max\{|1 - \tau\lambda_{\min}(K)|, |1 - \tau\lambda_{\max}(K)|\} \leq \\ &\leq\; q := \max\{|1 - \tau\gamma_1|, |1 - \tau\gamma_2|\} < 1 \text{ für } 0 < \tau < 2/\gamma_2. \end{aligned}$$



Betrachten Fehlerabschätzung (6.4) für

$$\begin{array}{lll} s = 0: & \|\underline{u} - \underline{u}^j\| \leq q^j\|\underline{u} - \underline{u}^0\| & \curvearrowright \text{ nicht praktisch überprüfbar !} \\ s = 1: & \|\underline{u} - \underline{u}^j\|_K \leq q^j\|\underline{u} - \underline{u}^0\|_K & \curvearrowright \text{ nicht praktisch überprüfbar !} \\ s = 2: & \left\{ \begin{array}{lll} \|\underline{u} - \underline{u}^j\|_{K^2} & \leq & q^j\|\underline{u} - \underline{u}^0\|_{K^2} \\ \|\underline{f} - K\underline{u}^j\| & \leq & q^j\|\underline{f} - K\underline{u}^0\| \end{array} \right. & \begin{array}{l} \curvearrowright \text{ praktisch auswertbar !} \\ \rightarrow \text{Defektnorm} \end{array} \end{array}$$

Für die optimale Parameterwahl

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

erhalten wir die bestmögliche Konvergenzrate (vergleiche [26] Numerik I, Punkt 4.2.2)

$$q_{\text{opt}} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \quad \text{mit} \quad \xi = \underset{\uparrow}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \leqq \frac{1}{\kappa(K)} = O(h^2)$$

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 & \leqq & \lambda_{\min}(K) \text{ „=“ beste} \\ \gamma_2 & \geqq & \lambda_{\max}(K) \qquad \text{Information !} \end{array}$$

- **Resultat:**

   1. $I(\varepsilon) = $ Anzahl der Iterationen für $\left(q^{I(\varepsilon)} \leq \varepsilon\right) = [|\ln \varepsilon^{-1}/\ln q^{-1}|] =$
      $\overset{\text{Taylor}}{=} O(\underline{\kappa(K)} \ln \varepsilon^{-1}) = O(h^{-2} \ln \varepsilon^{-1}) \quad \ominus$

   2. $Q_{\text{it}} = $ Aufwand pro Iterationsschritt $=$
      $= Q(K * \underline{u}^j, \underline{d}^j = \underline{f} - K\underline{u}^j, \underline{u}^{j+1} = \underline{u}^j + \tau \underline{\omega}^j) =$
      $= O(h^{-m}) \approx N \quad \oplus$

   3. $Q(\varepsilon) = $ Gesamtaufwand $= \underline{I(\varepsilon)} \cdot Q_{\text{it}} = O(h^{-m-2} \ln \varepsilon^{-1}), \quad \ominus$

   wobei $[|x|]$ die kleinste ganze Zahl $\geq x$ bezeichnet.

- **Idee:** Reduktion der Iterationszahlen durch Vorkonditionierung $C = C^T$ p.d.:
   Betrachten anstelle von (6.2) die vorkonditionierte Methode der einfachen Iteration (vorkonditioniertes Richardson–Verfahren)

$$(6.5) \qquad C\frac{\underline{u}^{j+1} - \underline{u}^j}{\tau} + K\underline{u}^j = \underline{f} \qquad \begin{cases} 1. & \underline{d}^j = \underline{f} - K \times \underline{u}^j \\ 2. & \underline{w}^j = C^{-1} \times \underline{d}^j \quad \text{(Vorkonditionierung)} \\ 3. & \underline{u}^{j+1} = \underline{u}^j + \tau \underline{\omega}^j \end{cases}$$

$$j = 0, 1, \ldots,$$

   mit gegebener Startnäherung $\underline{u}^0 \in I\!R^N$ und Vorkonditionierung $C = C^T$ p.d.

- **Mit der Substitution**

$$(6.6) \qquad \underline{u}^j = C^{-0.5}\underline{v}^j$$

   wird (6.5) äquivalent zum Iterationsverfahren

$$(6.7) \qquad \frac{\underline{v}^{j+1} - \underline{v}^j}{\tau} + \boxed{C^{-0.5}KC^{-0.5}\underline{v}^j = C^{-0.5}\underline{f}.}$$

   Damit entspricht (6.7) dem Verfahren der einfachen Iteration (6.2) mit der vorkonditionierten Matrix $C^{-0.5}KC^{-0.5}$ anstelle K und der rechten Seite $C^{-0.5}\underline{f}$ anstelle $\underline{f}$. Folglich gelten auch alle obengenannten Resultate in entsprechend modifizierter Form:

   1. $I(\varepsilon) = O(\underline{\kappa(C^{-0.5}KC^{-0.5})} \ln \varepsilon^{-1}) = [|\ln \varepsilon^{-1}/\ln q^{-1}|]$
      mit $q = \max\{|1 - \tau\gamma_1|, |1 - \tau\gamma_2|\}$ und γ_1 bzw. γ_2 aus den Spektraläquivalenzungleichungen ($\widehat{=}$ EWP: $K\underline{v} = \lambda C\underline{v}$)

$$(6.8) \qquad \begin{aligned} \gamma_1(\underline{v}, \underline{v}) &\leq (C^{-0.5}KC^{-0.5}\underline{v}, \underline{v}) \leq \gamma_2(\underline{v}, \underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in I\!R^N, \\ \gamma_1(C\underline{v}, \underline{v}) &\leq (K\underline{v}, \underline{v}) \leq \gamma_2(C\underline{v}, \underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in I\!R^N \ (\gamma_1 C \leq K \leq \gamma_2 C). \end{aligned}$$

   2. $Q_{\text{it}} = Q(K * \underline{u}^j, \underline{d}^j = \underline{f} - K\underline{u}^j, \boldsymbol{\underline{w}^j = C^{-1} * \underline{d}^j}, \underline{u}^{j+1} = \underline{u}^j + \tau \underline{w}^j) =$
      $= O(h^{-m}) + Q(\boldsymbol{\underline{w}^j = C^{-1}\underline{d}^j}).$

   3. $Q(\varepsilon) = O\left(\kappa(C^{-0.5}KC^{-0.5}) \cdot \ln \varepsilon^{-1} \cdot Q_{\text{it}}(\ldots \boldsymbol{C^{-1} * \underline{d}^j} \ldots)\right).$

- **Fehlerabschätzung** (6.4) angewandt auf (6.7) unter Beachtung von (6.6):

(6.9) $\|\underline{u} - \underline{u}^j\|_* \le q^j \|\underline{u} - \underline{u}^0\|_*$ mit $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_{C^{0.5}(C^{-0.5}KC^{-0.5})^s C^{0.5}}$:

$s = 0$: $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_C$ $\hookrightarrow$ nicht praktisch verwendbar !
$s = 1$: $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_K$ $\hookrightarrow$ nicht praktisch verwendbar !
$s = 2$: $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_{KC^{-1}K}$:
$(\underline{w}^j, \underline{d}^j) \le \varepsilon^2 (\underline{w}^0, \underline{d}^0)$ $\hookrightarrow$ praktisch auswertbar !

- **Aus den oben dargelegten Resultaten ergeben sich offenbar folgende Forderungen an die Wahl des Präkonditionierers $C = C^T$ p.d.:**

1. Forderung: Die Vorkonditionierungsaktion

$$\underline{w}^j := C^{-1} * \underline{d}^j$$

muß schnell durchzuführen sein, da sie in jedem Iterationsschritt ausgeführt werden muß:
Ziel: $Q(\underline{w}^j = C^{-1} \times \underline{d}^j) = O(h^{-m})$!

2. Forderung: $\kappa(C^{-0.5}KC^{-0.5}) \equiv \kappa(C^{-1}K) \ll \kappa(K)$:
Ziel: $\kappa(C^{-0.5}KC^{-0.5}) = O(1)$!

- **Extremfälle:**

1. $C = I$: 1. Forderung optimal erfüllt, aber 2. Forderung nicht !
2. $C = K$: 2. Forderung optimal erfüllt ($\kappa(C^{-0.5}KC^{-0.5}) = 1$ $\hookrightarrow$ 1 Iteration für $\tau = 1$), aber 1. Forderung nicht !

- **Gesucht: Kompromiß zwischen 1. und 2. Forderung:**

I (einfache Iteration) — C ? — K (direktes Verfahren)

1977 ff 1970 ff 1983 ff 1985 ff 1986 1986 1990

$\ldots \underbrace{\text{IC} \ldots \text{MIC} \ldots \text{SSOR}}_{\text{[20], [Praktikum]}} \ldots \text{MGM} \ldots \text{DD} \ldots \underbrace{\text{Multilevel (HB, BPX),} \ldots) \ldots \text{ASM/MSM}}_{\text{Punkt 6.3}}$

MGM $\downarrow$ Vorlesung [25]

DD $\downarrow$ Vorlesung [27]

- **Bemerkung:**
Zusätzliche Forderungen an Präkonditionierer sind:

– Unabhängigkeit der Konditionszahl $\kappa(C^{-1}K)$ von „schlechten“ Parametern wie: Koeffiziensprünge, Singularitäten, Netzgraduierungen etc. !
– Parallelisierbarkeit der Vorkonditionierungsaktion $C^{-1} * d^j$!

■ **Nachteile des Richardson–Verfahrens:**

1. Zur Bestimmung von τ_{opt} benötigt man γ_1 und γ_2 explizit und möglichst nahe an $\lambda_{\min}(C^{-1}K)$ und $\lambda_{\max}(C^{-1}K)$!
2. $I(\varepsilon) \approx \kappa(C^{-1}K)$!

■ **Auswege:** $\to$ Variationsiterationsverfahren ($\curvearrowright$ nichtlinearer Fehlerübergangsoperator)

1. Gradientenverfahren (GV): γ_1 und γ_2 werden nicht benötigt !
$\tau = \tau_{j+1}$ wird aus der Bedingung

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ritzsches Energiefunktional}}}{J(\underline{u}^j + \tau\underline{w}^j)} := \frac{1}{2}\left(K(\underline{u}^j + \tau\underline{w}^j), (\underline{u}^j + \tau\underline{w}^j)\right) - (\underline{f}, \underline{u}^j + \tau\underline{w}^j) \to \min !$$

bestimmt, wobei die Suchrichtung mit dem vorkonditionierten Defekt $\underline{w}^j = C^{-1}\underline{d}^j$ zusammenfällt. Aus der hinreichenden und notwendigen Minimumsbedingung

$$\frac{dJ(\underline{u}^j + \tau\underline{w}^j)}{d\tau} \equiv (K\underline{w}^j, \underline{u}^j) + \tau(K\underline{w}^j, \underline{w}^j) - (\underline{f}, \underline{w}^j) = 0$$

erhalten wir sofort

$$\boxed{\tau_{j+1} = \frac{(\underline{f}, \underline{w}^j) - (K\underline{u}^j, \underline{w}^j)}{(K\underline{w}^j, \underline{w}^j)} = \frac{(\underline{d}^j, \underline{w}^j)}{(K\underline{w}^j, \underline{w}^j)}}$$

Da

$$\min_\tau J(\underline{u}^j + \tau\underline{w}^j) \quad \Longleftrightarrow \quad \min_\tau \|u - (\underline{u}^j + \tau\underline{w}^j)\|_K$$

(vergleiche [26] Numerik I, Ü 4.5), kann die Konvergenz des GV nicht schlechter sein als die des Richardson-Verfahrens (6.5):

$$\begin{array}{rcl} \|\underline{u} - \underline{u}^{j+1}\|_K & = & \min\limits_\tau \|\underline{u} - (\underline{u}^j + \tau\underline{w}^j)\|_K \leq \|\underline{u} - (\underline{u}^j + \tau\underline{w}^j)\|_K \\ \text{GV} & \leq & q\|\underline{u} - \underline{u}^j\|_K \leq \ldots \leq q^j\|\underline{u} - \underline{u}^0\|_K, \\ & \downarrow & \\ & & \tau \in (0, 2/\gamma_2), \ \text{d.h., „Richardson-}\tau\text{"} \end{array}$$

$$\curvearrowright I(\varepsilon) = O\left(\kappa(C^{-1}K)\ln\varepsilon^{-1}\right).$$

2. Konjungiertes Gradientenverfahren (CG):
In der Praxis wird zur Auflösung von (6.1) in allererster Linie das vorkonditionierte konjungierte Gradientenverfahren (PCG = Preconditioned Conjugate Gradient Method) genutzt.
Das PCG-Verfahren
   - behält den Vorteil des GV (d.h., γ_1 und γ_2 werden zur Durchführung nicht benötigt)
   - und hat zusätzlich einen Konvergenzbeschleunigungseffekt:
   $I(\varepsilon) \approx \sqrt{\kappa(C^{-1}K)}\ln\varepsilon^{-1}$.

Idee: Verwendung orthogonaler Suchrichtungen $\underline{s}^j$ anstelle des vorkonditionierten Defekts $\underline{w}^j$!

Algorithmus:

1. Startschritt:
   Wähle Anfangsnäherung: $\underline{u}^0 \in I\!\!R^N$:

   a) $\underline{u}^0 = 0$ bzw. $\underline{u}^0 = C^{-1}\underline{f}$,

   b) $\underline{u}^0 \equiv \underline{u}_l^0 = I_{l-1}^l \underline{u}_{l-1}^{j_{l-1}}$ (Nested Iteration: Cascadic CG),

   c) $\underline{u}^0$ – anderweitig, z.B. aus vorhergehendem Zeitschritt bei instationären Problemen.

$$\begin{aligned} \underline{d}^0 &= \underline{f} - K\underline{u}^0 \\ \underline{w}^0 &= C^{-1}\underline{d}^0 \text{ – vorkonditionierter Defekt} \\ \underline{s}^0 &= \underline{w}^0 \end{aligned}$$

2. Iteration: $j = 0, 1, \ldots, j_* = I_{\max}(\varepsilon)$
   Genauigkeitstest: $0 < \varepsilon < 1$, ε – relative Genauigkeit:

$$(\underline{w}^j, \underline{d}^j) \le \varepsilon^2 (\underline{w}^0, \underline{d}^0)$$

$$\boxed{\|\underline{z}^j\|_{KC^{-1}K} \le \varepsilon \|\underline{z}^0\|_{KC^{-1}K}, \ \underline{z}^j = \underline{u}\text{-}\underline{w}^j\text{-Fehler}}$$

$$\alpha_{j+1} = \frac{(\underline{w}^j, \underline{d}^j)}{(K\underline{s}^j, \underline{s}^j)}$$

$$\underline{u}^{j+1} = \underline{u}^j + \alpha_{j+1}\underline{s}^j$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha = \alpha_{j+1} : \ \|\underline{u} - (\underline{u}^j + \alpha \underline{s}^j)\|_K \to \min\limits_{\alpha} \\ \Updownarrow \\ J(\underline{u}^j + \alpha \underline{s}^j) \to \min\limits_{\alpha} \end{array}} \quad 1)$$

$$\underline{d}^{j+1} = \underline{d}^j - \alpha_{j+1} K \underline{s}^j$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{d}^{j+1} &= \underline{f} - K\underline{u}^{j+1} = \underline{f} - K(\underline{u}^j + \alpha_{j+1}\underline{s}^j) \\ &= \underline{d}^j - \alpha_{j+1} K \underline{s}^j \end{aligned}}$$

$$\underline{w}^{j+1} = C^{-1}\underline{d}^{j+1} \qquad \boxed{\text{Vorkonditionierungsgleichung}}$$

$$\beta_{j+1} = \frac{(\underline{w}^{j+1}, \underline{d}^{j+1})}{(\underline{w}^j, \underline{d}^j)}$$

$$\underline{s}^{j+1} = \underline{w}^{j+1} + \beta_{j+1}\underline{s}^j$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\underline{s}^{j+1}, \underline{s}^j)_K = 0 \text{ !, d.h.,} \\ \beta = \beta_{j+1} : (\underline{w}^{j+1} + \beta \underline{s}^j, \underline{s}^j)_K = 0 \end{array}} \quad 2)$$

Bemerkung zum Algorithmus:

1) $$\alpha_{j+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe 1. GV}}}{\overset{1)}{=}} \frac{(\underline{d}^j, \underline{s}^j)}{(K\underline{s}^j, \underline{s}^j)} \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{s}^j = \underline{w}^j + \beta_j \underline{s}^{j-1}}}{=} \frac{(\underline{d}^j, \underline{w}^j) + \beta_j \overset{\substack{0 \\ \|}}{(\underline{s}^j, \underline{s}^{j-1})}}{(K\underline{s}^j, \underline{s}^j)} = \frac{(\underline{d}^j, \underline{w}^j)}{(K\underline{s}^j, \underline{s}^j)}.$$

2) $$\beta_{j+1} \overset{2)}{=} -\frac{(K\underline{w}^{j+1}, \underline{s}^j)}{(K\underline{s}^j, \underline{s}^j)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mms}}}{=} \frac{(\underline{w}^{j+1}, \underline{d}^{j+1})}{(\underline{w}^j, \underline{d}^j)}.$$

Konvergenz des PCG-Verfahrens:

(6.11) $$\|\underline{u} - \underline{u}^j\|_K \leq q_j \|\underline{u} - \underline{u}^0\|_K,$$

mit

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{2q^j}{1+q^{2j}}, \\ q &= \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \ \xi = \gamma_1/\gamma_2 \left(\overset{\text{„="}}{\leq} 1/\kappa(C^{-1}K) \right), \end{aligned}$$

d.h.,

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) = I(q_j \leq \varepsilon) &= \left[\left| \frac{\ln(\varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2}+1})}{\ln q^{-1}} \right| \right] \\ &\approx O\left(\sqrt{\kappa(C^{-1}K)} \ln \varepsilon^{-1} \right). \end{aligned}$$

Literatur: [5] Braess D.: Finite Elemente. Springer-Lehrbuch, Berlin 1992. Kapitel IV, S. 149 – 182.

6.3 Moderne Multilevel Präkonditionierer

6.3.1 Schwarzsche Methoden: MSM und ASM

- **MSM** = Multiplicative Schwarz Method
- **ASM** = Additive Schwarz Method

■ **Betrachten symmetrisches, $\mathbf{V}_0$-elliptisches und $\mathbf{V}_0$-beschränktes Variationsproblem**

(6.12) Gesucht $u \in \mathbf{V}_0 : a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in \mathbf{V}_0$

und ein dazugehöriges FE-Schema $\overset{\Phi}{\longleftrightarrow}$ FE-GS:

$(6.12)_h$ Gesucht $u_{\not h} \in \mathbf{V} = \mathbf{V}_{0h} : \quad a(u_{\not h}, v_{\not h}) = < F, v_h > \quad \forall v_{\not h} \in \mathbf{V}_{0h},$

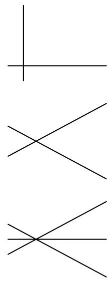
$$\updownarrow \quad \leftarrow \Phi = [\varphi^{(i)}]_{i \in \omega_h} = \underset{\text{„Knotenbasis"}}{[\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)}]} : \mathbf{V} = \text{span}\, \Phi,$$

$(\underline{6.12})_h$ $\underline{u}_{\not h} \in \mathbb{R}^{N_{\not h}} : \quad K_{\not h} \underline{u}_{\not h} = \underline{f}_{\not h},$

wobei $u = \Phi \underline{u} \equiv [\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)}]\underline{u} := \sum_{i=1}^{N} u^{(i)} \varphi^{(i)}$. Die Notation „$\not h$" soll andeuten, daß der Index h im weiteren auch weggelassen wird.

- **Sei nun**

$$(6.13)\qquad \mathbf{V} = \sum_{s=1}^{p} \mathbf{V}_s \overset{\text{Bsp.}}{\longmapsto} \mathbf{V} := I\!R^2 = \begin{cases} p = 2\ \overset{\perp}{\oplus} \\ p = 2\ \oplus \\ p = 3\ + \end{cases}$$



als <u>direkte Summe</u> von p Unterräumen $\mathbf{V}_s = \text{span}\ \Phi V_s \subset \mathbf{V}$ $(s = \overline{1,p})$ darstellbar, wobei V_s–Basistransformationsmatrix der Dimension $N \times N_s$, $N_s = \dim \mathbf{V}_s = \text{rang}\ V_s$, $\sum\limits_{s=1}^{p} N_s \geq N$.

- **Definieren Ritz–Projektor $\boldsymbol{P_s} \in \boldsymbol{L}\,(\mathbf{V},\mathbf{V}_s) \equiv [\mathbf{V},\mathbf{V}_s]$:**

(6.14) $P_s :\ \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}_s$ – Orthoprojektor bzgl. d. energ. Skalarproduktes $a(\cdot,\cdot)$:

$$a(\underbrace{P_s u}_{\substack{\| \\ u_s = \Phi V_s \underline{u}_s \in \mathbf{V}_s,}}, v_s) = a(u, v_s) \quad \forall v_s \in \mathbf{V}_s \quad \forall u \in \mathbf{V},$$

$$\downarrow$$

$$v_s = \Phi V_s \underline{v}_s,\ \underline{u}_s, \underline{v}_s \in I\!R^{N_s},$$

$$\begin{array}{ccc} a(\Phi V_s \underline{u}_s, \Phi V_s \underline{v}_s) & = & a(\Phi \underline{u}, \Phi V_s \underline{v}_s) \\ \| & & \| \\ (K V_s \underline{u}_s, V_s \underline{v}_s) & & (K \underline{u}, V_s \underline{v}_s) \end{array}$$

$$V_s^T K V_s \underline{u}_s = V_s^T K \underline{u},\ \text{d.h.,}\ \underline{\underline{\underline{u}_s = (V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T K \underline{u}}}$$

- **ASM = Additive Schwarzsche Methode für das Raum-Splitting (6.13) $\mathbf{V} = \sum\limits_{s=1}^{p} \mathbf{V}_s$:**

<u>Startnäherung:</u> $u^0 = \Phi \underline{u}^0 \in \mathbf{V} = \sum\limits_{s=1}^{p} \mathbf{V}_s$.

<u>Iteration:</u>

<u>FOR</u> $n = 0$ <u>STEP</u> 1 <u>UNTIL</u> Convergence <u>DO</u>

<u>BEGIN</u> <u>FOR</u> <u>ALL</u> $s = \overline{1,p}$ <u>DO</u> <u>IN</u> <u>PARALLEL</u>

$$w_s^n = \Phi V_s \underline{w}_s^n \in \mathbf{V}_s : a(w_s^n, \overset{\overset{\Phi V_s \underline{v}_s}{\|}}{v_s}) = \underbrace{\underline{< F, v_s > - a(u^n, v_s)}}_{\overset{\|}{a(u-u^n, v_s)}} \quad \forall v_s = \Phi V_s \underline{v}_s \in V_s$$

Subspace-Correction $\updownarrow$ inexakte Lsg. $\rightarrow$ $\downarrow$ $b_s(w_s^n, v_s)$

$$\underline{w}_s^n \in \mathbb{R}^{N_s} : \quad \underset{\underset{C_s\ (\text{spd})}{\downarrow}}{V_s^T K V_s} \underline{w}_s^n = V_s^T \underline{d}^n \text{ mit } \underline{d}^n = \underline{f} - K\underline{u}^n = K(\underline{u} - \underline{u}^n),$$

$$\underline{u}^n \leftrightarrow u^n = \Phi \underline{u}^n.$$

<u>END FOR</u>

(6.15) $$u^{n+1} = u^n + \tau \sum_{s=1}^{p} w_s^n = u^n + \tau \underbrace{\sum_{s=1}^{p} P_s}_{=:P} \underbrace{(u - u^n)}_{=:z^n}$$

$\updownarrow$

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \tau \sum_{s=1}^{p} V_s \underline{w}_s^n \quad .$$

- **<u>Fehlerübergangsschema:</u>**

Für den Fehler $z^n = u - u^n$ erhalten wir aus (6.15) unmittelbar das Iterationsschema

(6.16) $$z^{n+1} = (I - \tau \sum_{s=1}^{p} P_s) z^n,$$

aus dem sofort die Fehlerabschätzung

(6.17) $$\|z^{n+1}\| \le \|I - \tau \sum_{s=1}^{p} P_s\| \|z^n\|$$

in der Energienorm $\|\cdot\|^2 = a(\cdot,\cdot)$ folgt.

■ **Matrix-Darstellung der ASM:**

(6.15)
$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \tau \sum_{s=1}^{p} V_s \underline{w}_s^n$$
$$\downarrow$$
$$\underline{w}_s^n = (V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T \overbrace{K(\underline{u} - \underline{u}^n)}^{=\underline{d}^n}$$

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \tau \sum_{s=1}^{p} \underbrace{V_s (V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T K}(\underline{u} - \underline{u}^n)$$
$$\swarrow\!\!\nearrow$$
$$u^{n+1} = u^n + \tau \underbrace{\sum_{s=1}^{p} \overbrace{P_s}}_{=:P} (u - u^n)$$

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \tau \underbrace{\sum_{s=1}^{p} V_s (V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T}_{=:C^{-1}} \; \underbrace{K(\underline{u} - \underline{u}^n)}_{=\underline{d}^n = \underline{f} - K\underline{u}^n}$$

(6.15)
$$\boxed{C \frac{\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n}{\tau} + K\underline{u}^n = \underline{f},}$$

d.h., ASM = Richardson–Verfahren (= Methode der einfachen Iteration) mit dem ASM-Präkonditionierer $C = C^T$ p.d.:

(6.18)
$$C^{-1} = \sum_{s=1}^{p} V_s \; \underbrace{(V_s^T K V_s)^{-1}} \; V_s^T$$
$\downarrow \leftarrow$ inexakte Lsg.
C_s^{-1} (spd)

■ **Bemerkung 6.1:**

1. Aus Punkt 6.2 erhalten wir sofort das folgende Konvergenzresultat für das Richardson–Verfahren:

(6.19)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{\text{Vor.:}} & \exists\, \underline{\gamma}, \bar{\gamma} = \text{const.} > 0 : \underline{\gamma}\, C \le K \le \bar{\gamma}\, C. \\[1ex] \underline{\text{Bh.:}} & \text{Dann gelten die Fehlerabschätzungen:} \\ & \|\underline{u} - \underline{u}^{n+1}\|_{\substack{K\\C\\KC^{-1}K}} \le q^{n+1} \|\underline{u} - \underline{u}^0\|_{\substack{K\\C\\KC^{-1}K}} \\[1ex] & \text{für} \quad 0 < \tau < 2/\bar{\gamma}, \\ & \qquad 0 \le q_{\text{opt}} = q(\tau_{\text{opt}}) := \frac{\bar{\gamma}-\underline{\gamma}}{\bar{\gamma}+\underline{\gamma}} \le q = q(\tau) < 1, \\ & \qquad\qquad\qquad\quad \uparrow \\ & \qquad\qquad\qquad\quad \tau_{\text{opt}} := \frac{2}{\bar{\gamma}+\underline{\gamma}} \\ & \qquad q = q(\tau) := \max\left\{|1 - \tau\underline{\gamma}|, |1 - \tau\bar{\gamma}|\right\}, \\ & \qquad KC^{-1}K = \sum\limits_{s=1}^{p} KV_s(V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T K. \end{array}}$$

2. Wir betrachten die ASM als Methode zur Konstruktion von Präkonditionierern der Form (6.18) und die ASM-Machinary (siehe Punkt 6.3.2 und DD-Vorlesung [27]) als Technik zur Analysis (d.h., zur Bestimmung von $\underline{\gamma}$ und $\bar{\gamma}$) !!
3. In der Praxis nutzt man natürlich CG-Beschleunigung, d.h., PCG mit der Präkonditionierung

(6.20)

$$\boxed{\underline{w}^n = C^{-1}\underline{d}^n := \sum_{s=1}^{p} V_s(V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T \underline{d}^n.}$$

■ **Ü 6.1** Man zeige,

1. $P := \sum\limits_{s=1}^{p} P_s = P^*$ p.d. (bezüglich $a(\cdot,\cdot)$),
   d.h., $\exists\, P^{-1} \in L(\mathbf{V},\mathbf{V})$. Hinweis: $\mathbf{V} = \sum \mathbf{V}_s$, $\sum N_s \geq N$.

2. Die folgenden Ungleichungen sind äquivalent:

   (6.19) $\underline{\gamma}\, C \leq K \leq \bar{\gamma}\, C$,

   (6.19′) $\underline{\gamma}\, a(v,v) \leq a(Pv,v) \leq \bar{\gamma}\, a(v,v) \quad \forall v \in \mathbf{V}$,

   (6.19″) $\underline{\gamma}\, a(P^{-1}v,v) \leq a(v,v) \leq \bar{\gamma}\, a(P^{-1}v,v) \quad \forall v \in \mathbf{V}$.

3. Die Lösung des Variationsproblems

   $(6.12)_h$ Ges. $u \in \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_{0h} : a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in \mathbf{V}$

   ist äquivalent zur Lösung der Operatorgleichung

   $(6.12)'_h$ Ges. $u \in \mathbf{V} : Pu = g$ in $\mathbf{V}$

   mit $g = \sum\limits_{s=1}^{p} g_s$ und
   $g_s \in \mathbf{V}_s : a(g_s, v_s) = < F, v_s > \quad \forall v_s \in \mathbf{V}_s$.

■ **MSM = Multiplikative Schwarzsche Methode für das Raum-Splitting**
(6.13) $\mathbf{V} = \sum\limits_{s=1}^{p} \mathbf{V}_s$:

Startnäherung: $u^0 = \Phi \underline{u}^0 \in \mathbf{V} = \sum\limits_{s=1}^{p} \mathbf{V}$.
Iteration:
FOR $n = 0$ STEP 1 UNTIL Convergence DO
 $u^{n+0} := u^n$
 FOR $s = 1$ STEP 1 UNTIL p DO
 $w_s^{n+s/p} \in \mathbf{V}_s : a(w_s^{n+s/p}, v_s) \;=\; < F, v_s > - a(u^{n+\frac{s-1}{p}}, v_s) \equiv$
 inexakte Lsg. $\rightarrow\downarrow$ $\equiv\; a(u - u^{n+\frac{s-1}{p}}, v_s) \quad \forall v_s \in \mathbf{V}_s$
 $b_s(w_s^{n+s/p}, v_s)$
 $u^{n+s/p} = u^{n+\frac{s-1}{p}} + w_s^{n+\frac{s-1}{p}} \;\equiv\; u^{n+\frac{s-1}{p}} + P_s(u - u^{n+\frac{s-1}{p}})$

 END FOR
END FOR

■ **Bemerkung 6.2:**

1. $$\begin{aligned} u - u^{n+s/p} &= u - u^{n+\frac{s-1}{p}} - P_s(u - u^{n+\frac{s-1}{p}}) = \\ &= (I - P_s)(u - u^{n+\frac{s-1}{p}}) = (I - P_s) z^{n+\frac{s-1}{p}} \end{aligned}$$
$$\Longrightarrow z^{n+1} = (I - P_p)(I - P_{p-1}) \cdot \ldots \cdot (I - P_1) z^n$$
$$\Longrightarrow \|z^{n+1}\| := [a(z^{n+1}, z^{n+1})]^{0.5} \leq \underbrace{\|(I - P_p) \cdot \ldots \cdot (I - P_1)\|}_{\leq q_{\mathrm{MSM}} < 1 \,!?} \|z^n\|$$

2. Frage: $a(\cdot,\cdot) \overset{\text{inexakte}}{\underset{\text{Lsg.}}{\rightsquigarrow}} b_s(\cdot,\cdot)$?

3. Konvergenzanalysis: siehe [27] DD-Vorlesung: ($q_{\mathrm{MSM}} \approx q_{\mathrm{ASM}}^2$!!).

■ **Ein erstes Beispiel:**

$$\mathbf{V}_s = \operatorname{span} \left\{ \varphi^{(s)} \right\}, \ s = \overline{1,p}; \quad p = N = N_h,$$
$$\mathbf{V}_s = \operatorname{span} \Phi V_s \quad \text{mit } V_s = \underline{e}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{N \times N_s} \longleftarrow s\text{-te Zeile (Element)}$$
$$N_s = \dim \mathbf{V}_s = 1,$$
$$V_s^T K V_s = \underline{e}_s^T K \underline{e}_s = K_{ss}.$$

$\boxed{\text{ASM}}$ = (gedämpftes) JACOBI-Verfahren:

$$C^{-1} = \sum_{s=1}^{N} \underline{e}_s K_{ss}^{-1} \underline{e}_s^T = \sum_{s=1}^{N} \begin{bmatrix} 0 & & & & \boldsymbol{O} \\ & 0 & & & \\ & & K_{ss}^{-1} & & \\ & & & 0 & \\ \boldsymbol{O} & & & & 0 \end{bmatrix} = D^{-1} \text{ mit } D = \operatorname{diag} K,$$
$$D \frac{\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n}{\tau} + K \underline{u}^n = \underline{f}.$$

$\boxed{\text{MSM}}$ = Gauß-Seidel-Verfahren:

$$\underline{u}^{n+s/p} = \underline{u}^{n+\frac{s-1}{p}} + V_s \underline{w}_s^{n+s/p}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{aligned} \underline{w}_s^{n+s/p} &= w_s^{n+s/p} = (V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T (\underline{f} - K \underline{u}^{n+\frac{s-1}{p}}) \\ &= \frac{1}{K_{ss}} (f_s - \sum_{j=1}^{N} K_{sj} u_j^{n+\frac{s-1}{p}}), \end{aligned}$$

d.h., $u_s^{n+s/p} = \frac{1}{K_{ss}} (f_s - \sum_{j \neq s} K_{sj} u_j^{n+\frac{s-1}{p}})$, wobei $u_j = u^{(j)}$.

■ **Bemerkung 6.3:**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Raum-Splitting } \mathbf{V} = \sum\limits_{s=1}^{p} \mathbf{V}_s \\[2ex] \bullet \text{ Bilinearform(en)} \\ \quad a(\cdot,\cdot) \text{ bzw. } b_s(\cdot,\cdot) \text{ auf } \mathbf{V}_s \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Def.}} \quad \textbf{MSM,} \\[3ex] \xrightarrow[\text{Def.}]{T} \quad \textbf{ASM.} \end{array}$$

6.3.2 Techniken zur Abschätzung der Spektraläquivalenzkonstanten für die ASM–Präkonditionierer

6.3.2.1 Der exakte ASM–Präkonditionierer $C^{-1} = \sum\limits_s V_s(V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T$

■ **Ziel:** Bestimmung der Spektraläquivalenzkonstanten

$$\underline{\gamma} \text{ „} \overset{\leq}{=} \text{“ } \lambda_{\min}(C^{-1}K) = \lambda_{\min}(P) \text{ und}$$
$$\bar{\gamma} \text{ „} \overset{\geq}{=} \text{“ } \lambda_{\max}(C^{-1}K) = \lambda_{\max}(P):$$

(6.19) $\quad \underline{\gamma}\, C \leq K \leq \bar{\gamma}\, C,$

(6.19′) $\quad \underline{\gamma}\, a(v,v) \leq a(Pv,v) \leq \bar{\gamma}\, a(v,v) \quad \forall v \in \mathbf{V},$

(6.19″) $\quad \underline{\gamma}\, a(P^{-1}v,v) \leq a(v,v) \leq \bar{\gamma}\, a(P^{-1}v,v) \quad \forall v \in \mathbf{V}$

und Untersuchung ihrer Abhängigkeit vom Diskretisierungsparameter h und anderen „schlechten“ Parametern, wie z.B. p (insbesondere bei der Parallelisierung), Koeffizientensprünge, Netzgraduierungen etc.

■ **Definieren zunächst in V eine neue Norm durch**

(6.21)
$$|||u|||^2 := \inf_{\substack{u=\sum_{s=1}^{p} u_s \\ u_s \in \mathbf{V}_s}} \sum_{s=1}^{p} a(u_s, u_s).$$

d.h., inf über alle Zerlegungen von u

■ **Ü 6.2** Man zeige, daß durch (6.21) wirklich eine Norm $|||\cdot|||$ in $\mathbf{V}$ definiert wird !

■ **Satz 6.4:** (Exakter ASM-Präkonditionierer)

$$\boxed{\lambda_{\min}(P) = \min_{\substack{u \in \mathbf{V} \\ u \neq \mathbf{O}}} \frac{a(u,u)}{|||u|||^2} \quad \text{und} \quad \lambda_{\max}(P) = \max_{\substack{u \in \mathbf{V} \\ u \neq \mathbf{O}}} \frac{a(u,u)}{|||u|||^2}}$$

<u>**Beweis:**</u>

- Zeigen:

$$\text{(6.22)} \qquad |||u|||^2 = a(P^{-1}u, u) \quad \forall u \in \mathbf{V}.$$

- Tatsächlich, sei

$$u = \sum_{s=1}^{p} u_s, \ \ u_s \in \mathbf{V}_s \quad (s = \overline{1,p})$$

eine beliebige Subspace-Zerlegung von $u \in \mathbf{V}$. Dann gilt:

$$a(P^{-1}u, u) \overset{\substack{u=\sum_s u_s \\ \downarrow}}{=} \sum_{s=1}^{p} a(\overbrace{P^{-1}u}^{=:w}, u_s) \overset{\substack{(6.14)\ \ a(w,v_s)=a(P_s w, v_s)\ \forall v_s \in \mathbf{V} \\ \downarrow}}{=} \sum_{s=1}^{p} a(\underbrace{P_s P^{-1}u}_{=:w_s \in \mathbf{V}_s}, u_s) \le$$

$$\underset{(*)}{\overset{\substack{2\times\text{Cauchy}\\ \downarrow}}{\le}} \left(\sum_{s=1}^{p} a(w_s, w_s)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s=1}^{p} a(u_s, u_s)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$a(\underbrace{P_s P^{-1}u}_{=w_s}, \underset{\substack{\downarrow \\ w_s}}{v_s}) = a(P^{-1}u, \underset{\substack{\downarrow \\ w_s}}{v_s}) \ \forall v_s \in \mathbf{V}$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{p} a(P^{-1}u, w_s)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s=1}^{p} a(u_s, u_s)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Big(a(P^{-1}u, \underbrace{\sum_{s=1}^{p} w_s}_{=u})\Big)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s=1}^{p} a(u_s, u_s)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \ \Big(a(P^{-1}u, u)\Big)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s=1}^{p} a(u_s, u_s)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{s=1}^{p} w_s = \sum_{s=1}^{p} P_s P^{-1}u = \underbrace{\left(\sum_{s=1}^{p} P_s\right)}_{=P} P^{-1}u = P\,P^{-1}u = u$$

mit Gleichheit „=“ für $u_s = w_s$, d.h., für die Zerlegung $u = \sum\limits_{s=1}^{p} w_s$
(„$\le$“$\longmapsto$„=“ $(*)$). **q.e.d.**

■ **Folgerung 6.5:** (Lemma von P. L. Lions, 1987)

> Vor.: $\forall u \in \mathbf{V}\ \exists$ Zerlegung $u = \sum_{s=1}^{p} u_s$ mit $u_s \in \mathbf{V}_s$:
> $\sum_{s=1}^{p} a(u_s, u_s) \le c_L^2 a(u,u)$
> mit einer positiven Konstanten $c_L = \text{const.} > 0$.
>
> Bh.: Dann gilt:
> $a(u,u) \le c_L^2\, a(Pu,u) \quad \forall u \in \mathbf{V}$,
> d.h., $\lambda_{\min}(P) = \min\limits_{u\in\mathbf{V}} \frac{a(Pu,u)}{a(u,u)} \ge \frac{1}{c_L^2}$.

Beweis:

a) direkt (mms bzw. siehe P. L. Lions [31]).

b) folgt sofort aus Satz 6.4:

$$\lambda_{\min}(P) = \min_{u\in\mathbf{V}} \frac{a(u,u)}{|||u|||^2} = \min_{u\in\mathbf{V}} \frac{a(u,u)}{\inf\limits_{\substack{u=\sum v_s\\ v_s\in\mathbf{V}_s}} \sum\limits_{s=1}^{p} a(v_s,v_s)} \ge \frac{1}{c_L^2}.$$

$$\uparrow$$

$$\inf \sum_{s=1}^{p} a(v_s,v_s) \le \sum a(u_s,u_s) \le c_L^2 a(u,u)$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$\exists\, u = \sum u_s \longleftarrow \boxed{\text{Vor.}}$$

q.e.d.

■ **Folgerung 6.6:**

> Vor.: Sei $\epsilon := [\epsilon_{ij}]_{i,j=\overline{1,p}} = \epsilon^T : \epsilon_{ij} \in [0,1]$:
> $|a(v_i,v_j)| \le \epsilon_{ij}(a(v_i,v_i))^{\frac{1}{2}}(a(v_j,v_j))^{\frac{1}{2}}$
> $\forall v_i \in \mathbf{V}_i,\ \forall v_j \in \mathbf{V}_j$ (Verschärfte Cauchy-Ungleichung); $i,j = \overline{1,p}$.
>
> Bh.: Dann gilt:
> $\lambda_{\max}(P) = \max\limits_{u\in\mathbf{V}} \frac{a(Pu,u)}{a(u,u)} \le \varrho(\epsilon) :=$ Spektralradius von ϵ.

Beweis: folgt aus Satz 6.4:

$$\lambda_{\max}(P) = \max_{u\in\mathbf{V}} \frac{a(u,u)}{\inf\limits_{u=\sum v_s} \sum\limits_{s=1}^{p} a(v_s,v_s)} = \max_{u\in\mathbf{V}} \frac{a(\overbrace{\sum_{i=1}^{p} u_i}^{=u}, \overbrace{\sum_{j=1}^{p} u_j}^{=u})}{\inf\limits_{u=\sum v_s} \sum\limits_{s=1}^{p} a(v_s,v_s)} \leq$$

$$\uparrow \quad \boxed{u=\textstyle\sum u_s \text{ sei Zerlegung: } \inf\limits_{u=\sum v_s} \sum a(v_s,v_s)=\sum a(u_s,u_s)}$$

$$\leq \varrho(\epsilon) \max_{u\in\mathbf{V}} \frac{\sum\limits_{s=1}^{p} a(u_s,u_s)}{\inf\limits_{u=\sum\limits_{s=1}^{p} v_s} \sum\limits_{s=1}^{p} a(v_s,v_s)} = \varrho(\epsilon)\cdot 1 = \varrho(\epsilon).$$

$$\uparrow$$

$$0 \leq a(\sum u_i, \sum u_j) = \sum_{i,j} a(u_i,u_j) \leq \sum_{i,j} \epsilon_{ij} (a(u_i,u_i))^{\frac{1}{2}} (a(u_j,u_j))^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \varrho(\epsilon) \sum_{s=1}^{p} a(u_s,u_s).$$

q.e.d.

6.3.2.2 Der inexakte ASM–Präkonditionierer $\tilde{C}^{-1} = \sum\limits_s V_s C_s^{-1} V_s^T$

- **Inexakte Lösung der Subspace-Probleme:**

$$\begin{array}{rrcl} \text{ASM:} & a(w_s^n, v_s) & = & < F, v_s > - a(u^n, v_s) \quad \forall v_s = \Phi V_s \underline{v}_s \in \mathbf{V}_s, \\ \text{inexakte Lsg.} \rightarrow & \Big\downarrow & & V_s^T K V_s \underline{w}_s^n = V_s^T \underline{d}^n, \; w_s^n = \Phi V_s \underline{w}_s^n, \\ & b_s(w_s^n, v_s) & = & < F, v_s > - a(u^n, v_s) \quad \forall v_s = \Phi V_s \underline{v}_s \in \mathbf{V}_s, \\ & & & C_s \underline{w}_s^n = V_s^T \underline{d}^n, \; w_s^n = \Phi V_s \underline{w}_s^n, \end{array}$$

wobei

(6.23) $$(C_s \underline{w}_s, \underline{v}_s)_{I\!R^{N_s}} := b_s(\underbrace{\Phi V_s \underline{w}_s}_{=w_s}, \underbrace{\Phi V_s \underline{v}_s}_{=v_s}) \quad \forall \underline{w}_s, \underline{v}_s \in I\!R^{N_s}$$

und die Bilinearformen $b_s(\cdot,\cdot) : \mathbf{V}_s \times \mathbf{V}_s \to I\!R^1$ als symmetrisch, $\mathbf{V}_s$-elliptisch und $\mathbf{V}_s$-beschränkt vorausgesetzt werden, d.h.,

(6.24) $$\begin{cases} \bullet \; \text{symmetrisch} & : \; b_s(u_s,v_s) = b_s(v_s,u_s) \quad \forall u_s, v_s \in \mathbf{V}_s, \\ \bullet \; \mathbf{V}_s\text{-elliptisch} & : \; \underline{\mu}_s \|v_s\|^2 \leq b_s(v_s,v_s) \quad \forall v_s \in \mathbf{V}_s, \\ \bullet \; \mathbf{V}_s\text{-beschränkt} & : \; |b(u_s,v_s)| \leq \bar{\mu}_s \|u_s\| \|v_s\| \quad \forall u_s, v_s \in \mathbf{V}, \\ s = \overline{1,p}, & \end{cases}$$

wobei hier $\|\cdot\|$ die von $\mathbf{V}_0$ auf $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_{0h}$ und auf alle Teilräume $\mathbf{V}_s$ induzierte Norm bezeichnet.

■ **Satz 6.7:** (Inexakter ASM–Präkonditionierer)

Vor.: 1) Die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b_s(\cdot,\cdot)$ $(s=\overline{1,p})$ seien auf $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ bzw. $\mathbf{V}_s\times\mathbf{V}_s$ $(s=\overline{1,p})$ symmetrisch, elliptisch und beschränkt.

2) $\exists\, \underline{\gamma}_s, \bar{\gamma}_s = \text{const.} > 0$:

$$
(6.25)\qquad \begin{array}{lll} \underline{\gamma}_s C_s & \leq & V_s^T K V_s \leq \bar{\gamma}_s C_s \quad \text{bzw.} \\ \underline{\gamma}_s b_s(v_s,v_s) & \leq & a(v_s,v_s) \leq \bar{\gamma}_s b_s(v_s,v_s) \forall v_s \in \mathbf{V}_s, \\ s=\overline{1,p}. & & \end{array}
$$

3) $\exists\, \underline{\gamma}, \bar{\gamma} = \text{const.} > 0:$ (6.19) $\underline{\gamma}\, C \leq K \leq \bar{\gamma}\, C.$

Bh.: Dann gelten für den inexakten ASM–Präkonditionierer

$$
(6.26)\qquad \tilde{C}^{-1} = \sum_{s=1}^{p} V_s C_s^{-1} V_s^T
$$

die Spektraläquivalenzungleichungen

$$
(6.27)\qquad \underline{\delta}\tilde{C} \leq K \leq \bar{\delta}\tilde{C}
$$

mit $\underline{\delta} = \min\limits_{s=\overline{1,p}}\{\underline{\gamma}_s\}\,\underline{\gamma}$ und $\bar{\delta} = \max\limits_{s=\overline{1,p}}\{\bar{\gamma}_s\}\,\bar{\gamma}$.

Beweis: mms.

■ **Die Ergebnisse von Satz 6.4 und Ü 6.1 kann man direkt auf den inexakten Fall**

$$
b_s(\cdot,\cdot) \approx a(\cdot,\cdot)|_{\mathbf{V}_s} \quad \forall s = \overline{1,p}
$$

übertragen und vermeidet damit „Verluste" durch Zwischenschaltung des exakten ASM–Präkonditionierers wie im Satz 6.7 (vgl. auch Pkt. 6.6.3, Präkonditionierer Nr. 1 und Nr. 2). Definieren dazu zunächst die inexakten ASM–Projektoren

$$
(6.28)\qquad \begin{array}{l} \tilde{P}_s \in L(\mathbf{V},\mathbf{V}_s): \\ b_s(\tilde{P}_s u, v_s) = a(u,v_s) \quad \forall v_s \in \mathbf{V}_s \quad \forall u \in \mathbf{V}, \quad s=\overline{1,p}, \end{array}
$$

und den inexakten ASM–Operator

$$
(6.29)\qquad \tilde{P} := \sum_{s=1}^{p} \tilde{P}_s \in L(\mathbf{V},\mathbf{V}).
$$

Durch die Beziehung

$$
(6.30)\qquad \widetilde{|||u|||}^2 := \inf_{\substack{u=\sum_{s=1}^{p} u_s \\ u_s\in\mathbf{V}_s}} \sum_{s=1}^{p} b_s(u_s,u_s)
$$

wird in $\mathbf{V}$ wieder eine Norm definiert.

Ü 6.3 Man zeige, daß durch (6.30) tatsächlich eine Norm $\widetilde{|||}\cdot\widetilde{|||}$ in $\mathbf{V}$ definiert wird !

Satz 6.8: (Inexakte ASM–Präkonditionierer)

Vor.: Die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ bzw. $b_s(\cdot,\cdot)$ $(s=\overline{1,p})$ seien auf $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ bzw. $\mathbf{V}_s\times\mathbf{V}_s$ $(s=\overline{1,p})$ symmetrisch, elliptisch und beschränkt.

Bh.: Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Die Lösung des Variationsproblems $(6.12)_h \equiv (6.12)'_h$ (vgl. Ü 6.1) ist äquivalent zur Lösung der Operatorgleichung

$$\widetilde{(6.12)}'_h \quad \text{Ges. } u\in\mathbf{V}\equiv\mathbf{V}_{0h} : \tilde{P}u=\tilde{g} \text{ in } \mathbf{V}$$
$$\text{mit } \tilde{g}=\sum_{s=1}^{p}\tilde{g}_s \text{ und}$$
$$\tilde{g}_s\in V_s : b_s(\tilde{g}_s,v_s)=<F,v_s> \quad \forall v_s\in\mathbf{V}_s.$$

2. Der inexakte ASM–Operator $\tilde{P}=\sum\limits_{s=1}^{p}\tilde{P}_s$ ist selbstadjungiert (s.a.) und positiv definit (p.d.) bzgl. des energetischen Skalarproduktes $a(\cdot,\cdot)$.
3. Für $\lambda_{\min}(\tilde{P})\equiv\lambda_{\min}(\tilde{C}^{-1}K)$ und $\lambda_{\max}(\tilde{P})\equiv\lambda_{\max}(\tilde{C}^{-1}K)$ gelten die Darstellungen

$$\lambda_{\min}(\tilde{P}) = \min_{\substack{u\in\mathbf{V}\\ u\neq\mathbf{O}}} \frac{a(u,u)}{\widetilde{|||}u\widetilde{|||}^2} \quad \text{und} \quad \lambda_{\max}(\tilde{P}) = \max_{\substack{u\in\mathbf{V}\\ u\neq\mathbf{O}}} \frac{a(u,u)}{\widetilde{|||}u\widetilde{|||}^2}.$$

Beweis:

- 1. + 2. ist trivial !
- zu 3.: Analog zum Beweis von Satz 6.4 zeigt man $\widetilde{|||}u\widetilde{|||}^2 = a(\tilde{P}^{-1}u,u)$!

q.e.d.

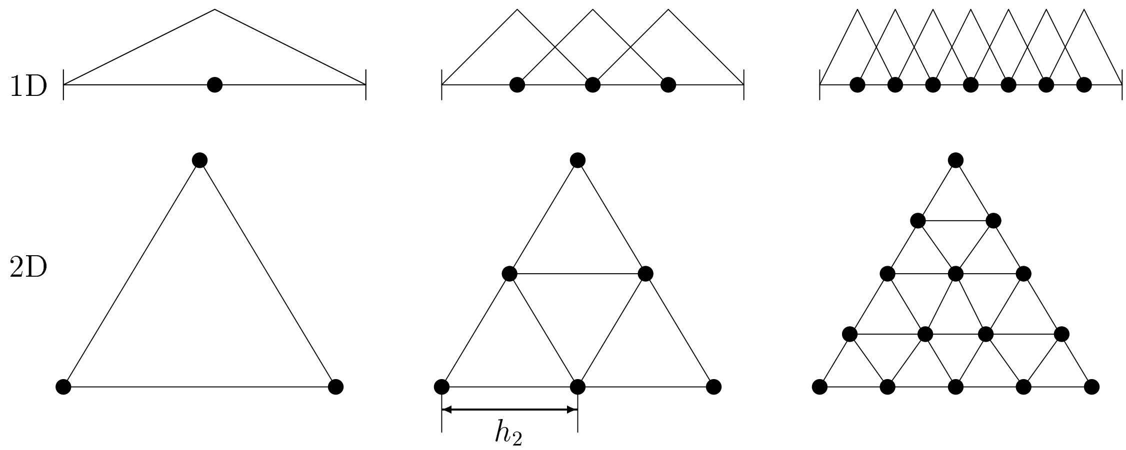
6.3.3 Multilevel-ASM–Präkonditionierer

■ **Betrachten FE–Raum**

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_l := \text{span}\,\Phi_l \subset \mathbf{V}_0 := \{v \in W_2^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\} \subset W_2^1(\Omega),$$
$$\Phi_l = [\varphi_l^{(i)}]_{i=1,\ldots,N_l} = [\varphi_l^{(i)} : i \in \omega_l] = \text{„Knotenbasis“},$$

der durch sukzessive Verfeinerung eines Grobgitterraumes $\mathbf{V}_1$ entstanden sei:

$$\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_2 \subset \ldots \subset \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Level–Index}}}{\mathbf{V}_q} \subset \ldots \subset \mathbf{V}_l$$



$h_q = h_{q-1}/2 = 2^{-(q-1)}h_1, \quad q = \overline{2,l}$ = Level–Index;

$\Phi_q = [\varphi_q^{(i)} : i \in \omega_q]$ – Knotenbasis;

$\omega_q \ni i \leftrightarrow x^{(i)} \in \omega_q$ – Menge der Nichtdirichlet–Punkte;

$N_q = \dim \mathbf{V}_q = |\omega_q|$;

K_q – Steifigkeitsmatrix bezüglich der Knotenbasis:
$(K_q\underline{u}_q, \underline{v}_q) = a(u_q, v_q) \quad \forall u_q = \Phi_q\underline{u}_q,\ v_q = \Phi_q\underline{v}_q \in \mathbf{V}_q$.

■ **ASM–Präkonditionierer ist eindeutig definiert durch**

- Raumsplitting: $\mathbf{V} = \sum\limits_{s=1}^{p} \mathbf{V}_s$,
  $$\underset{\text{Splitting–Index}}{\uparrow} \overset{\text{i.a.}}{\neq} \text{Level–Index}$$
- $b_s(\cdot,\cdot)$,

nämlich

$$\tilde{P}u = \sum_{s=1}^{p} \tilde{P}_s u = \sum_{s=1}^{p} \Phi V_s \underline{u}_s = \sum_{s=1}^{p} \Phi V_s C_s^{-1} V_s^T K \overset{u\,=\,\Phi\underline{u}}{\overset{\updownarrow}{\underline{u}}} = \Phi \sum_{s=1}^{p} V_s C_s^{-1} V_s^T K \underline{u}$$

$$\underline{u}_s \in \mathbb{R}^{N_s} : \quad b_s(\Phi V_s \underline{u}_s, \Phi V_s \underline{v}_s) = a(u, \Phi V_s \underline{v}_s)\ \forall v_s = \Phi V_s \underset{\substack{\downarrow \\ \underline{v}_s \in \mathbb{R}^{N_s}}}{\underline{v}_s} \in \mathbf{V}_s$$
$$C_s \underline{u}_s = V_s^T K \underline{u}$$

$$\underline{\tilde{P}u} = \sum_{s=1}^{p} V_s C_s^{-1} V_s^T K \underline{u}.$$

$\boxed{\text{Satz 6.8}}$ + Wissen über stabile Zerle–gung von Sobolev/Besov–Räumen [33]

Nr.	Bez.	Splitting $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_l = \sum_{s=1}^{p} \mathbf{V}_s$	$b_s(\cdot,\cdot)$	$\kappa(\tilde{P}) = \kappa(C^{-1}K)$	Q_{it}
1	Praktisch sinnlos !	$\mathbf{V} = \sum_{q=1}^{l} \mathbf{V}_q$ $(p = l)$	$b_q(\cdot,\cdot) := a(\cdot,\cdot)$	$O(l)$	?
2	Multilevel L_2-Projek.	$\mathbf{V} = \sum_{q=1}^{l} \mathbf{V}_q$ $(p = l)$	$b_q(\cdot,\cdot) := 2^{2(q-1)}(\cdot,\cdot)_{L_2}$	$O(1)$	$O(N_l)$
3	1990 BPX [6]	$\mathbf{V} = \sum_{q=1}^{l} \sum_{i\in\omega_q} \mathbf{V}_{q,i}$ $(p = \sum N_q)$	$b_{q,i}(\cdot,\cdot) := 2^{2(q-1)}(\cdot,\cdot)_{L_2}$	$O(1)$	$O(N_l)$
4	1992 MDS Zhang	$\mathbf{V} = \sum_{q=1}^{l} \sum_{i\in\omega_q} \mathbf{V}_{q,i}$ $(p = \sum N_q)$	$b_{q,i}(\cdot,\cdot) := a(\cdot,\cdot)$	$O(1)$	$O(N_l)$
5	1986 HB Yserentant	$\mathbf{V} = \sum_{q=1}^{l} \sum_{i\in\omega_q\setminus\omega_{q-1}} \mathbf{V}_{q,i}$ $(p = N_l)$	$b_{q,i}(\cdot,\cdot) := 2^{2(q-1)}(\cdot,\cdot)_{L_2}$	$O(1)$, $m=1$ $O(l^2)$, $m=2$ $O(h_l^{-1})$, $m=3$	$O(N_l)$
$\vdots$	Wavelets	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\text{wobei} \quad \mathbf{V}_{q,i} := \text{span}\,[\varphi_q^{(i)}] = \text{span}\,[\underbrace{\Phi_l V_{q,i}}_{N_l \times 1}],\ \dim\mathbf{V}_{q,i} = 1,\ \omega_0 = \emptyset,$$

BPX = **B**ramble + **P**asciak + **X**u [6],
MDS = **M**ultilevel **D**iagonal **S**caling (Zhang [40]),
HB = **H**ierarchical **B**asis (Yserentant [39]).

■ $\boxed{\textbf{Ü 6.4}}$ Zeigen Sie, daß für Nr. 1, d.h., $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_l = \sum\limits_{q=1}^{l} \mathbf{V}_q \equiv \sum\limits_{s=1}^{p} \mathbf{V}_s$
$(p = l, \quad \mathbf{V}_q \equiv \mathbf{V}_s)$ und $b_q(\cdot,\cdot) := a(\cdot,\cdot)|_{\mathbf{V}_q}$ $(P_s \equiv \tilde{P}_s, \quad P \equiv \tilde{P})$, gilt:
$\lambda_{\min}(P) = 1$ mit $\lambda_{\max}(P) = l$!

---

a) $u = \sum\limits_{q=1}^{l} u_q \in \mathbf{V}_l$ mit $u_q \in \mathbf{V}_q$, $q = \overline{1,l}$:

$$
\begin{aligned}
\curvearrowright a(u,u) \quad &:= \quad \|\textstyle\sum u_q\|^2 \le (\sum \|u_q\|)^2 = \\
&= \quad \Big(\textstyle\sum \sqrt{a(u_q,u_q)}\Big)^2 \le \\
&\le \quad l \textstyle\sum a(u_q,u_q) \\
&\overset{\uparrow}{\text{„}=\text{“}} \quad \text{für } u_q = u_1 \in \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_q \quad \forall q = \overline{1,l}, \\
&\qquad\; \text{d.h., } u = l\,u_1.
\end{aligned}
$$

$\curvearrowright$ $a(u,u) \le l\,|||u|||^2$ ist scharf ! $\curvearrowright$ $\underline{\underline{\lambda_{\max}(P) = l}}$ #

b) Btr. spezielle Zerlegung: $u_l = u, \quad u_q = 0 \quad \forall q = \overline{1, l-1}$.
$\curvearrowright$ $|||u|||^2 \overset{=}{\le} a(u,u)$ $\curvearrowright$ $\lambda_{\min}(P) \overset{=}{\ge} 1/1 = 1$ (Folgerung 6.5)

■ **Bemerkung 6.9:**

1. Nr. 1 (exakt) $\longmapsto$ Nr. 2 (inexakt),

   $a(\cdot,\cdot)|_{\mathbf{V}_q} \quad \rightsquigarrow \quad b_s(\cdot,\cdot) = 2^{2(q-1)}(\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}|_{\mathbf{V}_q}$,

   $O(l) \quad \longmapsto \quad O(1)$

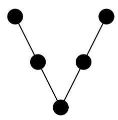
   Vgl. auch Satz 6.7 und Satz 6.8 !

2. Für Nr. 3 – 4 ($\dim \mathbf{V}_{q,i} = 1$) gilt:

$$
\tilde{P}u = \sum_{q=1}^{l} \sum_{i\in\omega_q} \underbrace{\Phi V_{q,i}}_{=:\,\varphi_q^{(i)}} \frac{a(u,\Phi V_{q,i})}{b_{q,i}(\Phi V_{q,i},\Phi V_{q,i})} = \sum_{q=1}^{l} \sum_{i\in\omega_q} \frac{a(u,\varphi_q^{(i)})}{b_{q,i}(\varphi_q^{(i)},\varphi_q^{(i)})}\varphi_q^{(i)},
$$

$$
\Phi \updownarrow
$$

$$
\underset{\underline{\tilde{P}(u-u^j)}}{\underline{\tilde{P}u}} = \sum_{q=1}^{l} \sum_{i\in\omega_q} \frac{1}{b_{q,i}(\varphi_q^{(i)},\varphi_q^{(i)})} V_{q,i} V_{q,i}^T \underbrace{K\underline{u}}_{\substack{\downarrow \\ \underline{d}^j := \underline{f} - K\underline{u}^j}}
$$



(V–Zyklus)

(Präkonditionierungsgleichung)

3. In Oswald [33] findet der Leser eine Zusammenstellung der wichtigsten theoretischen Resultate zur Multilevel-FE–Approximation.

4. M. Griebel entwickelte in [12] einen verblüffend einfachen Zugang zur Multilevel–Präkonditionierung über die Betrachtung der „Multilevel–Basis“ als erzeugendes System und gibt eine Reihe praktisch wertvoller Hinweise zur Realisierung.

Literaturverzeichnis

[1] J.H. Argyris. Energy theorems and structural analysis. *Aircraft Engng.*, 27:125–154, 1955.

[2] O. Axelsson. *Iterative Solution Methods.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[3] I. Babuška. Courant element: Before and after. In M. Krizek, P. Neittaanmaki, and R. Stenberg, editors, *Finite Element Methods: Fifty years of the Courant Element*, pages 37–51. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1994. Jyvaskyla, September 1993.

[4] R. E. Bank and R. Rose. Some error estimates for the box method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(4):777–787, 1987.

[5] D. Braess. *Finite Elemente.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1992.

[6] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, and J. Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comput.*, 55:1–22, 1990.

[7] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multiplier. *RAIRO Anal. Numr.*, 8:129–151, 1974.

[8] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite elemente methods.* Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1991.

[9] P. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - Oxford, 1978.

[10] P. G. Ciarlet and P. A. Raviart. A mixed finite element method for the biharmonic equation. In *Proceedings of a Symposium on Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, (de Boor, ed.)*, pages 125–145, New York, 1974. Academic Press.

[11] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math.*, 49:1–23, 1943.

[12] M. Griebel. *Multilevelmethoden als Iterationsverfahren über Erzeugendensystemen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[13] Ch. Großmann and H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

[14] W. Hackbusch. *Multigrid Methods and Applications.* Springer–Verlag, Berlin, 1985.

[15] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1986.

[16] W. Hackbusch. On first and second order box schemes. *Computing*, 41:277–296, 1989.

[17] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[18] B. Heinrich. *Finite difference methods on irregular networks.* Akademie–Verlag, Berlin, 1987.

[19] C. Johnson and Mercier B. Some equilibrium finite element methods for two-dimensional elasticity problems. *Numerische Mathematik*, 30:103–116, 1978.

[20] M. Jung and U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung FEM (Eine Einführung für Ingenieurstudenten).* TU Chemnitz (Fakultät für Mathematik) und Johannes Kepler Universität (Institut für Mathematik), Chemnitz und Linz, 1993.

[21] F. Kickinger. Automatic mesh generation for 3d objects. Technical Report 96-1, Johannes Kepler Universität, 1996.

[22] N. Kikuchi. *Finite Element Method in Mechanics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[23] V.G. Korneev and U. Langer. *Approximate Solution of Plastic Flow Theory Problems.* B.G. Teubner, Leipzig, 1984.

[24] O.A. Ladyschenskaja and N.N. Uralzeva. *Lineare und quasilineare Gleichungen vom elliptischen Typ.* Nauka, Moskau, 1973. (in Russisch).

[25] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung MULTIGRID – METHODEN.* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[26] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK I (Operatorgleichungen).* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[27] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung „Domain Decomposition“.* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1997.

[28] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK III (AWA, ARWA).* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1997.

[29] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung „Numerische Festkörpermechanik“.* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1997.

[30] F. Liebau. Analyse einer Finiten-Volumen-Methode mit quadratischen ansatzfunktionen. Dissertation, Universität Kiel, 1992.

[31] P. L. Lions. On the Schwarz alternating method I,II,III. In R. Glowinski, G. H. Golub, G. A. Meurant, and J. Périaux, editors, *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 1–42, Philadelphia, 1988. SIAM. Paris, January 1987.

[32] J. A. Nitsche. Ein Kriterium für die Quasioptimalität des Ritzschen Verfahrens. *Numerische Mathematik*, 11:346–348, 1968.

[33] P. Oswald. *Multilevel Finite Element Approximation*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[34] J. Schöberl. An automatic mesh generator using geometrical rules for two and three space dimensions. Technical Report 95-3, Johannes Kepler Universität, 1995.

[35] H.R. Schwarz. *FORTRAN–Programme zur Methode der finiten Elemente*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[36] H.R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[37] J.W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Springer, New York, 1995.

[38] M. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, and L.J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronaut. Sci.*, 23:805–823, 1956.

[39] H. Yserentant. On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49(4):379–412, 1986.

[40] X. Zhang. Multilevel Schwarz methods. *Numer. Math.*, 63:521–539, 1992.

Anhang A

Praktikum

“Rechentechnische Realisierung der Methode
der finiten Elemente (FEM)“

(Gundolf Haase)

zur Vorlesung “Numerik II (Randwertprobleme)“