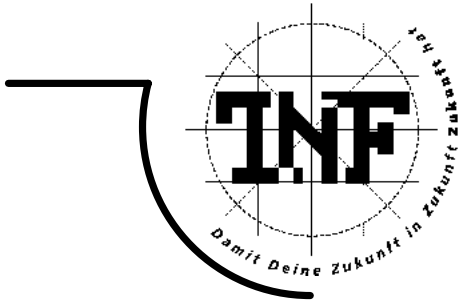




JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

Netzwerk für Forschung, Lehre und Praxis



Optimale Steuerung von Rüst- und Produktionsprozessen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTOR DER NATURWISSENSCHAFTEN

Angefertigt am *Institut für Numerische Mathematik*

Betreuung:

A. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Helmut Gfrerer

O. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Richard F. Hartl

Eingereicht von:

Mag. Sonja Reitner

Steyr, Juli 2007

KURZZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird ein kontinuierliches Modell für die Planung und Steuerung von Rüst- und Produktionsprozessen entwickelt.

Es wird dabei eine Maschine betrachtet, an der mehrere Produkte gefertigt werden. Für einen bestimmten Planungshorizont ist der Bedarf für alle Produkte vorgegeben. Die Produktionsstart- und -endzeitpunkte sollen für jedes Produkt so bestimmt werden, dass die entstehenden Kosten (Summe aus Rüst- und Lagerkosten) minimal sind und gewisse Restriktionen eingehalten werden. Es muss zwischen dem Produktionsende eines Produkts und dem Produktionsbeginn des darauf folgenden Produkts genügend Zeit für den Umrüstprozess an der Maschine vorhanden sein, es dürfen nicht zwei Produkte gleichzeitig produziert werden, die Produktionsrate ist für jedes Produkt nach oben beschränkt und der Lagerstand darf für kein Produkt im gesamten Planungszeitraum negativ werden.

Zuerst erfolgt ein Überblick über die wichtigsten in der Literatur bekannten Modelle, die sich mit der optimalen Entscheidungsfindung in Produktionsprozessen beschäftigen. Als mathematische Grundlage dient vor allem die Kontrolltheorie, deren zentraler Satz – das Maximumprinzip – formuliert und auch vollständig bewiesen wird.

Dann wird mit Hilfe des Maximumprinzips für Probleme mit Zustandsbeschränkungen die Struktur einer optimalen Lösung bei gegebener Abfolge von Produktionslosen bestimmt. Ist diese Struktur bekannt, so können die optimalen Zeitpunkte mit Hilfe eines Solvers (Optimierungstoolbox in *MATLAB*) bestimmt werden.

Weiters wird ein Algorithmus zur Konstruktion einer Startlösung entwickelt, mit dem für eine Vielzahl von Beispielen eine zulässige Lösung gefunden werden kann. Ausgehend von dieser Startlösung wird dann die Losreihenfolge optimiert. Dazu werden heuristische Optimierungsverfahren, wie die Best-First-Suche und die Tabu-Suche verwendet.

Abschließend wird das beschriebene Lösungsverfahren an zwei Beispielserien getestet und mit einem Modell (IZKS-Modell), das an der Fachhochschule Steyr im Rahmen eines Forschungsprojekts entwickelt wurde, verglichen. Der in dieser Arbeit entwickelte Algorithmus liefert Großteils bessere Lösungen als das IZKS-Modell, er ist allerdings bei Beispielen mit vielen Produktionslosen bei der Rechenzeit im Nachteil.

ABSTRACT

In this work a continuous lot sizing and sequencing model is developed. The model deals with a single-machine, multi-item production system. In a finite planning horizon the dynamic demand is fixed for each product type.

Start and finishing times for production are determined so that certain restrictions are fulfilled and the resulting holding and setup costs are minimised. Setup times are included, at any one time only one type of activity (setup or production) can be performed, the production rate has an upper bound for each product type and backlog is not allowed.

First a literature review of the most important lot sizing and sequencing models is given. Optimal control theory is taken as the mathematical basis. The fundamental theorem of optimal control – the maximum principle – is formulated and fully proved.

If the sequence of production lots is fixed, the structure of an optimal solution can be characterised with the help of the maximum principle for problems with state constraints. For a known structure, a standard solver (optimization toolbox of *MATLAB*) is capable of finding the optimal start and finishing times for all production lots.

A start algorithm, which finds an admissible solution for numerous problems, is developed. Based on this start solution, the sequence of the production lots can be improved with heuristic search procedures such as Best First Search and Tabu Search.

The work concludes with the results of some test instances. The results of the presented solution approach are compared to another approach – the IZKS model – which was developed within a research project at the University of Applied Sciences in Steyr.

In large parts the presented algorithm yields better solutions concerning the objective function but the calculation times of examples with numerous production lots is a good deal bigger.

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung.....	3
1.1	Problembeschreibung	3
1.2	Integration in PPS-Systeme.....	4
2	Überblick über bestehende Modelle.....	6
2.1	Bezeichnungen	7
2.2	Einprodukt-Modelle	7
2.3	Mehrprodukt-Modelle	12
2.4	Kontrolltheoretische Modelle.....	17
2.5	Zusammenfassung	23
3	Kontrolltheoretische Grundlagen	27
3.1	Vorbereitende Definitionen und Aussagen	27
3.2	Optimale Steuerung mit Zustandsbeschränkungen	47
4	Modellierung von Rüsten und Produktion.....	63
4.1	Annahmen und Bezeichnungen.....	63
4.2	Modellentwicklung.....	65
5	Optimale Lösungen bei gegebener Losreihenfolge	70
5.1	Teilproblem 1: Produktion	70
5.2	Teilproblem 2: Rüsten	76
5.3	Mögliche Zustände und deren Synthese.....	80
5.4	Umformulierung des Grundmodells.....	86
5.5	Lösung von Optimierungsproblemen in <i>MATLAB</i>	92
5.6	Testbeispiele bei gegebener Losreihenfolge	94
6	Optimierung der Losreihenfolge	99
6.1	Startalgorithmus	99
6.2	Reihenfolgemanipulationen.....	102

6.3	Best-First-Suche	105
6.4	Modifizierte Best-First-Suche	106
6.5	Tabu-Suche.....	107
7	Testbeispiele	108
7.1	Beschreibung der Testumgebung	108
7.2	Vergleich der Optimierungsalgorithmen.....	109
7.3	Vergleich zu IZKS.....	111
8	Literaturverzeichnis	115
9	Anhang.....	119
9.1	Daten für die Beispiele 3 – 10	119
9.2	Daten für die Beispiele 6+ - 10+	125
9.3	Lebenslauf	129
9.4	Eidesstattliche Erklärung.....	131

1 EINLEITUNG

1.1 PROBLEMBESCHREIBUNG

In der Produktionsplanung und -steuerung werden Modelle benötigt, die aufgrund eines vorgegebenen Bedarfs bestimmen, zu welchen Zeitpunkten und in welchen Losgrößen verschiedene Produkte an einer Maschine gefertigt werden. Dabei soll nicht nur ein machbarer Produktionsplan erstellt werden, sondern ein aufgrund einer Kostenbewertung möglichst guter Produktionsplan. Bei den Kosten können Fertigungs-, Lager- und Rüstkosten berücksichtigt werden.

In der Literatur gibt es eine Vielzahl von Produktionsmodellen, die sich in ihrer Komplexität und Lösbarkeit unterscheiden. Je einfacher und leichter lösbar die Modelle sind, desto geringer ist die Anwendbarkeit dieser Modelle.

Im Rahmen des dreijährigen Forschungsprojektes „Produktionsoptimierung“, das an der Fachhochschule Steyr gemeinsam mit vier Industriepartnern abgewickelt wurde, ergaben sich konkrete Problemstellungen, bei denen ein praxisnahes Optimierungsmodell zur Planung und Steuerung die entstehenden Lager- und Rüstkosten erheblich senken könnte.

Ziel dieser Arbeit ist es zunächst in Kapitel 2 einen Überblick über bestehende Modelle zur Bestimmung von Losgrößen und Einlastungszeitpunkten zu geben und dann in Kapitel 4 ein kontinuierliches Produktionsmodell zu entwickeln, das den Anforderungen für einen Praxiseinsatz gerecht wird. Dazu gehören die Modellierung von Rüstprozessen, ein dynamischer Bedarf und die Einhaltung von Kapazitätsrestriktionen. Der in vielen Modellen mögliche Lieferverzug wird in dem entwickelten Modell nicht erlaubt.

Diese Arbeit beschränkt sich auf rein deterministische Modelle, da angenommen wird, dass der Bedarf in einem gewissen Planungshorizont fixiert ist und andere zufällige Einflüsse, wie Maschinenstörungen, Produktion von Ausschuss usw. durch Sicherheitsbestände abgedeckt werden. Auf die Diskussion zur Bestimmung von optimalen Sicherheitsbeständen wird nicht eingegangen.

Für die Analyse des entwickelten Modells wird als mathematisches Werkzeug die Kontrolltheorie verwendet. Ein zentraler Satz der Kontrolltheorie – das Maximumprinzip für Aufgaben mit Zustandsbeschränkungen – wird in Kapitel 3 formuliert und bewiesen. Mit Hilfe des Maximumprinzips kann die optimale Struktur einer Lösung beschrieben werden

und für eine vorgegebene Abfolge von Produktionslosen mit Hilfe der Optimierungstoolbox in *MATLAB* berechnet werden (siehe Kapitel 5).

Mit der Optimierung der Losreihenfolge mittels heuristischer Verfahren beschäftigt sich Kapitel 6. Den Abschluss bildet Kapitel 7 mit der Auswertung einer Reihe von Testbeispielen.

1.2 INTEGRATION IN PPS-SYSTEME

Die Entwicklung von neuen Produktionsmodellen erfordert auch die Möglichkeit der Integration in bestehende Produktionsplanung und -steuerungssysteme (PPS-Systeme). Zwei Ansätze dazu werden im Folgenden kurz umrissen:

1.2.1 TOC

Die Ideen der Theory of Constraints (TOC) stammen von Goldratt und Cox (siehe [10], [11]). Eine zentrale Rolle dieser Theorie spielt der kapazitive Hauptengpass eines Unternehmens. Ein Unternehmen kann maximal jene Menge produzieren, die der Engpass zulässt. Daher muss der Engpass die zur Verfügung stehende Zeit optimal nutzen. Die Umsetzung der TOC-Philosophie passiert in fünf Schritten (siehe [10], [12]):

1. Identifiziere den Engpass.
2. Nutze den Engpass aus.
3. Ordne alles andere dem Engpass unter.
4. Erhöhe die Engpasskapazität.
5. Gehe zu Schritt 1, falls das Kapazitätsproblem des alten Engpasses gelöst ist.

Für den Engpass in Schritt 2 wird in der Literatur (siehe [35]) vorgeschlagen, Aufträge so lange zusammenzufassen, bis durch die Einsparung von Rüstzeiten ein realisierbarer Produktionsplan entsteht. Die Ausnutzung des Engpasses könnte durch den Einsatz von optimierenden Verfahren weiter verbessert werden. Es ist daher ausreichend ein Modell für eine Maschine zu betrachten, da dann dieses Modell auf die Engpassmaschine angewendet werden kann.

1.2.2 APS

Advanced Planning Systems (APS) versuchen die bestehenden Defizite von PPS-Systemen weiter auszumerzen, indem mehrere ergänzende Softwaremodule angeboten

werden (siehe [26]). Dazu gehören u. a. Module zur Absatzplanung, Transportplanung, Produktionsgrob- und Feinplanung (Production Scheduling). In der Produktionsfeinplanung werden unter Einbeziehung von Kapazitätsrestriktionen und dem Einsatz von heuristischen Optimierungsverfahren, wie genetische Algorithmen und Simulated Annealing, Produktionspläne erstellt. Als Zielfunktion kann eine Kombination aus totaler Durchlaufzeit, Rüstkosten, Rüstzeiten, Verspätungskosten und Betriebskosten definiert werden.

Software zu APS bietet aber auch die Möglichkeit eigene Optimierungsalgorithmen oder Heuristiken zu schreiben und in das Programm einzubinden.

2 ÜBERBLICK ÜBER BESTEHENDE MODELLE

In diesem Kapitel werden die wichtigsten mathematischen Modelle vorgestellt, die sich mit der optimalen Entscheidungsfindung in Produktionsprozessen beschäftigen. Sie geben, unter verschiedenen Annahmen und Restriktionen, Antwort auf die Frage wie viel von einem Produkt (Losgröße) zu welchem Zeitpunkt produziert werden soll, damit eine bestimmte Zielgröße optimal wird. Die Modelle können charakterisiert werden durch

- Modellierung der Zeit (stetig – diskret, endlich – unendlich)
- Anzahl der Fertigungsstufen
- Anzahl der Produkte
- Bedarf (konstant – dynamisch, stetig – diskret)
- Lieferverzug (erlaubt oder nicht erlaubt)
- Modellierung von Rüstzeiten und Rüstkosten
- Produktionskapazität (beschränkt – unbeschränkt)
- Optimierungsparameter

Optimiert werden in allen vorgestellten Modellen die entstehenden Kosten. Dazu gehören Lagerkosten, Rüstkosten und Fertigungskosten. Fertigungskosten werden nur dann ins Zielfunktional aufgenommen werden, wenn sie pro Mengeneinheit nicht konstant sind.

In dieser Arbeit werden rein deterministische Modelle vorgestellt, stochastische Einflüsse, z. B. auf den Bedarf, werden negiert. Der Überblick beginnt mit den historisch ersten Modellen, die sich auf ein Produkt und eine Maschine beschränken (EOQ, EPL, Wagner-Whitin-Modell). Aus diesen Grundmodellen entwickelten sich komplexere Modelle, die mehrere Maschinen und Produkte zulassen (ELSP, CLSP, CSLP, DSLP, ...).

Parallel zur Entwicklung von zeitdiskreten Modellen wurden kontinuierliche Modelle entwickelt, die mit den Methoden der Kontrolltheorie analysiert werden können. Dazu gehören unter anderem das HMMS-Modell und die Modelle von Khmelnitsky, Kogan und Maimon. Zum Abschluss dieses Kapitels werden alle vorgestellten Modelle nochmals kurz zusammengefasst und gegenübergestellt.

2.1 BEZEICHNUNGEN

In den beschriebenen Modellen werden die unten aufgelisteten Bezeichnungen verwendet. Ob die Größen Vektoren oder skalare Größen sind, hängt vom jeweiligen Modell ab und wird später noch genauer definiert.

n	Anzahl der Produkte
t	Zeit in ZE oder Zeitperiode
ME	Mengeneinheit
GE	Geldeinheit
ZE	Zeiteinheit
$d(t)$	Bedarfsrate zum Zeitpunkt t in ME/ZE
$y(t)$	Lagerstand zum Zeitpunkt t in ME
$x(t)$	Produktionsrate zum Zeitpunkt t in ME/ZE
c	Produktionskapazität in ME/ZE
k_l	Lagerkosten in GE/(ME·ZE)
k_s	Rüstkosten in GE
k_p	Produktionskosten in GE/ME
K	Gesamtkosten in GE
q	Losgröße in ME

2.2 EINPRODUKT-MODELLE

In diesem Abschnitt sind die ersten einfachen Modelle zur Losgrößenbestimmung zusammengefasst. Sie haben gemeinsam, dass nur ein Produkt betrachtet wird bzw. bei mehreren Produkten kann jedes Produkt isoliert behandelt werden. Unterschiede gibt es in den Annahmen zur Produktionskapazität und zum Bedarf.

2.2.1 EOQ-MODELL (ECONOMIC ORDER QUANTITY)

Dieses Modell war das erste Modell zur Losgrößenbestimmung und wurde von Ford W. Harris 1913 entwickelt (siehe [15]). In der deutschsprachigen Literatur wird dafür auch die Bezeichnung Losgrößenformel von Amler verwendet.

Dabei werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Zeitachse wird als stetig und unendlich betrachtet.
- Verschiedene Produkte können isoliert betrachtet werden.
- Die Fertigung der Produkte ist einstufig.
- Die Nachfrage ist bekannt und zeitlich konstant ($d(t) = d$).
- Lieferverzug ist nicht erlaubt.
- Es gibt keine Kapazitätsbeschränkung, das gesamte Los wird auf einmal produziert und ist sofort verfügbar.
- Bei der Produktion eines Loses entstehen Rüstkosten, die von der Losgröße unabhängig sind.

Durch die getroffenen Annahmen entsteht für ein Produkt ein charakteristischer Lagerverlauf, der in Abbildung 2.1 dargestellt ist.

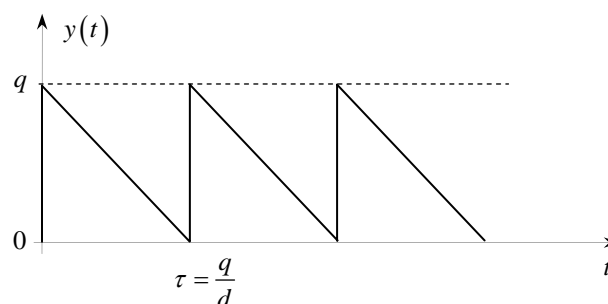


Abbildung 2.1 Lagerverlauf beim EOQ-Modell

Ziel ist es, die Gesamtkosten pro Zeiteinheit zu minimieren. Bei den Gesamtkosten werden Rüst- und Lagerkosten berücksichtigt.

$$\frac{K}{\tau} = \frac{k_s + k_l \frac{q^2}{2d}}{\frac{q}{d}} = \frac{k_s d}{q} + \frac{k_l q}{2} \rightarrow \text{Min.} \quad (2.1)$$

Mit Hilfe der Differentialrechnung ergibt sich als optimale Losgröße für dieses Modell

$$q = \sqrt{\frac{2k_s d}{k_l}}. \quad (2.2)$$

Mit dieser Losgröße stellt sich ein Gleichgewicht von Rüst- und Lagerkosten in einer Periode τ ein.

2.2.2 EPL-MODELL (ECONOMIC PRODUCTION LOT)

Das EOQ-Modell wurde von Taft 1918 (siehe [40]) erweitert, indem er eine endliche aber konstante Produktionsrate annahm. Ansonsten gelten dieselben Annahmen wie bei dem Modell von Harris. Die Produktionsrate muss dabei größer sein als die Bedarfsrate, damit der Bedarf überhaupt gedeckt werden kann. Der Lagerverlauf für dieses Modell ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Ziel des EPL-Modells ist ebenfalls die Minimierung der Rüst- und Lagerkosten pro Zeiteinheit. Die optimale Losgröße kann mittels Differentialrechnung bestimmt werden und lautet

$$q = \sqrt{\frac{2k_s d}{k_I \left(1 - \frac{d}{c}\right)}}. \tag{2.3}$$

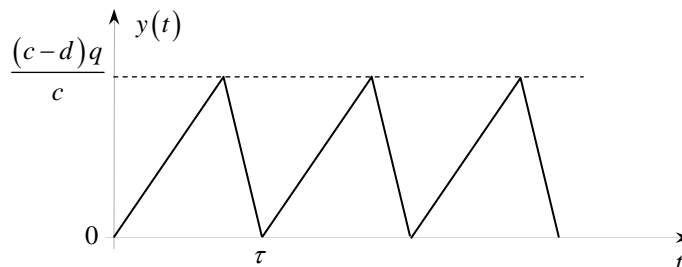


Abbildung 2.2 Lagerverlauf beim EPL-Modell

2.2.3 WAGNER-WHITIN-MODELL

Wagner und Whitin entwickelten 1958 ein Modell, bei dem gegenüber dem EOQ-Modell der Bedarf nicht konstant sein muss (siehe [43]). Die Annahmen dieses Modells sind:

- Die Zeitachse wird in diskrete Zeitperioden eingeteilt ($t = 1, \dots, T$).
- Verschiedene Produkte können isoliert betrachtet werden.
- Die Fertigung der Produkte ist einstufig.

- Der Bedarf ist bekannt und kann dynamisch sein, d. h. er kann in jeder Zeitperioden einen anderen Wert annehmen.
- Lieferverzug ist nicht erlaubt.
- Es gibt keine Kapazitätsbeschränkung, das gesamte Los wird auf einmal produziert und ist sofort verfügbar.
- Wird in einer Periode ein Los aufgelegt, so entstehen Rüstkosten, die von der Losgröße unabhängig sind. Die Rüstkosten können aber von Periode zu Periode variieren.

Ziel ist es, in den betrachteten T Zeitperioden die Gesamtkosten, bestehend aus Rüstkosten und Lagerkosten zu minimieren. Im Grundmodell werden lineare Lagerkosten angenommen und als Zielfunktional ergibt sich damit

$$K = \sum_{t=1}^T k_s(t) \delta(q(t)) + k_l y(t) \rightarrow \text{Min.}, \quad (2.4)$$

wobei $\delta(q(t)) \in \{0,1\}$ eine binäre Rüstvariable ist und angibt, ob in einer Periode t ein Los $q(t)$ aufgelegt wird oder nicht. Der Lagerstand kann mit Hilfe der Lagerbilanzgleichung berechnet werden:

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t-1) + q(t) - d(t) \\ y(0) &= y(T) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die produzierten Losgrößen dürfen ebenso wie der Lagerstand nie negativ sein:

$$q(t) \geq 0, y(t) \geq 0. \quad (2.6)$$

Für die optimale Lösung dieses Modells kann, konkave Kostenfunktionen im Zielfunktional vorausgesetzt, gezeigt werden, dass in jeder Zeitperiode die so genannte „Zero inventory property“ gilt:

$$y(t-1)q(t) = 0. \quad (2.7)$$

Die „Zero inventory property“ besagt, dass erst wieder produziert wird, wenn der Lagerstand 0 ist. Die Losgröße in einer Periode ist daher entweder 0 oder die Summe von folgenden Periodenbedarfswerten. Diese Eigenschaft wird bei der Konstruktion von Lösungen ausgenutzt.

Das Wagner-Whitin Modell kann mit verschiedenen Algorithmen gelöst werden, die entweder optimale Lösungen oder Näherungslösungen liefern. Ein Ansatz zur exakten Lösung ist die dynamische Optimierung („dynamic programming“). Die gebräuchlichsten Näherungsverfahren werden im Folgenden beschrieben (siehe [41], [44]):

LUC (least unit cost)

Die Bedarfe von aufeinanderfolgenden Perioden werden so lange zusammengefasst, bis minimale Stückkosten erreicht werden.

PPB (part period balancing)

Die Bedarfe von aufeinanderfolgenden Perioden werden so lange zusammengefasst, bis annähernd ein Gleichgewicht zwischen Rüst- und Lagerkosten erreicht wird.

Silver-Meal-Verfahren

Die Bedarfe von aufeinanderfolgenden Perioden werden so lange zusammengefasst, bis die durchschnittlichen Kosten/ZE minimal sind.

Grenzkostenverfahren von Groff

Die Bedarfe von aufeinanderfolgenden Perioden werden so lange zusammengefasst, bis die marginale Verringerung der durchschnittlichen Rüstkosten pro Periode gleich dem marginalen Anstieg der durchschnittlichen Lagerkosten pro Periode ist. Näherungsweise

Losgrößen-Saving-Verfahren

Das Saving-Verfahren der Tourenplanung wird auf das Losgrößenproblem angewandt. Die einzelnen Zeitperioden (1, 2, 3,...) werden als Knoten dargestellt. Zusätzlich wird noch ein zentraler Knoten (0) eingerichtet. Die Kanten werden mit Kosten bewertet (Kante von 0 zu Knoten i mit Rüstkosten, Kante von $i \rightarrow i+1$ mit den Lagerkosten, die entstehen, wenn eine Mengeneinheit am Ende der Periode i bis zur Periode $i+1$ gelagert wird.

Für jede Zusammenlegung von zwei benachbarten Knoten (Losbildung) wird dann der Savingswert (Kostensparnis) berechnet. Ausgehend von einer Startlösung (in jeder Periode wird produziert) werden schrittweise die beiden Knoten mit dem größten Savingswert zusammengefasst, bis es keine positiven Savingswerte mehr gibt.

2.3 MEHRPRODUKT-MODELLE

Die Modelle in diesem Abschnitt tragen den Anforderungen der Praxis Rechnung, indem mehrere Produkte auf einer Maschine betrachtet werden, deren Produktionskapazität beschränkt ist. Das hat zur Folge, dass die Produkte nicht mehr voneinander isoliert betrachtet werden können und damit die Lösung der formulierten Probleme um einiges komplexer wird.

2.3.1 ELSP-MODELL (ECONOMIC LOTSIZING AND SCHEDULING PROBLEM)

Dieses Modell ist die Erweiterung des EPL-Modells auf mehrere Produkte (siehe [34]). Es gelten daher folgende Annahmen

- Die Zeitachse wird als stetig und unendlich betrachtet.
- Es werden mehrere Produkte gefertigt.
- Es kann zu einem Zeitpunkt immer nur ein Produkt gefertigt werden.
- Die Fertigung der Produkte ist einstufig.
- Die Nachfrage ist bekannt und zeitlich konstant.
- Lieferverzug ist nicht erlaubt.
- Die Produktionsrate c ist eine bekannte, endliche, konstante Größe.
- Bei der Produktion eines Loses entstehen Rüstkosten, die von der Losgröße unabhängig sind.

Der Bedarf $d(t) = d$, die Rüstkosten k_s , die Lagerkosten k_l und die Produktionskapazität c sind in diesem Modell n -dimensionale Vektoren, wobei sich die i -te Komponente auf das i -te Produkt bezieht. Da der Bedarf konstant ist und ein unendlicher Zeitraum betrachtet wird, wird ein zyklischer Fertigungsplan bestimmt. Für jedes Produkt i wird durch dieses Modell eine Periodendauer T_i („cycle time“) bestimmt, die angibt in welchen Zeitabständen ein Los dieses Produkts aufgelegt wird. Die Losgröße ergibt sich dann automatisch aus dem vorgegebenen Bedarf.

Ziel ist es, den Bedarf ohne Lieferverzug zu decken und die entstehenden Rüst- und Lagerkosten pro Zeiteinheit zu minimieren. Das Zielfunktional lautet daher

$$\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{T_i} = \sum_{i=1}^n \frac{k_{s_i}}{T_i} + \frac{k_{l_i} d_i (c_i - d_i) T_i}{2c_i} \rightarrow \text{Min.} \quad (2.8)$$

Die Lösung dieses allgemeinen Problems ist NP-hard. Grundsätzlich gibt es zwei Lösungsansätze für dieses Modell.

- Aufsuchen einer analytischen optimalen Lösung mit zusätzlichen Annahmen, wie z. B. $T_1 = T_2 = \dots = T_n = T_C$ („common cycle approach“) oder $T_i = n_i T_C$ („basic period approach“).
- Aufsuchen von akzeptablen Lösungen für das ursprüngliche Problem mit heuristischen Ansätzen.

Für den „common cycle approach“ leitete Hanssmann in [14] die optimale Lösung analytische ab. Die gemeinsame Periodendauer in diesem Modell erhält man mit der Formel

$$T_C = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^n k_{Si}}{\sum_{i=1}^n k_{it} d_i \left(1 - \frac{d_i}{c_i}\right)}} \quad (2.9)$$

Segerstedt beschreibt in [37] einen heuristischen Ansatz zur Lösung des ELSP-Modells mit Rüstzeiten, wobei er sich auf einen endlichen Zeitraum einschränkt und für jedes Produkt einen Anfangslagerstand vorgibt.

Jensen und Khouja erweitern in [21] das ELSP-Modell zum ELDSP-Modell (Economic Lot and delivery scheduling problem). Sie betrachten eine Maschine, die mehrere Komponenten fertigt, dann transportiert werden und auf einer anderen Anlage zusammengebaut werden. Dadurch ergeben sich zusätzlich Transportkosten für das Zielfunktional. Für dieses Modell, das auch Rüstzeiten in Betracht zieht, wird durch den angegebenen Algorithmus die optimale Lösung mit dem „common cycle approach“ bestimmt.

Giri und Moon behandeln in [8] zwei Variationen des ELSP-Modells mit Rüstzeiten und Stillstandskosten. Einmal wird eine fixe Produktionsrate angenommen und die Produktionsreihenfolge heuristisch festgelegt. Für die fixierte Reihenfolge wird dann die optimale Lösung berechnet. Die zweite Variation lässt flexible Produktionsraten zu und ergänzt die Zielfunktion mit Produktionskosten, die von den Produktionsraten abhängen. Für dieses Modell wird der „common cycle approach“ untersucht.

Soman, Van Donk und Gaalman untersuchen in [39] das ELSP-Modell mit Rüstzeiten und beschränkter Haltbarkeitsdauer der Produkte. Sie verwenden den „basic period approach“ für ihren Algorithmus.

2.3.2 CLSP-MODELL (CAPACITATED LOTSIZING PROBLEM)

Dieses Modell ist die Erweiterung des Wagner-Whitin-Modells auf mehrere Produkte (siehe [34]). Es gelten daher folgende Annahmen:

- Die Zeitachse wird in diskrete Zeitperioden eingeteilt ($t = 1, \dots, T$).
- Die Fertigung der Produkte ist einstufig.
- Der Bedarf ist bekannt und kann dynamisch sein.
- Lieferverzug ist nicht erlaubt.
- In einer Zeitperiode können mehrere Produkte gefertigt werden.
- Die zur Verfügung stehende Produktionskapazität C_t in einer Zeitperiode ist beschränkt.
- Wenn in einer Zeitperiode ein Produkt gefertigt wird, so entstehen Rüstkosten, die von der Losgröße unabhängig sind.

Ziel ist es, den Bedarf zu decken und die Summe aus Rüst-, Produktions- und Lagerkosten zu minimieren.

$$K = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (k_{s_i} \delta_i(t) + k_{l_i} y_i(t) + k_{p_i}(t) q_i(t)) \rightarrow \text{Min.} \quad (2.10)$$

wobei $\delta_i(q_i(t)) \in \{0,1\}$ eine binäre Rüstvariable ist und angibt, ob in einer Periode t ein Los $q_i(t)$ von Produkt i aufgelegt wird oder nicht. Der Lagerstand kann mit Hilfe der Lagerbilanzgleichung berechnet werden:

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t-1) + q(t) - d(t) \\ y(0) &= y(T) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die benötigte Kapazität in Periode t darf die vorhandene Kapazität C_t nicht übersteigen:

$$\sum_{i=1}^n c_i q_i(t) \leq C_t \quad (2.12)$$

Ein Produkt kann nur dann in einer Zeitperiode gefertigt werden, wenn auch gerüstet wird. Die maximale Losgröße ist der kumulierte Bedarf bis zum Ende des Betrachtungszeitraums.

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : q_i(t) \leq \left(\sum_{\tau=t}^T d_i(\tau) \right) \delta_i(t) \quad (2.13)$$

Die produzierten Losgrößen dürfen ebenso wie der Lagerstand nie negativ sein:

$$q(t), y(t) \geq 0 \quad (2.14)$$

Dieses Problem ist bereits für ein Produkt NP-hard. Mit vereinfachenden Annahmen kann es aber mit Hilfe der dynamischen Optimierung gelöst werden. Für mehrere Produkte werden heuristische Ansätze verwendet.

2.3.3 CSLP-MODELL (CONTINUOUS SETUP LOTSIZING PROBLEM)

Basierend auf dem CLSP-Modell werden im CSLP-Modell (siehe [34]) zwei Annahmen abgeändert:

- Rüstkosten entstehen nur zu Beginn einer Losproduktion und nicht in jeder Periode, in der produziert wird.
- In einer Periode kann nur ein Produkt produziert werden.

Für die Gesamtkosten im Zielfunktionale ergibt sich damit

$$K = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left(k_{s_i} \max(0, \delta_i(t) - \delta_i(t-1)) + k_{r_i} y_i(t) + k_{p_i}(t) q_i(t) \right) \rightarrow \text{Min.} \quad (2.15)$$

wobei $\delta_i(q_i(t)) \in \{0,1\}$ eine binäre Rüstvariable ist und angibt, ob in einer Periode t ein Los $q_i(t)$ von Produkt i aufgelegt wird oder nicht. Der Lagerstand wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t-1) + q(t) - d(t) \\ y(0) &= y(T) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die benötigte Kapazität in Periode t darf die vorhandene Kapazität C_t nicht übersteigen:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : c_i q_i(t) \leq C_t \delta_i(t) \quad (2.17)$$

In einer Periode wird maximal ein Produkt gefertigt:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i(t) \leq 1 \quad (2.18)$$

Für Losgrößen und Lagerstand gelten Nichtnegativitätsbeschränkungen:

$$q(t), y(t) \geq 0 \tag{2.19}$$

Auch das CSLP-Modell ist für ein Produkt NP-hard. Ein exakter Algorithmus für ein Produkt basierend auf der Relaxation der Kapazitätsbeschränkung wird von Karmarkar et al. in [23] vorgestellt. Für mehrere Produkte verwendeten Karmarkar und Schrage in [24] Heuristiken zur Lösung des Problems.

2.3.4 DLSP-MODELL (DISCRETE LOTSIZING AND SCHEDULING PROBLEM)

Das DLSP-Modell (siehe [34], [41]) basiert auf dem CSLP-Modell mit dem wesentlichen Unterschied, dass die Produktionsmenge in einer Periode entweder 0 ist oder der vollen Produktionskapazität entspricht. Man spricht daher auch von „all or nothing production“. Gegenüber dem CSLP-Modell wird also die Variable für die Losgröße $q_i(t)$ in Periode t eines Produkts i ersetzt durch $c_i \delta_i(t)$. Für die Gesamtkosten im Zielfunktionale ergibt sich damit

$$K = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (k_{S_i} \max(0, \delta_i(t) - \delta_i(t-1)) + k_{H_i} y_i(t) + k_{P_i}(t) c_i \delta_i(t)) \rightarrow \text{Min.} \tag{2.20}$$

mit der binären Rüstvariable $\delta_i(q_i(t)) \in \{0, 1\}$. Für den Lagerstand gilt:

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t-1) + q(t) - d(t) \\ y(0) &= y(T) = 0 \\ y(t) &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

In einer Periode wird maximal ein Produkt gefertigt:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i(t) \leq 1 \tag{2.22}$$

Dieses Modell wurde erstmals von Fleischmann in [5] formuliert und von ihm in [6] auf reihenfolgeabhängige Rüstkosten erweitert.

2.3.5 WEITERE MODELLE

Drexl und Haase schwächen in [3] die “all or nothing”-Annahme des DLSP-Modells ab, indem sie pro Zeitperiode die Produktion von maximal zwei Produkten zulassen. Für dieses **PLSP-Modell** (Proportional Lotsizing and Scheduling Problem) schlagen sie einen Lösungsansatz vor und vergleichen dieses Modell mit CSLP und DLSP. Haase erweitert in

[13] das PLSP um Rüstzeiten, reihenfolgeabhängige Rüstkosten, Überstunden, parallele Maschinen und Fehlmengen.

Das **GLSP-Modell** (General Lotsizing and Scheduling Problem) wurde von Fleischmann und Meyr in [7]. Dieses Modell untersucht eine Maschine mit beschränkter Kapazität, auf der mehrere Produkte gefertigt werden. Die Zeit wird dabei in fixe Makroperioden (z. B. Wochen oder Monate) eingeteilt, die dann in eine fixe Anzahl von Mikroperioden mit variabler Länge unterteilt werden. formuliert. Die Anzahl der Produkte, die in einer Makroperiode produziert werden ist im Gegensatz zu DLSP und PLSP nicht mehr beschränkt. In einem endlichen Planungszeitraum muss ein vorgegebener dynamischer Bedarf, der pro Makroperiode gegeben ist, ohne Lieferverzug gedeckt werden. Die entstehenden Rüst- und Lagerkosten sollen minimiert werden.

Meyr verallgemeinert das GLSP-Modell in [31] zum **GLSPST-Modell** (General Lotsizing and Scheduling Problem with Setup Times), wobei er reihenfolgeabhängige Rüstzeiten einführt. Der von Meyr vorgestellte Lösungsansatz besteht aus zwei Teilen. Zuerst wird die Rüstreihenfolge mittels „threshold accepting“ oder „simulated annealing“ festgelegt. Bei gegebener Reihenfolge wird im nächsten Schritt das dabei entstehende lineare Problem als „minimum cost network flow problem“ formuliert und mit einem dualen Algorithmus zur Reoptimierung bestimmt.

Rempala beschreibt in [33] ein Einmaschinenmodell mit mehreren Produkten, die mit variablen Produktionsraten produziert werden können. Der Bedarf ist zu diskreten Zeitpunkten vorgegeben und muss ohne Lieferverzug gedeckt werden. Das Zielfunktional minimiert Rüst- und Lagerkosten. Rüstzeiten werden nicht berücksichtigt.

2.4 KONTROLLTHEORETISCHE MODELLE

Viele Modelle zur Produktionsplanung und –steuerung beschäftigen sich mit der zeitlichen Entwicklung eines Systems, das durch verschiedene Größen (z. B. Lagerstand) beschrieben werden kann. Das System soll so durch Entscheidungen (z. B. Startzeitpunkte der Produktion, Losgrößenbildung) gesteuert werden, dass ein gewünschtes Ziel (z. B. minimale Kosten) erreicht wird. Dabei liegen im Normalfall mehrere Restriktionen vor, die bei der Entscheidungsfindung berücksichtigt werden müssen, wie z. B. die Beschränkung der Produktionskapazität. Wird die zeitliche Entwicklung des Systems kontinuierlich durch Differentialgleichungen beschrieben, so ist die Kontrolltheorie ein geeignetes Werkzeug, um solche Modelle zu analysieren.

Hier folgt ein Überblick über einige kontrolltheoretische Produktionsmodelle. Die Formulierung und der Beweis des Maximumprinzips der Kontrolltheorie für Aufgaben mit Zustandsbeschränkungen folgen im Kapitel 3.

2.4.1 HMMS-MODELL

Von Holt, Modigliani, Muth und Simon 1960 wurde in [18] ein Kontrollmodell entwickelt, das die Produktion eines Produktes auf einer Maschine beschreibt. Der Lagerstand $y(t)$ charakterisiert den Zustand des Produktionssystems, die Produktionsrate $x(t)$ dient als Steuervariable. Zwischen Lagerstand und Produktionsrate gilt der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} y'(t) &= x(t) - d(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

wobei die stetige Funktion $d(t)$ die Nachfrage des Produktes beschreibt. Ziel ist es, die quadratischen Abweichungen von einem vorgegebenen Soll-Lagerstand $\tilde{y}(t)$, einer Soll-Produktionsrate $\tilde{x}(t)$ und einem Soll-Endlagerstand y_T so gering wie möglich zu halten:

$$J = \frac{1}{2} \left(\int_0^T (k_I (y - \tilde{y})^2 + (x - \tilde{x})^2) dt + S (y(T) - y_T)^2 \right) \rightarrow \text{Min.} \tag{2.24}$$

Nebenbedingungen, wie z. B. die Nichtnegativität von Lagerstand und Produktionsrate, sind hier nicht vorhanden. Die allgemeine Lösung dieses Kontrollmodells kann analytisch bestimmt werden und ist in [4] für $S = 0$ angegeben:

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{k_I} \end{pmatrix} e^{t\sqrt{k_I}} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{k_I} \end{pmatrix} e^{-t\sqrt{k_I}} + \begin{pmatrix} \zeta(t) \\ \zeta'(t) + d(t) \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Dabei bezeichnet $y = \zeta$ und $x = \zeta' + d$ eine partikuläre Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y' &= x - d \\ x' &= k_I (y - \tilde{y}) + \tilde{x}' \end{aligned} \tag{2.26}$$

Die Konstanten C_1 und C_2 werden aus den Randbedingungen $y(0) = y_0$ und $x(T) = \tilde{x}(T)$ bestimmt.

2.4.2 ARROW-KARLIN-MODELL

Im Modell von Arrow und Karlin, das in [1] 1958 beschrieben wurde, wird ebenfalls ein Produkt und eine Maschine betrachtet. Zustand und Kontrolle sind durch den Lagerstand

und die Produktionsrate definiert, wobei ihr Zusammenhang durch die Lagerbilanzgleichung beschrieben wird:

$$\begin{aligned} y'(t) &= x(t) - d(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Lagerstand und Produktionsrate dürfen nicht negativ sein:

$$y \geq 0, x \geq 0 \tag{2.28}$$

Für das Zielfunktional werden lineare Lagerhaltungskosten K_l und zeitunabhängige zunehmende marginale Produktionskosten K_p angenommen:

$$\begin{aligned} K_p(x, t) &= K_p(x) \text{ mit } K_p(0) = 0, K_p' > 0 \text{ für } x > 0, K_p'' > 0 \\ K_l(y, t) &= k_l y \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$J = \int_0^T (K_p(x) + k_l y) dt \rightarrow \text{Min.} \tag{2.30}$$

Zur Lösung dieses Problems werden aus den notwendigen Bedingungen einige Aussagen für optimale Lösungen abgeleitet, mit deren Hilfe ein konstruktiver Algorithmus („Vorwärtsalgorithmus“) entwickelt wird (siehe [4]).

2.4.3 MODELL VON BAI UND VARANASI

In [2] analysieren Bai und Varanasi ein Kontrollmodell für eine Maschine und ein Produkt. Der Zusammenhang zwischen der Produktionsrate (Steuerung) und dem Lagerstand (Zustand) erfolgt wieder durch

$$\begin{aligned} y'(t) &= x(t) - d(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

wobei der Bedarf $d(t)$ durch eine stückweise konstante Funktion angegeben ist. Die Produktionsrate ist in diesem Modell nach oben und unten beschränkt:

$$0 \leq x(t) \leq X \tag{2.32}$$

Fehlmengen sind erlaubt, sie werden aber im Zielfunktional, das quadratische Lager- und Fehlmengenkosten umfasst, bestraft.

$$J = \int_0^T y^2(t) dt \rightarrow \text{Min.} \tag{2.33}$$

Mit Hilfe des Maximumprinzip werden Eigenschaften von optimalen Lösungen abgeleitet, wobei zuerst die Zeitintervalle, in denen der Bedarf größer ist als die maximal mögliche Produktionsrate, untersucht werden. In einer Umgebung von solchen Intervallen kann nicht exakt nach dem Bedarf produziert werden, sondern es muss die volle Kapazität ausgenutzt werden. Es wird ein Algorithmus angegeben, der für die Konstruktion von optimalen Lösungen verwendet wird.

2.4.4 MODELLE VON KOGAN ET AL.

Kogan betrachtet in [27] ein Kontrollmodell für eine Maschine, ein Produkt und einem unendlichen Zeitraum. Der Zustand wird durch den Lagerstand beschrieben, die Kontrolle durch eine beschränkte Produktionsrate. Der Bedarf ist durch eine periodische Funktion mit Periodenlänge T gegeben, die auch für den Lagerstand gilt.

$$\begin{aligned} y'(t) &= x(t) - d(t) \\ y(0) &= y(T) \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$0 \leq x(t) \leq X \tag{2.35}$$

Im Zielfunktional stehen quadratische Lager-, Fehlmengen und Produktionskosten.

$$J = \int_0^T k_l^+ y^+(t)^2 + k_l^- y^-(t)^2 + k_p x(t)^2 dt \rightarrow \text{Min.} \tag{2.36}$$

y^+ bezeichnet dabei den positiven Lagerstand, y^- die Fehlmengen. k_l^+ und k_l^- sind die mit Lagerstand bzw. Fehlmengen verbundenen Kostensätze. Dieses Modell wird im Folgenden mit **K1** bezeichnet.

Kogan untersucht für K1 drei Spezialfälle:

1. unbeschränkte Kapazität, symmetrische Lager- und Fehlmengenkosten, polynomialer Bedarf.
2. vernachlässigbare Produktionskosten
3. vernachlässigbare Lager- und Fehlmengenkosten

Für den allgemeinen Fall wird ein modifiziertes Schießverfahren vorgeschlagen.

Kogan, Khmelnitsky, Shtub und Maimon entwickeln in [29] ein Kontrollmodell, das mehrere Maschinen (Index $k=1, \dots, K$) und Produkte (Index $i=1, \dots, n$) umfasst. Jede Ma-

schine kann sich in endlich vielen Zuständen befinden, die durch den Index $j = 1, \dots, J(k)$ angegeben werden. Das Wechseln von einem Maschinenzustand zu einem anderen wird durch den Rüstzustand V_{kj} und eine Steuervariable u_{kj} beschrieben:

$$\begin{aligned} V_{kj}'(t) &= u_{kj}(t) \\ V_{kj}(0) &= V_{kj}^0 \text{ mit } \sum_{j=1}^{J(k)} V_{kj}(0) = 1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

$V_{kj} = 1$ bedeutet, dass sich Maschine k in Zustand j befindet. $V_{kj} \in]0, 1[$ zeigt an, dass ein Umrüstvorgang läuft, sonst ist der Funktionswert 0. Die Umrüstvariable u_{kj} ist beschränkt durch

$$u_{kj}(t) \leq (T_{kj})^{-1}. \quad (2.38)$$

Die Summe über alle Umrüstvariablen einer Maschine muss 0 ergeben, damit nicht gleichzeitig mehrere Umrüstvorgänge stattfinden.

$$\sum_{j=1}^{J(k)} u_{kj}(t) = 0 \quad (2.39)$$

Die Produktionsrate ist eine maschinen- und zustandsabhängige Größe, die ebenfalls beschränkt ist:

$$0 \leq x_{kj} \leq 1 \quad (2.40)$$

Produziert kann nur dann werden, wenn die Maschine sich im richtigen Zustand befindet. Das wird durch eine Funktion θ modelliert, die 1 ist für positive Argumente und sonst den Wert 0 annimmt.

$$0 \leq \theta(x_{kj}(t)) \leq V_{kj}(t) \quad (2.41)$$

Die Entwicklung des Lagerstandes kann mit Hilfe von produkt-, maschinen- und zustandsabhängigen Kapazitäten bestimmt werden. Der Anfangslagerstand ist vorgegeben.

$$\begin{aligned} y_i'(t) &= \sum_{kj} x_{kj}(t) c_{ikj} - d_i(t) \\ y_i(0) &= y_i^0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Im Zielfunktional werden quadratische Lager- und Fehlmengenkosten berücksichtigt.

$$J = \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k_{ii} y_i(t)^2 dt \rightarrow \text{Min.} \quad (2.43)$$

Der Zustand des Systems wird also durch die Lager- und Rüstzustände beschrieben, Kontrollvariablen sind die Produktionsraten und die Umrüstvariablen. Dieses Modell wird im Folgenden mit **K2** bezeichnet.

Zur Lösung dieses Problems wird eine iterative Prozedur vorgeschlagen. Dazu wird zuerst ein Rüstzustand gewählt, der die Anfangsbedingungen aus (2.37) erfüllt und für den

$$V_{kj}(t) \geq 0, \sum_j V_{kj}(t) = 1 \quad (2.44)$$

gilt. Für den vorgegebenen Rüstzustand werden optimale Produktionsraten und Lagerstände bestimmt (Problem A). Das erfolgt mit der in [30] beschriebenen „time-decomposition“-Methode. Im nächsten Schritt wird für die bestimmten Produktionsraten die Rüstzustände optimiert, um die Lagerstände zu reduzieren (Problem B). Dazu wird das Zielfunktional linearisiert und die Zeit diskretisiert. Das entstehende Problem ist dann mittels Linearer Optimierung lösbar. Die Teilprobleme A und B werden iterativ gelöst.

In einem numerischen Experiment wurde ein zweistufiger Produktionsprozess betrachtet, in dem aus drei Rohstoffen, vier Zwischenprodukte und vier Endprodukte gefertigt werden.

In [25] wird das Modell K2 auf reihenfolgeabhängige Rüstzeiten erweitert und das Zielfunktional etwas verallgemeinert:

$$J = \int_0^T \sum_{i=1}^n K(y_i(t)) dt \rightarrow \text{Min.}, \quad (2.45)$$

wobei K eine konvexe, differenzierbare Kostenfunktion ist. Für dieses Modell, das im Folgenden mit **K3** bezeichnet wird, wird aus dem Maximumprinzip eine Rüstbedingung abgeleitet. Sie gibt einen Zusammenhang zwischen adjungierten Funktionen zum Anfangszeitpunkt und zum Endzeitpunkt des Rüstens an. Diese Eigenschaft wird für einen Algorithmus verwendet, der auf dem Schießverfahren basiert.

In einem numerischen Experiment wird ein einstufiger Produktionsprozess mit zwei parallele Maschinen und vier Produkten untersucht.

Kogan formuliert in [28] ein Kontrollmodell für mehrere Maschinen und Produkte, wobei die Produktionsrate diskret ist. Es kann immer nur mit voller Produktionskapazität oder gar nicht produziert werden. Rüsten ist in diesem Modell, das mit **K4** bezeichnet wird, nicht berücksichtigt. Im Zielfunktional werden quadratische Lagerstands- bzw. Fehlmengekosten und lineare Produktionskosten berücksichtigt.

Damit es nicht zu einem ständigen Umschalten zwischen den Produktionsraten 0 und 1 kommt, womit im Grenzfall eine Produktionsrate < 1 erreicht werden kann, wird eine Mindestproduktionsdauer für jedes Produkt eingeführt.

Aus dem Maximumprinzip werden Eigenschaften für optimale Produktionsregimes abgeleitet. Für die numerische Lösung wird die Zeit diskretisiert und die „time-decomposition“-Methode verwendet.

In einem Beispiel wird ein zweistufiger Produktionsprozess mit drei Rohstoffen, drei Zwischenprodukten und drei Endprodukten untersucht. In jeder Produktionsstufe stehen zwei parallele Maschinen zur Verfügung. Die Rechenzeit für dieses Problem betrug 3,5 Minuten auf einem PC-486.

2.5 ZUSAMMENFASSUNG

Die Modelle EOQ, EPL und das Verfahren von Wagner-Whitin werden in Abbildung 2.1 nochmals gegenübergestellt. Diese Modelle sind alle exakt lösbar, sie haben aber den Nachteil, dass sie die Realität nur sehr mangelhaft wiedergeben:

- Es wird nur ein Produkt betrachtet.
- Die Produktionsrate ist bei EOQ und Wagner-Whitin unbeschränkt.
- Der Bedarf muss bei EOQ und EPL konstant sein.
- Rüstzeiten werden nicht berücksichtigt.

Dennoch ist anzumerken, dass diese Verfahren, besonders EOQ, wegen ihrer Einfachheit in der Praxis verwendet werden, obwohl die Annahmen des Modells teilweise überhaupt nicht zutreffen. Bereits die Verwendung von Näherungsverfahren für Wagner-Whitin (z. B. Groff), die standardmäßig in gängigen PPS-Systemen implementiert sind, würde signifikante Einsparungen bei Lager- und Rüstkosten bewirken.

	EOQ	EPL	Wagner-Whitin
Zeit	stetig, unendlich	stetig, unendlich	diskret, endlich
Maschinen	1	1	1
Produkte	1	1	1
Lieferverzug	nein	nein	nein
Rüstkosten	konstant, pro Los	konstant, pro Los	dynamisch, pro Periode
Rüstzeit	nein	nein	nein
Bedarf	konstant	konstant	dynamisch
Produktionskapazität	unbeschränkt	beschränkt	unbeschränkt
Zielfunktion	Lagerkosten und Rüstkosten	Lagerkosten und Rüstkosten	Lagerkosten und Rüstkosten

Tabelle 2.1 Vergleich der Modelle EOQ, EPL und Wagner-Whitin

Tabelle 2.2 bietet eine Gegenüberstellung der Modelle ELSP, CLSP, CSLP und DLSP. Das ELSP erweitert das stetige EPL-Modell auf mehrere Produkte, die anderen Modelle sind Weiterentwicklungen des diskreten Modells von Wagner-Whitin auf mehrere Produkte. Sie haben auch gemeinsam, dass die Kapazität nicht mehr unbeschränkt ist, Rüstzeiten sind den Grundmodellen nicht integriert. Die erhöhte Praxisrelevanz hat zur Folge, dass diese Modelle NP-hard sind, d.h. für Probleme mit einer Größenordnung, wie sie in Produktionsbetrieben vorkommen, lässt sich in vernünftiger Rechenzeit keine exakte Lösung ermitteln. Daher werden oft heuristische Lösungsverfahren oder lokale Näherungsverfahren angewendet. Beispiele dafür sind:

- Genetische Algorithmen
- Simulated Annealing
- Tabu Search
- Ant Colony Optimization.

Ein methodisch anderer Zugang bietet die Kontrolltheorie. Sie ist für dynamische Modelle geeignet, in denen Produktionsrate, Bedarf, Lagerstand usw. durch stetige Funktionen beschrieben werden. Tabelle 2.3 und Tabelle 2.4 fassen die vorgestellten Produktionsmodelle zur Kontrolltheorie nochmals zusammen.

	ELSP	CLSP, CSLP	DLSP
Zeit	stetig, unendlich	diskret, endlich	diskret, endlich
Maschinen	1	1	1
Produkte	n	n	n
Lieferverzug	nein	nein	nein
Rüstkosten	konstant, pro Los	dynamisch, pro Periode	dynamisch, pro Los
Rüstzeit	nein	nein	nein
Bedarf	konstant	dynamisch	dynamisch
Produktionskapazität	beschränkt	beschränkt	0 oder C
Zielfunktion	Lagerkosten und Rüstkosten	Lagerkosten und Rüstkosten	Lagerkosten und Rüstkosten

Tabelle 2.2. Vergleich der Modelle ELSP, CLSP, CSLP und DLSP

Die ersten kontrolltheoretischen Modelle, wie das HMMS-Modell und das Arrow-Karlin-Modell, betrachten nur ein Produkt und beschränken die Produktionskapazität nicht. Das Modell von Bai ist ebenfalls ein Einproduktmodell, die Kapazität ist allerdings beschränkt. Im HMMS-Modell und im Modell von Bai werden Fehlmengen zugelassen. Rüstzeiten und Rüstkosten werden in allen drei Modellen nicht thematisiert. Für diese Modelle kann die Lösung analytisch oder mit Hilfe eines Algorithmus bestimmt werden.

Kogan et al. haben im Bereich der Kontrolltheorie mehrere Modelle zur Produktionssteuerung entwickelt. K1 ist ein Einproduktmodell, für das in Spezialfällen die Lösungen aus dem Maximumprinzip abgeleitet werden können. Die Modelle K2-K4 sind von hoher Komplexität, da neben der Erweiterung auf mehrere Maschinen auch Rüstzeiten, teilweise reihenfolgeabhängig, integriert werden. Rüstkosten werden im Zielfunktional nicht berücksichtigt, Fehlmengen sind in allen Modellen erlaubt.

Die Schwierigkeit der Kontrolltheorie besteht darin, dass oft nur mühsam aus den notwendigen Bedingungen Eigenschaften für eine optimale Lösung abgeleitet werden können. Hinreichende Bedingungen werden für diese Modelle nicht untersucht. Aus den bestimmten Eigenschaften werden Algorithmen entwickelt, die nur für kleine Problemdimensionen getestet werden.

	HMMS	Arrow-Karlin	Bai
Zeit	stetig	stetig	stetig
Maschinen	1	1	1
Produkte	1	1	1
Lieferverzug	ja	nein	ja
Rüstkosten	nein	nein	nein
Rüstzeit	nein	nein	nein
Bedarf	stetig	stetig	stückweise konstant
Produktionskapazität	unbeschränkt	unbeschränkt	beschränkt
Zielfunktion	quadratische Abweichung von Soll-Lagerstand und Soll-Produktionsniveau	lineare Lagerkosten und konvexe Produktionskosten	quadratische Lager- und Fehlmengenkosten

Tabelle 2.3. Vergleich von kontrolltheoretischen Modellen 1

	K1	K2, K3	K4
Zeit	stetig	stetig	stetig
Maschinen	1	k	k
Produkte	1	n	n
Lieferverzug	ja	ja	ja
Rüstkosten	nein	nein	nein
Rüstzeit	nein	ja	ja
Bedarf	stetig	stetig	stetig
Produktionskapazität	beschränkt	beschränkt	0 oder C
Zielfunktion	quadratische Lager-, Fehlmengen- und Produktionskosten	konvexe Lager- und Fehlmengenkosten	quadratische Lager- und Fehlmengenkosten, lineare Produktionskosten

Tabelle 2.4. Vergleich von kontrolltheoretischen Modellen 2

3 KONTROLLTHEORETISCHE GRUNDLAGEN

In diesem Kapitel wird das Maximumprinzip für ein Kontrollproblem mit Zustandsbeschränkungen formuliert und auch bewiesen (siehe Abschnitt 3.2). Um diesen Satz zu zeigen, werden einige Definitionen und Aussagen benötigt, die in Abschnitt 3.1 beschrieben und teilweise bewiesen werden. Alle Definitionen, Aussagen und Beweise in diesem Kapitel sind aus [20] übernommen.

3.1 VORBEREITENDE DEFINITIONEN UND AUSSAGEN

In diesem Abschnitt werden alle notwendigen Definitionen und Aussagen für den Beweis des Maximumprinzips (Satz 3.7) angeführt. Der Satz von Banach (Satz 3.1) wird für den Beweis des Satzes von Ljusternik (Satz 3.5) und für den Hauptsatz für lokalkonvexe Aufgaben (Satz 3.6) benötigt. Der Satz von Hahn-Banach (Satz 3.2) und dessen Formulierung als Trennungssatz (Satz 3.3) sind ebenfalls Voraussetzung für den Beweis von Satz 3.6. Dieser Hauptsatz und der Satz von Rieß (Satz 3.4) sind die Grundlage, um das Maximumprinzip zu zeigen.

3.1.1 DER SATZ VON BANACH UND DER SATZ VON HAHN-BANACH

Der Satz von Banach über die offenen Abbildungen und den inversen Operator lautet:

Satz 3.1 (Satz von Banach)

Es seien X und Y Banachräume und $A: X \rightarrow Y$ ein linearer stetiger Operator, dessen Wertemenge ganz Y ist, d. h. es gelte $Im A = Y$. Dann ist das Bild jeder offenen Teilmenge des Raumes X offen in Y . Wenn der Operator A außerdem umkehrbar eindeutig ist, d. h. $Ker A = \{0\}$ gilt, so ist A ein linearer Homöomorphismus.

Der Satz von Hahn-Banach lautet:

Satz 3.2 (Satz von Hahn-Banach, Open Mapping Theorem)

Es seien X ein linearer topologischer Raum, $A \subset X$ eine konvexe offene Menge und $L \subset X$ ein Teilraum, der keine gemeinsamen Punkte mit der Menge A hat. Dann existiert auf X ein stetiges lineares Funktional x^* mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \langle x^*, x \rangle &> 0 \quad \text{für alle } x \in A \\ \langle x^*, x \rangle &= 0 \quad \text{für alle } x \in L \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dabei gibt $\langle x^*, x \rangle$ den Wert des linearen Funktional x^* im Punkt x an.

Drei wichtige Folgerungen aus dem Satz von Hahn-Banach sind:

- Es sei X ein separierter (Hausdorffscher) lokalkonvexer linearer topologischer Raum. Dann existiert zu jedem $x \in X, x \neq 0$ ein Funktional x^* aus dem zu X konjugierten Raum X^* so, dass $\langle x^*, x \rangle \neq 0$ gilt.
- Es sei L ein abgeschlossener Teilraum des Hausdorffschen lokalkonvexen linearen topologischen Raumes X . Dann enthält der Annihilator L^\perp des Teilraumes L ein von Null verschiedenes Element. Dabei versteht man unter dem Annihilator die Menge

$$L^\perp = \{x^* \in X^* \mid \forall x \in L : \langle x^*, x \rangle = 0\} \tag{3.2}$$

- Es sei X ein linearer normierter Raum. Dann existiert zu jedem $x \in X, x \neq 0$, ein Funktional $x^* \in X^*$ mit der Eigenschaft

$$\langle x^*, x \rangle = \|x\|, \quad \|x^*\| = 1 \tag{3.3}$$

Der Satz von Hahn-Banach kann auch in Form eines Trennungssatzes formuliert werden.

Satz 3.3 (Trennungssatz)

Es seien A und B disjunkte konvexe Mengen in einem linearen topologischen Raum X und es sei $\text{int } A \neq \emptyset$. Dann existiert auf X ein nichttriviales stetiges lineares Funktional x^* , das die Mengen A und B trennt, d. h. für alle $x \in A, y \in B$ ist die Ungleichung

$$\langle x^*, x \rangle \leq \langle x^*, y \rangle \tag{3.4}$$

erfüllt.

3.1.2 DER SATZ VON RIESZ

Sei T ein kompakter Hausdorffscher Raum, dann wird mit $C^n(T)$ der Banachraum der stetigen Abbildungen aus T in \mathbb{R}^n mit der Norm

$$\|x(\cdot)\| = \|x(\cdot)\|_C = \max_{t \in T} |x(t)| \quad (3.5)$$

bezeichnet.

Satz 3.4 (Satz von Rieß)

Jedes lineare stetige Funktional x^* auf $C^n(T)$ lässt sich auf eindeutige Weise in der Gestalt

$$\langle x^*, x(\cdot) \rangle = \sum_{i=1}^n \int_T x^i(t) d\mu_i \quad (3.6)$$

darstellen, wobei μ_1, \dots, μ_n reguläre Borelsche Maße auf T sind. Dabei gilt

$$\|x^*\| = \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_T d|\mu_i| \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

mit $|\mu_i| = \mu_i^+ + \mu_i^-$, wobei μ_i^+ und μ_i^- der positive bzw. der negative Teil des Maßes μ_i sind.

Ist T das Intervall $[t_0, t_1]$, $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$, so kann man dem Satz von Rieß folgende Form geben: Jedes lineare stetige Funktional x^* auf $C^n([t_0, t_1])$ lässt sich auf eindeutige Weise in der Gestalt

$$\langle x^*, x(\cdot) \rangle = a^T x(t_0) + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} x^i(t) d\mu_i(t) \quad (3.8)$$

darstellen, wobei $a \in \mathbb{R}^n$ und $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ Funktionen beschränkter Variation sind, die rechtsseitig stetig sind und im Punkt t_0 verschwinden.

3.1.3 DER SATZ VON LJUSTERNIK

Bevor der Satz von Ljusternik formuliert wird, werden drei vorbereitende Lemmata benötigt. Das erste Lemma ist eine Verallgemeinerung des Prinzips der kontrahierenden Abbildungen auf mengenwertige Abbildungen. Daher werden zuerst die Begriffe „mengenwertig“ und „kontrahierend“ definiert.

Definition 3.1

Es seien X und Y Mengen. Mit 2^Y wird die Gesamtheit aller Teilmengen der Menge Y bezeichnet. Jede Abbildung $\Phi : X \rightarrow 2^Y$ heißt **mengenwertige Abbildung** aus X in Y .

Es sei Z ein metrischer Raum mit der Metrik ρ . Sind A_1 und A_2 beliebige Teilmengen von Z , so wird die Größe

$$\delta(A_1, A_2) = \sup_{z \in A_1} \rho(z, A_2) = \sup_{z \in A_1} \inf_{w \in A_2} \rho(z, w) \quad (3.9)$$

die **Abweichung** der Menge A_1 von der Menge A_2 genannt. Unter dem **Hausdorffschen Abstand** $h(A_1, A_2)$ zwischen den Mengen A_1 und A_2 versteht man die größere der beiden Abweichungen $\delta(A_1, A_2)$ und $\delta(A_2, A_1)$.

Es sei Φ eine mengenwertige Abbildung des Raumes Z in sich. Sie wird **kontrahierend** auf der Menge $A \subset Z$ genannt, wenn es eine Zahl $\theta, 0 < \theta < 1$, gibt, dass die Ungleichung

$$h(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) \leq \theta \rho(z_1, z_2) \quad (3.10)$$

für alle z_1 und z_2 aus A erfüllt ist.

Lemma 3.1 (Prinzip der kontrahierenden mengenwertigen Abbildungen)

Es sei Z ein vollständiger metrischer Raum mit der Metrik ρ . In einer Kugel dieses Raumes $U(z_0, r) = \{z \mid \rho(z, z_0) < r\}$ ($r > 0$) sei die mengenwertige Abbildung $\Phi : U(z_0, r) \rightarrow 2^Z$ definiert, wobei die Mengen $\Phi(z)$ für jedes $z \in U(z_0, r)$ nichtleer und abgeschlossen seien. Ferner soll vorausgesetzt werden, dass eine Zahl $\theta, 0 < \theta < 1$, existiert mit

$$\begin{aligned} h(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) &\leq \theta \rho(z_1, z_2) \text{ für alle } z_1, z_2 \in U(z_0, r) \\ \rho(z_0, \Phi(z_0)) &< (1-\theta)r. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dann existiert zu jeder Zahl r_1 mit $\rho(z_0, \Phi(z_0)) < r_1 < (1-\theta)r$ ein Element z aus

$$B\left(z_0, \frac{r_1}{1-\theta}\right) = \left\{ w \mid \rho(w, z_0) \leq \frac{r_1}{1-\theta} \right\} \quad (3.12)$$

mit $z \in \Phi(z)$. Darüber hinaus gibt es unter den Punkten, die dieser Bedingung genügen, einen Punkt z_0 mit

$$\rho(z, z_0) \leq \frac{2}{1-\theta} \rho(z_0, \Phi(z_0)). \quad (3.13)$$

Beweis

Es sei z_0, z_1, \dots eine Folge mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} z_n &\in U(z_0, r) && \text{für } n = 0, 1, \dots \\ z_n &\in \Phi(z_{n-1}) && \text{für } n = 1, 2, \dots \\ \rho(z_{n+1}, z_n) &< \theta^n r_1 && \text{für } n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Diese Folge wird induktiv konstruiert. Das Element z_0 ist dasselbe, das in der Voraussetzung des Lemmas auftritt und z_1 ein beliebiges Element aus $\Phi(z_0)$, für das $\rho(z_0, z_1) < r_1$ gilt. Man nehme an, dass bereits die ersten $n+1$ Elemente z_0, z_1, \dots, z_n der Folge ausgewählt wurden. Dann gilt

$$h(\Phi(z_n), \Phi(z_{n-1})) \leq \theta \rho(z_n, z_{n-1}) < \theta^n r_1. \quad (3.15)$$

Daraus folgt die Existenz eines Elements $z_{n+1} \in \Phi(z_n)$ mit $\rho(z_{n+1}, z_n) < \theta^n r_1$.

Weiters gilt nach der Dreiecksungleichung (wenn $k+m \leq n+1$ ist)

$$\begin{aligned} \rho(z_k, z_{k+m}) &\leq \rho(z_k, z_{k+1}) + \dots + \rho(z_{k+m-1}, z_{k+m}) \\ &< (\theta^k + \dots + \theta^{k+m-1}) r_1 < \frac{\theta^k}{1-\theta} r_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Daraus folgt für $k=0$ und $k+m=n+1$

$$\rho(z_0, z_{n+1}) < \frac{r_1}{1-\theta} < r, \quad (3.17)$$

also $z_{n+1} \in U(z_0, r)$. Mit der Konstruktion des Elementes z_{n+1} ist die Induktion beendet.

Aus (3.16) folgt, dass z_0, z_1, \dots eine Cauchy-Folge ist. Da der Raum Z vollständig ist, konvergiert sie gegen ein Element $z \in Z$. Führt man in der Ungleichung

$$\rho(z_0, z_n) < \frac{r_1}{1-\theta} \quad (3.18)$$

den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch, so erhält man die Beziehung

$$z \in B\left(z_0, \frac{r_1}{1-\theta}\right) \subset U(z_0, r). \quad (3.19)$$

Andererseits gilt

$$\rho(z_{n+1}, \Phi(z)) \leq \rho(\Phi(z_n), \Phi(z)) \leq h(\Phi(z_n), \Phi(z)) \leq \theta \rho(z_n, z) \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

Daraus folgt die Existenz einer Folge w_0, w_1, \dots von Elementen der Menge $\Phi(z)$, die gegen z konvergiert. Daher gilt $z \in \Phi(z)$, weil nach Voraussetzung die Menge $\Phi(z)$ abgeschlossen ist.

Wenn $\rho(z_0, \Phi(z_0)) = 0$, so gilt $z_0 \in \Phi(z_0)$ und die Bedingung (3.13) ist offensichtlich erfüllt. Ist aber $\rho(z_0, \Phi(z_0)) > 0$, dann wählt man r_1 so, dass

$$\frac{r_1}{2} \leq \rho(z_0, \Phi(z_0)) < r_1 < (1-\theta)r \quad (3.21)$$

gilt. Für dieses r_1 findet man einen Punkt $z \in B\left(z_0, \frac{r_1}{1-\theta}\right)$, der der Beziehung $z \in \Phi(z)$

genügt. Dann gilt

$$\rho(z_0, z) < \frac{r_1}{1-\theta} \leq \frac{2}{1-\theta} \rho(z_0, \Phi(z_0)). \quad (3.22)$$

□

Lemma 3.2

Es seien X ein Banachraum und M_1, M_2 lineare Mannigfaltigkeiten in X , welche Translationen ein und desselben Teilraumes L sind. Dann gilt

$$h(M_1, M_2) = \delta(M_1, M_2) = \delta(M_2, M_1) = \inf \{ \|x_1 - x_2\| \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2 \}. \quad (3.23)$$

Beweis

Es genügt zu zeigen, dass folgende Beziehung gilt:

$$\forall x_1 \in M_1 \forall x_2 \in M_2 : \rho(x_1, M_2) = \rho(x_2, M_1). \quad (3.24)$$

Es sei $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, x_2'$ ein beliebiges Element der Mannigfaltigkeit M_2 und ferner $x_1' = x_2 + (x_1 - x_2')$. Dann ist $x_1' \in M_1$ und es gilt

$$\rho(x_2, M_1) \leq \|x_2 - x_1'\| = \|x_1 - x_2'\|. \quad (3.25)$$

Da diese Ungleichung für jedes $x_2' \in M_2$ erfüllt ist, gilt $\rho(x_2, M_1) \leq \rho(x_1, M_2)$. Analog lässt sich nachweisen, dass $\rho(x_1, M_2) \leq \rho(x_2, M_1)$ gilt, womit das Lemma bewiesen ist.

□

Lemma 3.3

Es seien X und Y Banachräume und $A : X \rightarrow Y$ ein stetiger, linearer Operator. Sei

$$C(A) = \sup_{y \in Y} \frac{\inf \{ \|x\| \mid x \in X, Ax = y \}}{\|y\|}. \quad (3.26)$$

Wenn dann $\text{Im } A = Y$ gilt, dann ist $C(A) < \infty$.

Beweis

Ist $\text{Im } A = Y$, so enthält nach dem Satz von Banach über offene Abbildungen (Satz 3.1) das Bild der Einheitskugel des Raumes X bei der Abbildung A eine Umgebung des Nullpunktes in Y , d. h., es lässt sich ein $\delta > 0$ angeben, dass zu jedem $y \in Y, \|y\| \leq \delta$, ein Punkt $x \in X$ existiert, für den $\|x\| \leq 1$ und $Ax = y$ gilt. Deshalb ist für beliebiges $y \in Y, y \neq 0$,

$$\inf \{ \|x\| \mid x \in X, Ax = y \} = \delta^{-1} \|y\| \inf \{ \|x\| \mid x \in X, Ax = \delta^{-1} \|y\| y \} \leq \delta^{-1} \|y\|, \quad (3.27)$$

also $C(A) \leq \delta^{-1}$. Das Lemma ist damit bewiesen. □

Satz 3.5 (Der verallgemeinerte Satz von Ljusternik)

Es seien X und Y Banachräume und $A: X \rightarrow Y$ ein stetiger, linearer Operator und F eine Abbildung einer Umgebung U des Punktes $x_0 \in X$ in Y . Es sei $\text{Im } A = Y$ und es gebe eine Zahl $\delta > 0$ so, dass

$$\begin{aligned} \delta C(A) < 1/2 \quad \text{und} \\ \forall x, x' \in U : \|F(x) - F(x') - A(x - x')\| \leq \delta \|x - x'\|. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dann existieren eine Umgebung $U' \subset U$ des Punktes x_0 , eine Zahl $K > 0$ und eine Abbildung $\xi \rightarrow x(\xi)$ der Umgebung U' in X so, dass die Beziehungen

$$\begin{aligned} F(\xi + x(\xi)) &= F(x_0) \\ \|x(\xi)\| &\leq K \|F(\xi) - F(x_0)\| \end{aligned} \quad (3.29)$$

für alle $\xi \in U'$ erfüllt sind.

Beweis

Man wähle $r > 0$ so, dass die Kugel $U(x_0, 2r)$ der Umgebung U angehört. Aus (3.28) folgt, dass die Abbildung F im Punkt x_0 stetig ist. Daher kann man eine Umgebung $U' \subset U(x_0, r)$ des Punktes x_0 angeben, in der

$$C(A) \sup_{\xi \in U'} \|F(\xi) - F(x_0)\| \leq \frac{r}{2} \quad (3.30)$$

gilt, da nach Lemma 3.3 $C(A) < \infty$ ist.

Nun wählt man ein festes Element $\xi \in U'$ und betrachtet die mengenwertige Abbildung $x \rightarrow \psi_\xi(x)$ der Kugel $U(0, r)$ in den Raum X , die durch

$$\psi_\xi(x) = x - A^{-1}(F(\xi + x) - F(x_0)) \quad (3.31)$$

definiert wird, wobei mit $\Lambda^{-1}(y)$ das volle Urbild des Punktes y bei der Abbildung Λ bezeichnet wird. Auf Grund der Wahl von r und U' ist $\xi + x \in U$ für alle $\xi \in U'$, $x \in U(0, r)$, so dass die Mengen $\psi_\xi(x)$ für alle $x \in U(0, r)$ nicht leer sind. Für jedes $y \in Y$ ist die Menge $\Lambda^{-1}(y)$ eine lineare Mannigfaltigkeit, die dem Teilraum $\text{Ker } \Lambda$ parallel ist. Die Mengen $\psi_\xi(x)$ haben dann dieselbe Eigenschaft. Sie sind insbesondere sämtlich abgeschlossen. Auf Grund von Lemma 3.2 und Lemma 3.3 gilt

$$\begin{aligned}
h(\psi_\xi(x_1), \psi_\xi(x_2)) &= \inf \left\{ \|z_1 - z_2\| \mid z_i \in \psi_\xi(x_i), \quad i=1, 2 \right\} \\
&= \inf \left\{ \|z_1 - z_2\| \mid \Lambda z_i = \Lambda x_i - F(\xi + x_i) + F(x_0), \quad i=1, 2 \right\} \\
&= \inf \left\{ \|z\| \mid \Lambda z = \Lambda(x_1 - x_2) - F(\xi + x_1) + F(\xi + x_2) \right\} \\
&\leq C(\Lambda) \|F(\xi + x_1) - F(\xi + x_2) - \Lambda(x_1 - x_2)\|.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Berücksichtigt man die Ungleichung (3.28) und setzt $\theta = \delta C(\Lambda)$ (nach Voraussetzung ist $\theta < 1/2$), so erhält man

$$h(\psi_\xi(x_1), \psi_\xi(x_2)) \leq \theta \|x_1 - x_2\|. \tag{3.33}$$

Aus der Ungleichung (3.30) folgt

$$\begin{aligned}
\rho(0, \psi_\xi(0)) &= \inf \left\{ \|z\| \mid \Lambda z = -F(\xi) + F(x_0) \right\} \\
&\leq C(\Lambda) \|F(\xi) - F(x_0)\| \leq \frac{r}{2} < (1 - \theta)r.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Die Beziehungen (3.33) und (3.34) zeigen, dass die Abbildung $\psi_\xi(x)$ allen Voraussetzungen von Lemma 3.1 genügt. Daher existiert ein Vektor $x = x(\xi)$ so, dass einerseits

$$x(\xi) \in \psi_\xi(x(\xi)) \Rightarrow 0 \in \Lambda^{-1}(F(\xi + x(\xi)) - F(x_0)) \Rightarrow F(\xi + x(\xi)) = F(x_0) \tag{3.35}$$

gilt und andererseits nach der Ungleichung in (3.34) die Beziehung

$$\|x(\xi)\| \leq \frac{2}{1-\theta} \rho(0, \psi_\xi(0)) \leq \frac{2C(\Lambda)}{1-\theta} \|F(\xi) - F(x_0)\| = K \|F(\xi) - F(x_0)\| \tag{3.36}$$

erfüllt ist. Der Satz ist damit bewiesen. □

Bemerkung

Aus dem Beweis von Satz 3.5 folgt, dass die Zahl K von δ abhängig ist und der Zusammenhang

$$K = \frac{2C(\Lambda)}{1 - \delta C(\Lambda)} \quad (3.37)$$

gilt. Verkleinert man δ , so wird auch die Zahl K kleiner.

3.1.4 HAUPTSATZ FÜR LOKALKONVEXE AUFGABEN

Bevor die Problemstellung und der Hauptsatz für diese Problemklasse erläutert werden, erfolgt die Definition der Begriffe „Subdifferential“, „gleichmäßig differenzierbar“, „lokalkonvex“ und „regulär lokalkonvex“.

Definition 3.2

Es sei f eine homogene Funktion auf X . Dann versteht man unter dem Subdifferential von f im Nullpunkt, das mit $\partial f(0)$ bezeichnet wird, die Menge aller Funktionale x^* , die Stützfunktionale von f sind:

$$\partial f(0) = \{x^* \in X^* \mid \forall x \in X : f(x) \geq \langle x^*, x \rangle\}. \quad (3.38)$$

Sei g eine Funktion auf X , für die im Punkt x die Richtungsableitung existiert, dann heißt die Menge $\partial g(x) = \partial g'(x; 0)$ **Subdifferential** der Funktion g im Punkt x . Man sagt, die Funktion g ist subdifferenzierbar im Punkt x , wenn $\partial g(x)$ nicht leer ist.

Definition 3.3

Seien X und Y Hausdorffsche lokalkonvexe lineare topologische Räume. Eine auf X definierte Funktion f ist **lokalkonvex** im Punkt x , wenn ihre Richtungsableitung in diesem Punkt existiert und konvex ist. Ist weiters $G : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von X in Y , so ist diese Abbildung im Punkt x_0 in Richtung x differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$G'(x_0; x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{G(x_0 + \lambda x) - G(x_0)}{\lambda} \quad (3.39)$$

existiert. Man nennt die Abbildung G im Punkt x_0 **gleichmäßig differenzierbar** in Richtung x , wenn zu jeder Umgebung $D \subset Y$ des Nullpunktes eine Umgebung $U \subset X$ des Punktes x und eine Zahl $\lambda_0 > 0$ existieren, sodass

$$\frac{G(x_0 + \lambda z) - G(x_0)}{\lambda} - G'(x_0; x) \in V \quad (3.40)$$

für alle $z \in U$ und alle $0 < \lambda < \lambda_0$ gilt.

Eine auf X definierte Funktion f heißt **regulär lokalkonvex** im Punkt x , wenn sie lokalkonvex und in diesem Punkt bezüglich aller Richtungen gleichmäßig differenzierbar ist. Demzufolge ist die Richtungsableitung einer Funktion x , die in diesem Punkt regulär lokalkonvex ist, eine stetige konvexe Funktion.

Es seien X und Y Banachräume, U eine beliebige Menge, f_0, \dots, f_n Funktionen auf $X \times U$ und F eine Abbildung von $X \times U$ in Y . Man betrachte folgende Problemstellung:

$$\begin{aligned} f_0(x, u) &\rightarrow \inf \\ F(x, u) &= 0 \\ f_i(x, u) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ u &\in U \end{aligned} \quad (3.41)$$

Die Lagrange-Funktion dieses Problems wird definiert als

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda_0, \dots, \lambda_n, y^*) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x, u) + \langle y^*, F(x, u) \rangle. \quad (3.42)$$

Wenn die Funktionen $x \rightarrow f_i(x, u)$ lokalkonvex sind und die Abbildung $x \rightarrow F(x, u)$ (u fest) differenzierbar ist, so ist auch die Lagrange-Funktion lokalkonvex in x . Mit $\partial_x f_i$ und $\partial_x \mathcal{L}$ werden die Subdifferenziale der Funktionen f_i bzw. \mathcal{L} als Funktionen von x und mit $f'_i(x, u; z)$ und $\mathcal{L}'(x, u, \lambda_0, \dots, \lambda_n, y^*; z)$ ihre Richtungsableitungen im Punkt x in Richtung z bezeichnet. Das Symbol Σ^m wird in diesem Abschnitt für das folgende m -dimensionale Simplex im \mathbb{R}^m verwendet:

$$\Sigma^m = \left\{ a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m \mid \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^m \alpha_j \leq 1 \right\}. \quad (3.43)$$

Satz 3.6

Es sei (x_*, u_*) ein zulässiges Element von Problem (3.41). Der Punkt x_* besitze eine Umgebung V mit den folgenden Eigenschaften:

- Für jedes $u \in U$ gehört die Abbildung $x \rightarrow F(x, u)$ im Punkt x_* zur Klasse C_1 .
- Für jedes $u \in U$ sind die Funktionen $x \rightarrow f_i(x, u)$, $i = 0, \dots, n$ auf V stetig und im Punkt x_* regulär lokalkonvex.
- Zu jedem endlichen System von Punkten u_1, \dots, u_m aus U und jedem $\delta > 0$ existieren eine Umgebung $V' \subset V$ ($x_* \in V'$), eine Zahl $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung $v: V' \times (\varepsilon \Sigma^m) \rightarrow U$ so, dass $v(x, 0) = u_*$ für alle $x \in V'$ gilt und für alle $x, x' \in V'$ und $a, a' \in \varepsilon \Sigma^m$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
& \left\| F(x, v(x, a)) - F(x', v(x', a')) - F_x(x_*, u_*)(x - x') \right. \\
& \left. - \sum_{j=1}^m (\alpha_j - \alpha'_j) (F(x_*, u_j) - F(x_*, u_*)) \right\| \leq \delta \left(\|x - x'\| + \sum_{j=1}^m |\alpha_j - \alpha'_j| \right) \\
& f_i(x, v(x, a)) - f_i(x, u_*) - \sum_{j=1}^m \alpha_j (f_i(x, u_j) - f_i(x, u_*)) \\
& \leq \delta \left(\|x - x_*\| + \sum_{j=1}^m \alpha_j \right), \quad i = 0, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.44}$$

erfüllt sind.

- Der Wertebereich des linearen Operators $x \rightarrow F_x(x_*, u_*)x$ besitzt in Y eine endliche Kodimension.

Ist dann (x_*, u_*) ein lokales Minimum von (3.41), dann existieren nicht gleichzeitig verschwindende Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, y^* \in Y^*$ so, dass

$$\begin{aligned}
0 \in \partial_x \mathcal{L}(x_*, u_*, \lambda_0, \dots, \lambda_n, y^*) &= F_x^*(x_*, u_*)y^* + \sum_{i=0}^n \lambda_i \partial_x f_i(x_*, u_*) \\
\mathcal{L}(x_*, u_*, \lambda_0, \dots, \lambda_n, y^*) &= \min_{u \in U} \mathcal{L}(x_*, u, \lambda_0, \dots, \lambda_n, y^*) \\
\lambda_i f_i(x_*, u_*) &= 0, \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.45}$$

gilt.

Beweis

In diesem Beweis werden drei Teilfälle unterschieden, zwei entartete und ein nicht entarteter Fall. Es werden folgende Bezeichnungen benutzt:

- $L_0 = \text{Im } F_x(x_*, u_*) \subset Y$ ist die Wertemenge des linearen Operators $F_x(x_*, u_*)$.
- $B = L_0 + F(x_*, U) \subset Y$ ist die Gesamtheit der $y \in Y$, zu denen Elemente $x \in X$ und $u \in U$ existieren, dass $y = F_x(x_*, u_*)x + F(x_*, u)$ ist.
- $L = \text{lin } B$ ist die lineare Hülle der Menge B .

Nach Voraussetzung hat der Teilraum L_0 eine endliche Kodimension (= Dimension des Faktorraumes Y/L_0) und ist daher abgeschlossen. L ist ebenfalls ein abgeschlossener Teilraum, da er als Summe von L_0 und eines endlichdimensionalen Teilraumes darstellbar ist.

Erster entarteter Fall: Es sei $L \neq Y$. Dann existiert nach der zweiten Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach (Satz 3.2) ein nichttriviales Funktional $y^* \in Y^*$, das dem Annihilator des Teilraumes L angehört. Für dieses gilt also

$$\langle y^*, F_x(x_*, u_*)x + F(x_*, u) \rangle = 0 \quad (3.46)$$

für alle $x \in X$ und $u \in U$. Für $u = u_*$ folgt aus dieser Beziehung wegen $F(x_*, u_*) = 0$, dass $\forall x \in X : \langle y^*, F_x(x_*, u_*)x \rangle = 0$ gilt. D. h. es ist einerseits

$$F_x^*(x_*, u_*)y^* = 0. \quad (3.47)$$

Andererseits ergibt sich aus (3.46) für $x = 0$ die Beziehung

$$\langle y^*, F(x_*, u) \rangle = \langle y^*, F(x_*, u_*) \rangle = 0 \quad \forall u \in U. \quad (3.48)$$

Setzt man $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$, so sind wegen (3.47) und (3.48) die Beziehungen (3.45) erfüllt.

Zweiter entarteter Fall: Es sei $L = Y$. Dann folgt aus der Endlichkeit der Kodimension von L_0 , dass $\text{int } B \neq \emptyset$. Gilt dabei $0 \notin \text{int } B$, dann existiert nach dem Trennungssatz (Satz 3.3) ein nichttriviales Funktional $y^* \in Y^*$, das die Menge B und das Nullelement trennt, d. h. ein Funktional y^* mit $\langle y^*, y \rangle \geq 0$ für alle $y \in B$. Das bedeutet, dass für alle $x \in X$ und $u \in U$ die Ungleichung

$$\langle y^*, F_x(x_*, u_*)x + F(x_*, u) \rangle \geq 0 \quad (3.49)$$

erfüllt ist. Setzt man in diese Beziehung $u = u_*$ ein, dann erhält man

$$\langle y^*, F_x(x_*, u_*)x \rangle \geq 0 \quad (3.50)$$

für alle $x \in X$ und damit $F_x^*(x_*, u_*)y^* = 0$. Einsetzen von $x = 0$ in (3.49), liefert die Ungleichung

$$\langle y^*, F(x_*, u) \rangle \geq 0 = \langle y^*, F(x_*, u_*) \rangle \quad (3.51)$$

für alle $u \in U$. Wie im ersten Fall sind daher auch jetzt $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ und y^* ein System gesuchter Lagrangescher Multiplikatoren.

Nichtentarteter Fall: Dieser Fall ist charakterisiert durch $L = Y$ und $0 \in \text{int } B$. O. B. d. A. sei $f_i(x_*, u_*) = 0$ für $i = 1, \dots, k$ und $f_i(x_*, u_*) < 0$ für $i = k+1, \dots, n$. Man betrachte die Menge C der Elemente $\mu_0, \dots, \mu_k, y \in \mathbb{R}^{k+1} \times Y$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem Element dieser Menge existieren $x \in X$ und $u \in U$ mit

$$\begin{aligned} F_x(x_*, u_*)x + F(x_*, u) - F(x_*, u_*) &= y \\ f_i'(x_*, u_*; x) + f_i(x_*, u) - f_i(x_*, u_*) &< \mu_i, \quad i = 0, \dots, k. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Zum Beweis des Satzes reicht es aus, zu zeigen, dass das Innere der konvexen Hülle der Menge C ist nicht leer ist und dass $0 \notin \text{conv } C$. Wenn diese beiden Beziehungen gelten, dann existiert nämlich ein nichttriviales Funktional $(\lambda_0, \dots, \lambda_k, y^*) \in \mathbb{R}^{k+1} \times Y^*$, das die konvexe Hülle von C und den Nullvektor voneinander trennt, d. h. dass

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i \mu_i + \langle y^*, y \rangle \geq 0 \quad (3.53)$$

für alle $(\mu_0, \dots, \mu_k, y) \in C$ gilt. Die letzte Ungleichung bedeutet, dass für alle $x \in X$ und $u \in U$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \lambda_i (f_i'(x_*, u_*; x) + f_i(x_*, u) - f_i(x_*, u_*)) \\ + \langle y^*, F_x(x_*, u_*)x + F(x_*, u) - F(x_*, u_*) \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

gilt oder, wenn man $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ setzt, dass die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{L}_x(x_*, u_*, \lambda_0, \dots, \lambda_n, y^*), x \right\rangle \\ & + \mathcal{L}(x_*, u, \lambda_0, \dots, \lambda_n, y^*) - \mathcal{L}(x_*, u_*, \lambda_0, \dots, \lambda_n, y^*) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

gilt. Setzt man in diese Ungleichung nacheinander $u = u_*$ und $x = 0$ ein, so kommt man wieder zu den ersten beiden Beziehungen in (3.45). Die dritte Beziehung, die komplementären Schlupfbedingungen, ist ebenfalls erfüllt, da $\lambda_i = 0$ für $f_i(x_*, u_*) < 0$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\text{int}(\text{conv } C) \neq \emptyset$ und $0 \notin \text{conv } C$. Da $0 \in \text{int } B$ vorausgesetzt wird, ist offensichtlich auch $0 \in \text{int } \pi(B)$, wobei $\pi: Y \rightarrow Y/L_0$ die kanonische Abbildung ist. Weil der Raum Y/L_0 endlichdimensional ist, existieren endlich viele Punkte $z_1, \dots, z_m \in \pi(B)$, deren lineare Hülle mit Y/L_0 übereinstimmt und für die $z_1 + \dots + z_m = 0$ ist. Nach Definition von $\pi(B)$ gibt es Elemente $u_j \in U$, $j = 1, \dots, m$, mit $\pi(F(x_*, u_j)) = z_j$. Für diese $u_j \in U$ gilt daher

$$\pi\left(\sum_{j=1}^m F(x_*, u_j)\right) = 0. \quad (3.56)$$

Es werden nun folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} U(0,1) &= \{x \in X \mid \|x\| < 1\}; \\ c_0 &= \max_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq i \leq k}} \left(f_i(x_*, u_j) + \sup_{\|x\|=1} \left\| f'_i((x_*, u_*); x) \right\| \right); \\ U_0 &= \left\{ u \in U \mid \exists \alpha_j \geq 0, 1 \leq j \leq m, \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1: \right. \\ & \left. F(x_*, u) = \sum_{j=1}^m \alpha_j F(x_*, u_j), f_i(x_*, u) \leq \sum_{j=1}^m \alpha_j f_i(x_*, u_j), 0 \leq i \leq k \right\}; \\ B_0 &= F_x(x_*, u_*)U(0,1) + F(x_*, U_0). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Es gilt die Beziehung $\text{int } B_0 \neq \emptyset$, denn die Menge $\pi(B_0)$ enthält wegen $u_j \in U_0, j=1, \dots, m$, die Punkte z_1, \dots, z_m . Daraus folgt, dass $\text{int } \pi(B_0) \neq \emptyset$ ist. Außerdem ist nach dem Satz von Banach (Satz 3.1) die Menge $F_x(x_*, u_*)U(0,1)$ offen in L_0 .

Es sei nun $C_0 = B_0 \times (\mathbb{R}_{c_0})^{k+1}$, wobei \mathbb{R}_{c_0} die Halbgerade $\{\mu \in \mathbb{R} \mid \mu > c_0\}$ bezeichnet. Da $F(x_*, u_*) = 0$ und nach obiger Annahme $f_i(x_*, u_*) = 0$ für $i=1, \dots, k$ gilt und außerdem o. B. d. A. $f_0(x_*, u_*) = 0$ angenommen werden kann, gilt $\text{int } C_0 \neq \emptyset$ und $C_0 \subset C$, so dass auch $\text{int } C \neq \emptyset$ erfüllt ist.

Es bleibt noch offen die Beziehung $0 \notin \text{conv } C$ zu beweisen. Sei $0 \in \text{conv } C$, dann ist zu zeigen, dass der Punkt (x_*, u_*) kein lokales Minimum von (3.41) sein kann. Um diese letzte Behauptung zu beweisen, genügt es, sich davon zu überzeugen, dass aus $0 \in \text{conv } C$ die Existenz von Vektoren $\bar{x} \in X$ und $\bar{a} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m), \bar{\alpha}_i > 0$ und von Punkten $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m \in U$ mit folgenden Eigenschaften folgen würde:

$$F_x(x_*, u_*)\bar{x} + \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j (F(x_*, \bar{u}_j) - F(x_*, u_*)) = 0 \quad (3.58)$$

$$\text{lin} \left(L_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^m \{F(x_*, \bar{u}_j)\} \right) \right) = Y \quad (3.59)$$

$$f'_i(x_*, u_*; \bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j (f_i(x_*, \bar{u}_j) - f_i(x_*, u_*)) < 0, \quad i=0, \dots, k. \quad (3.60)$$

Es wird zunächst angenommen, dass diese Beziehungen erfüllt sind, der Beweis dafür folgt weiter unten. Es sei $\delta > 0$ fest gewählt. Dann kann man für $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ und δ eine Umgebung V' des Punktes x_* , eine Zahl $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung $v: V' \times (\varepsilon \Sigma^m) \rightarrow U$ wählen, die der dritten Voraussetzung dieses Satzes genügt. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^m$ wird

$$\begin{aligned} \alpha^+ &= \max(\alpha, 0), \quad \alpha^- = \min(\alpha, 0) = \alpha - \alpha^+ \\ a^+ &= (\alpha_1^+, \dots, \alpha_m^+), \quad a^- = (\alpha_1^-, \dots, \alpha_m^-) \end{aligned} \quad (3.61)$$

definiert. Dann ist in einer Umgebung des Punktes $(x_*, 0)$ durch

$$\Phi(x, a) = F(x, v(x, a^+)) + \sum_{i=1}^m \alpha_j^- (F(x_*, \bar{u}_j) - F(x_*, u_*)) \quad (3.62)$$

eine Abbildung in den Raum Y definiert. Offensichtlich gilt $\Phi(x_*, 0) = F(x_*, u_*) = 0$.

Schließlich wird der lineare Operator $A: X \times \mathbb{R}^m \rightarrow Y$ definiert als

$$A(x, a) = F_x(x_*, u_*)x + \sum_{j=1}^m \alpha_j (F(x_*, \bar{u}_j) - F(x_*, u_*)). \quad (3.63)$$

Wegen der dritten Voraussetzung des Satzes gilt für alle (x, a) und (x', a') aus dem Definitionsbereich der Abbildung Φ folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} & \|\Phi(x, a) - \Phi(x', a') - A(x, a) + A(x', a')\| \\ &= \|F(x, v(x, a^+)) - F(x', v(x', a'^+)) - F_x(x_*, u_*)(x - x') \\ & \quad - \sum_{j=1}^m (\alpha_j^+ - \alpha_j'^+) (F(x_*, \bar{u}_j) - F(x_*, u_*))\| \\ &\leq \delta \left(\|x - x'\| + \sum_{i=1}^m |\alpha_j^+ - \alpha_j'^+| \right) \leq \delta \left(\|x - x'\| + \sum_{i=1}^m |\alpha_j - \alpha_j'| \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Aus der Definition des Operators A und aus Bedingung (3.59) folgt $Im A = Y$. Außerdem ist der Operator A offenbar stetig. Gemäß Lemma 3.3 gilt deshalb

$$C(A) = \sup_{y \neq 0} \left(\|y\|^{-1} \inf \left\{ \|x\| + \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \mid A(x, a) = y \right\} \right) < \infty \quad (3.65)$$

Wegen (3.58) gehört der Vektor (\bar{x}, \bar{a}) zum Kern des Operators A . Ist $\delta C(A) < 1/2$, so genügen gemäß (3.65) die Abbildung Φ und der Operator A den Bedingungen des verallgemeinerten Satzes von Ljusternik (Satz 3.5). Es existieren daher Zahlen $\bar{t} > 0, K > 0$ und Abbildungen $t \rightarrow (x(t), a(t))$ des Intervalls $[0, \bar{t}]$ in den Raum $X \times \mathbb{R}^m$ so, dass $\forall t \in [0, \bar{t}]$

$$\begin{aligned} & \Phi(x_* + t\bar{x} + x(t), t\bar{a} + a(t)) = 0 \text{ und} \\ & \|x(t)\| + \sum_{j=1}^m |\alpha_j(t)| \leq K \|\Phi(x_* + t\bar{x}, t\bar{a})\|. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Aus der letzten Ungleichung folgt nach (3.58) und (3.64) die Beziehung

$$\begin{aligned} \|x(t)\| + \sum_{j=1}^m |\alpha_j(t)| &\leq K \|\Phi(x_* + t\bar{x}, t\bar{a}) - \Phi(x_*, 0) - t\Lambda(\bar{x}, \bar{a})\| \\ &\leq tK\delta \left(\|\bar{x}\| + \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Daraus ergibt sich insbesondere $x(t) \rightarrow 0$ und $a(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$.

Weiters existiert wegen (3.60) eine Zahl $c > 0$ so, dass für alle $i = 0, \dots, k$ die Ungleichungen

$$f'_i(x_*, u_*, \bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j (f_i(x_*, \bar{u}_j) - f_i(x_*, u_*)) \leq -4c \quad (3.68)$$

erfüllt sind. Da die Funktionen $x \rightarrow f_i(x, u_*)$ regulär lokalkonvex sind, lässt sich eine Zahl $\sigma > 0$ angeben, dass für $0 \leq t \leq \sigma$, $\|x - \bar{x}\| \leq \sigma$ und $i = 0, \dots, n$ die Ungleichungen

$$f_i(x_* + tx, u_*) \leq f_i(x_*, u_*) + t(f'_i(x_*, u_*, \bar{x}) + c) \quad (3.69)$$

gelten. Sei $\delta > 0$ so gewählt, dass neben der Ungleichung $\delta C(\Lambda) < 1/2$ noch folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$$K\delta \left(\|\bar{x}\| + \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j \right) < \min(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m, \sigma) \quad (3.70)$$

$$(\delta + K\delta^2) \left(\|\bar{x}\| + \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j \right) < c \quad (3.71)$$

$$K\delta \left(\|\bar{x}\| + \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j \right) \max_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} |f_i(x_*, \bar{u}_j) - f_i(x_*, u_*)| < c. \quad (3.72)$$

Diese Wahl von δ ist möglich, da die Zahl K , die ebenfalls von δ abhängt, kleiner wird, je kleiner δ ist (vergleiche Bemerkung nach dem Beweis von Satz 3.5).

Aus (3.67) und (3.70) folgt $t\bar{\alpha}_j + \alpha_j(t) > 0$ für alle $t \in]0, \bar{t}]$, so dass

$$\Phi(x, t\bar{a} + a(t)) = F(x, v(x, t\bar{a} + a(t))) \quad (3.73)$$

ist. Setzt man

$$\tilde{x}(t) = x_* + t\bar{x} + x(t), \quad \tilde{u}(t) = v(\tilde{x}(t), t\bar{a} + a(t)) \quad (3.74)$$

so folgt wegen (3.66) unmittelbar die Beziehung

$$F(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = 0 \quad (3.75)$$

Aus der zweiten Ungleichung in (3.44) ergibt sich für $t \in [0, \bar{t}]$ und $i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} f_i(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) &\leq f_i(\tilde{x}(t), u_*) + \sum_{j=1}^m (t\bar{\alpha}_j + \alpha_j(t)) (f_i(\tilde{x}(t), \bar{u}_j) - f_i(\tilde{x}(t), u_*)) \\ &\quad + \delta \left(\|t\bar{x} + x(t)\| + \sum_{j=1}^m (t\bar{\alpha}_j + \alpha_j(t)) \right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Wegen (3.67) und (3.70) hat man $t^{-1}\|x(t)\| \leq \sigma$. Daher ist nach (3.69) für $0 < t \leq \min(\bar{t}, \sigma)$

$$f_i(\tilde{x}(t), u_*) \leq f_i(x_*, u_*) + t(f'_i(x_*, u_*; \bar{x}) + c) \quad (3.77)$$

erfüllt. Beachtet man ferner die Beziehungen (3.67), (3.70) und (3.72) und berücksichtigt $\tilde{x}(t) \rightarrow x_*$ für $t \rightarrow 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^m (t\bar{\alpha}_j + \alpha_j(t)) (f_i(\tilde{x}(t), \bar{u}_j) - f_i(\tilde{x}(t), u_*)) \\ &= t \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j (f_i(x_*, \bar{u}_j) - f_i(x_*, u_*)) + \sum_{j=1}^m \alpha_j(t) (f_i(x_*, \bar{u}_j) - f_i(x_*, u_*)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m (t\bar{\alpha}_j + \alpha_j(t)) (f_i(\tilde{x}(t), \bar{u}_j) - f_i(x_*, \bar{u}_j) - f_i(\tilde{x}(t), u_*) + f_i(x_*, u_*)) \\ &\leq t \left(\sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j (f_i(x_*, \bar{u}_j) - f_i(x_*, u_*)) + c \right) + o(t). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Schließlich gilt gemäß (3.67) und (3.71)

$$\begin{aligned} \delta \left(\|t\bar{x} + x(t)\| + \sum_{i=1}^m (t\bar{\alpha}_i + \alpha_i(t)) \right) &\leq t\delta \left[\|\bar{x}\| + \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j + t^{-1} \left(\|x(t)\| + \sum_{i=1}^m |\alpha_i(t)| \right) \right] \\ &\leq t(\delta + K\delta^2) \left(\|x\| + \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j \right) < tc. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Aus (3.76) - (3.79) folgen die Ungleichungen

$$f_i(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \leq f_i(x_*, u_*) + t \left[f_i'(x_*, u_*; \bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j (f_i(x_*, \bar{u}_j) - f_i(x_*, u_*)) + 3c \right] + o(t), \quad (3.80)$$

die für alle $i = 0, \dots, n$, $0 \leq t \leq \min(\bar{t}, \sigma)$ gelten. Im Fall $0 \leq i \leq k$ gilt wegen (3.68)

$$f_i(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \leq f_i(x_*, u_*) - tc + o(t) \quad (3.81)$$

für hinreichend kleine Werte von t . Im Fall $k+1 \leq i \leq n$ hat man

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_i(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \leq f_i(x_*, u_*) < 0. \quad (3.82)$$

Die Beziehungen (3.75), (3.81) und (3.82) zeigen, dass für hinreichend kleine $t > 0$ das Paar $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ zulässiger Punkt von (3.41) ist und dass $f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) < f_0(x_*, u_*)$ gilt. Wegen $\tilde{x}(t) \rightarrow x_*$ für $t \rightarrow 0$ bedeutet das, dass der Punkt (x_*, u_*) im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes keine lokale Minimumstelle sein kann.

Somit bleibt noch zu zeigen, dass es unter der Annahme $0 \in \text{conv } C$ Größen $\bar{x} \in X$, $\bar{u}_1 \in U, \dots, \bar{u}_m \in U$ und $\bar{\alpha}_1 > 0, \dots, \bar{\alpha}_m > 0$ gibt, die den Beziehungen (3.58) - (3.60) genügen. Ist $0 \in \text{conv } C$, so existieren nach Definition Punkte $x_0 \in X$, $u_{01} \in U, \dots, u_{0m_0} \in U$ und Zahlen $\gamma_{01} > 0, \dots, \gamma_{0m_0} > 0$ mit

$$F_x(x_*, u_*)x_0 + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j} (F(x_*, u_{0j}) - F(x_*, u_*)) = 0 \quad (3.83)$$

$$f_i'(x_*, u_*; x_0) + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j} (f_i(x_*, u_{0j}) - f_i(x_*, u_*)) < 0, \quad i = 0, \dots, k. \quad (3.84)$$

Ist $0 \in \text{int } B$, so kann man Vektoren $x_1 \in X$ und $y_1, \dots, y_l \in \text{conv } F(x_*, U)$ in der Weise auswählen, dass die lineare Hülle der Menge $L_0 \cup \{y_1, \dots, y_l\}$ mit Y übereinstimmt und dass $F_x(x_*, u_*)x_1 + y_1 + \dots + y_l = 0$ gilt. Dann existieren zu jedem $s = 1, \dots, l$ Zahlen $\gamma_{s1} > 0, \dots, \gamma_{sm_s} > 0$, deren Summe gleich Eins ist, und Punkte u_{s1}, \dots, u_{sm_s} aus U mit

$$y_s = \sum_{j=1}^{m_s} \gamma_{sj} F(x_*, u_{sj}). \quad (3.85)$$

Daher stimmt die lineare Hülle der Menge

$$L_0 \cup \left\{ F(x_*, u_{sj}) \mid s = 0, \dots, l; j = 1, \dots, m_s \right\} \quad (3.86)$$

mit Y überein und es gilt

$$F_x(x_*, u_*)x_1 + \sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^{m_s} \gamma_{sj} F(x_*, u_{sj}) = 0. \quad (3.87)$$

Nutzt man noch die Beziehung (3.84) und die Stetigkeit der Funktionen $x \rightarrow f'_i(x_*, u_*; x)$ aus, so lässt sich ein $\varepsilon > 0$ finden, dass für alle $i = 0, \dots, k$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & f'_i(x_*, u_*; x_0 + \varepsilon x_1) + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j} (f_i(x_*, u_{0j}) - f_i(x_*, u_*)) \\ & + \varepsilon \sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^{m_s} \gamma_{sj} (f_i(x_*, u_{sj}) - f_i(x_*, u_*)) < 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

erfüllt ist. Dabei ergibt sich auf Grund von (3.83) und (3.87)

$$\begin{aligned} & F_x(x_*, u_*)(x_0 + \varepsilon x_1) + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j} (F(x_*, u_{0j}) - F(x_*, u_*)) \\ & + \varepsilon \sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^{m_s} \gamma_{sj} (F(x_*, u_{sj}) - F(x_*, u_*)) = 0. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Somit besitzt das aus dem Vektor $x_0 + \varepsilon x_1$, den Punkten $u_{01}, \dots, u_{lm_l} \in U$ und den Zahlen $\gamma_{01}, \dots, \gamma_{0m_0}, \varepsilon\gamma_{11}, \dots, \varepsilon\gamma_{lm_l}$ bestehende System die geforderten Eigenschaften (3.58) - (3.60).

□

3.2 OPTIMALE STEUERUNG MIT ZUSTANDSBESCHRÄNKUNGEN

Die Formulierung des Maximumprinzips und dessen Beweis erfolgt nach [20]. Weitere Literaturquellen, in denen das Maximumprinzip mit Zustandsbeschränkungen behandelt wird, sind [4], [16], [36] und [38]. Die Optimalitätsbedingungen sind allerdings teilweise anders formuliert.

3.2.1 DAS MAXIMUMPRINZIP

Der Zustand eines dynamischen Systems kann durch n Zustandsvariablen, die zu einem Vektor zusammengefasst werden, beschrieben werden:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (3.90)$$

Der Zustand ändert sich im zeitlichen Verlauf, daher sind die Zustandsvariablen als zeitabhängige Größe $x_i(t)$ zu interpretieren. Zu jedem Zeitpunkt kann durch die Angabe von Werten für Kontrollvariablen (Steuervariablen) in das System eingegriffen werden. Die Kontrollvariablen werden zum Vektor

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_r) \in U \subset \mathbb{R}^r \quad (3.91)$$

zusammengefasst. Zulässige Kontrollen sind beliebige messbare beschränkte Vektorfunktionen, die Werte aus der Menge U annehmen. Wie sich die Wahl der Werte der Kontrolle auf den Zustand des Systems auswirkt, wird an den Stetigkeitsstellen von u durch eine Differentialgleichung beschrieben (Bewegungsgleichung):

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)) \quad (3.92)$$

Dabei ist $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und nach x stetig differenzierbar. An Unstetigkeitsstellen von u werden die differenzierbaren Teile der Zustandstrajektorie stetig zusammengesetzt. Weiters sind der Anfangs- und Endwert des Zustandes in dem betrachteten Zeitraum $[t_0, t_1]$ vorgegeben:

$$h_0(x(t_0)) = 0, \quad h_1(x(t_1)) = 0 \quad (3.93)$$

wobei $h_l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{s_l}$ ($l = 0, 1$) wiederum stetig und nach x stetig differenzierbar sind.

Für Zustandsvariablen können verschiedene Restriktionen in Form von Ungleichungen vorliegen:

$$g_i(t, x(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.94)$$

Die verwendeten Funktionen $g_i: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig und stetig differenzierbar nach x . Die Steuerung des Systems soll so erfolgen, dass im betrachteten Zeitraum $[t_0, t_1]$ eine vorgegebene Zielfunktion minimal wird:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt \rightarrow \inf \quad (3.95)$$

Die Funktion $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ ist dabei stetig und nach x stetig differenzierbar.

Bedingungen (3.90) bis (3.95) stellen ein kontrolltheoretisches Problem dar. Zur Lösung so eines Problems kann das Maximumprinzip, das notwendigen Bedingungen für eine optimale Lösung umfasst, verwendet werden. Dazu werden zuerst die Pontrjaginsche Funktion H und die Hamiltonfunktion \mathcal{H} definiert:

$$H(t, x, u, \lambda, \lambda_0) = \lambda^T \varphi(t, x, u) - \lambda_0 f(t, x, u) \quad (3.96)$$

$$\mathcal{H}(t, x, \lambda, \lambda_0) = \sup_{u \in U} H(t, x, u, \lambda, \lambda_0) \quad (3.97)$$

λ_0 ist eine reelle, nichtnegative Konstante und $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ eine stückweise stetig differenzierbare adjungierte Funktion (Kozustand).

Satz 3.7 (Maximumprinzip)

Es sei $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ ein optimaler Steuerprozess für das Problem (3.90) bis (3.95). Dann existieren eine Zahl $\lambda_0 \geq 0$, Vektoren $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$, eine Vektorfunktion $\lambda(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und auf den Mengen $T_i = \{t \in [t_0, t_1] \mid g_i(t, x_*(t)) = 0\}$ konzentrierte nichtnegative reguläre Maße μ_i , $i = 1, \dots, k$, auf $[t_0, t_1]$ (wobei diese Größen nicht gleichzeitig verschwinden) derart, dass Folgendes gilt:

Die Vektorfunktion $\lambda(\cdot)$ ist Lösung der Integralgleichung

$$\begin{aligned} \lambda(t) = & -h_1'^* (x_*(t_1)) l_1 + \int_t^{t_1} H_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), \lambda(\tau), \lambda_0) d\tau \\ & - \sum_{i=1}^k \int_t^{t_1} g_{ix}(\tau, x_*(\tau)) d\mu_i \end{aligned} \quad (3.98)$$

mit

$$\lambda(t_0) = h_0'^* (x_*(t_0)) l_0, \quad (3.99)$$

wobei $h_0'^*$ und $h_1'^*$ jeweils die transponierte Jacobi-Matrix bezeichnen.

Für fast alle t aus $[t_0, t_1]$ ist folgende Gleichung erfüllt:

$$H(t, x_*(t), u_*(t), \lambda(t), \lambda_0) = \mathcal{H}(t, x_*(t), \lambda(t), \lambda_0) \quad (3.100)$$

Aus dem Maximumprinzip können Eigenschaften optimaler Lösungen analytisch abgeleitet werden. Für Kontrollmodelle, die weitere Voraussetzungen erfüllen, existieren auch hinreichende Bedingungen für optimale Lösungen (siehe [4], [16], [20], [36]).

3.2.2 UMFORMULIERUNG DES PROBLEMS

Um das Maximumprinzip zu beweisen, ist es notwendig das Problem (3.90) bis (3.95) so umzuformulieren, dass Satz 3.6 anwendbar ist.

Mit \mathcal{U} wird dabei die Menge aller zulässigen Steuerungen bezeichnet:

$$\mathcal{U} = \left\{ u(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1]) \mid u(t) \in U \text{ fast überall} \right\} \quad (3.101)$$

Die Abbildung $F : C^n([t_0, t_1]) \times \mathcal{U} \rightarrow C^n([t_0, t_1]) \times \mathbb{R}^{s_0} \times \mathbb{R}^{s_1}$ sei definiert durch

$$\begin{aligned} F(x(\cdot), u(\cdot)) &= (y(\cdot), a_0, a_1) \text{ mit} \\ y(t) &= x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \\ a_0 &= h_0(x(t_0)), a_1 = h_1(x(t_1)). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Schließlich seien die Funktionen G_i auf $C^n([t_0, t_1])$ festgelegt durch

$$G_i(x(\cdot)) = \max_{t \in [t_0, t_1]} g_i(t, x(t)), \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.103)$$

Dann kann das Problem (3.90) bis (3.95) angeschrieben werden als

$$\begin{aligned} J(x(\cdot), u(\cdot)) &\rightarrow \inf \\ F(x(\cdot), u(\cdot)) &= 0 \\ G_i(x(\cdot)) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, k \\ u(\cdot) &\in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Diese Problemstellung hat jetzt die Gestalt, dass sich Satz 3.6 anwenden lässt, wenn die dort formulierten Voraussetzungen gelten. Es lässt sich zeigen, dass die Abbildung $x(\cdot) \rightarrow F(x(\cdot), u(\cdot))$ stetig Fréchet-differenzierbar ist und dass die Ableitung im Punkt $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ folgende Form hat

$$\begin{aligned}
F_{x(\cdot)}(x_*(\cdot), u_*(\cdot))x(\cdot) &= (y(\cdot), a_0, a_1) \quad \text{mit} \\
y(\cdot) &= x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) d\tau \\
a_0 &= h_0'(x_*(t_0))x(t_0), \quad a_1 = h_1'(x_*(t_1))x(t_1)
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Ebenso ist das Funktional J als Funktion von $x(\cdot)$ stetig Fréchet-differenzierbar und die Ableitung im Punkt $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ lautet

$$\left\langle J_{x(\cdot)}(x_*(\cdot), u_*(\cdot)), x(\cdot) \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} (f_x(t, x_*(t), u_*(t)) | x(t)) dt \tag{3.106}$$

Schließlich sind die Funktionen G_i auf $C^n([t_0, t_1])$ regulär lokalkonvex und das Subdifferential im Punkt $x_*(\cdot)$ enthält genau die linearen stetigen Funktionale x^* über $C^n([t_0, t_1])$, die man in der Gestalt

$$\left\langle x^*, x(\cdot) \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} g_{ix}(t, x_*(t))^T x(t) d\tilde{\mu}_i \tag{3.107}$$

darstellen kann, wobei $\tilde{\mu}_i$ ein nichtnegatives Maß auf $[t_0, t_1]$ ist, das auf der Menge

$$\tilde{T}_i = \left\{ t \in [t_0, t_1] \mid g_i(t, x_*(t)) = G_i(x_*(\cdot)) \right\} \tag{3.108}$$

konzentriert ist und die Totalvariation Eins besitzt.

Es bleibt also noch offen, dass die dritte Voraussetzung von Satz 3.6 für das Problem (3.90) bis (3.95) erfüllt ist. Das wird in Abschnitt 3.2.4, mit Hilfe der in 3.2.3 formulierten Lemmata, gezeigt.

3.2.3 VORBEREITENDE LEMMATA

Es sei $y(\cdot)$ eine messbare beschränkte Abbildung des Intervalls $[t_0, t_1]$ in einen endlichdimensionalen Raum, M eine messbare Teilmenge dieses Intervalls und $\chi_M(\cdot)$ die charakteristische Funktion der Menge M , d. h.

$$\chi_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in M \\ 0 & \text{für } t \notin M \end{cases} \tag{3.109}$$

Weiters werden mit $Y(t)$ und $Y_M(t)$ folgende Stammfunktionen der Vektorfunktionen $y(t)$ bzw. $\chi_M(t)y(t)$ bezeichnet:

$$Y(t) = \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau, \quad Y_M(t) = \int_{t_0}^t \chi_M(\tau) y(\tau) d\tau \quad (3.110)$$

Lemma 3.4

Zu jeder auf $[t_0, t_1]$ definierten beschränkten messbaren Vektorfunktion $y(t)$ und jedem $\delta > 0$ kann man eine einparametrische Familie $\{M(\alpha)\} = \{M(\alpha; y(\cdot), \delta)\}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) messbarer Teilmengen des Intervalls $[t_0, t_1]$ konstruieren, dass folgende Beziehungen gelten:

$$\text{meas } M(\alpha) = \alpha(t_1 - t_0), \quad M(\alpha') \subset M(\alpha) \quad \text{für } \alpha' \leq \alpha, \quad (3.111)$$

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} |Y_{M(\alpha)}(t) - Y_{M(\alpha')}(t) - (\alpha - \alpha')Y(t)| \leq \delta |\alpha - \alpha'|. \quad (3.112)$$

Beweis

Jede beschränkte messbare Vektorfunktion ist gleichmäßiger Grenzwert von „einfachen“ Vektorfunktionen, von denen jede nur eine endliche Menge von Werten annimmt. Offenbar genügt es, das Lemma nur für solche einfachen Vektorfunktionen zu beweisen. Denn zu einer vorgegebenen beschränkten messbaren Vektorfunktion $y(t)$ lässt sich stets eine einfache Vektorfunktion $\tilde{y}(t)$ angeben mit

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} |y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \frac{\delta}{t_1 - t_0} \quad (3.113)$$

Wenn das Lemma für einfache Vektorfunktionen richtig ist, so kann man eine Familie $M(\alpha) = M(\alpha; \tilde{y}(\cdot), \delta)$ messbarer Teilmengen des Intervalls $[t_0, t_1]$ konstruieren. Ist dann $\alpha \geq \alpha'$, so gilt wegen (3.111) und (3.113)

$$\begin{aligned} & |Y_{M(\alpha)}(t) - \tilde{Y}_{M(\alpha)}(t) - Y_{M(\alpha')}(t) + \tilde{Y}_{M(\alpha')}(t)| \\ &= |Y_{M(\alpha) \setminus M(\alpha')}(t) - \tilde{Y}_{M(\alpha) \setminus M(\alpha')}(t)| \leq \delta |\alpha - \alpha'| \end{aligned} \quad (3.114)$$

und

$$\left|(\alpha - \alpha')(Y(t) - \tilde{Y}(t))\right| \leq \delta |\alpha - \alpha'|. \quad (3.115)$$

Durch Vergleichen dieser beiden Ungleichungen mit (3.112) erhält man

$$\left|Y_{M(\alpha)}(t) - \tilde{Y}_{M(\alpha)}(t) - (\alpha - \alpha')Y(t)\right| \leq 3\delta |\alpha - \alpha'|, \quad (3.116)$$

also $M(\alpha) = M(\alpha; y(\cdot), 3\delta)$.

Es sei also $y(t)$ eine einfache Vektorfunktion. Für die weiteren Betrachtungen wird für eine messbare Teilmenge A des Intervalls $[t_0, t_1]$ mit positivem Maß $meas A$ die Funktion

$$X_A(t) = \int_{t_0}^t \chi_A(\tau) d\tau \quad (3.117)$$

definiert. Diese stetige, monoton wachsende Funktion läuft von Null bis $meas A$. Weiters sei $t(\alpha)$ der zu t_0 nächstgelegene Punkt des Intervalls $[t_0, t_1]$, für den $X_A(t) = \alpha meas A$ gilt. Mit $(A)_\alpha$ wird dann der Durchschnitt der Menge A mit dem Intervall $[t_0, t(\alpha)]$ bezeichnet. Es gelten die beiden Beziehungen

$$y(t) = \sum_j y_j \chi_{A_j}(t) \text{ und } \max_j |y_j| = C. \quad (3.118)$$

Wird das Intervall $[t_0, t_1]$ in gleiche Teile $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ zerlegt, deren Länge höchstens $\delta/(2C)$ ist, dann ist

$$M(\alpha) = \bigcup_{i,j} (A_j \cap \Delta_i)_\alpha \quad (3.119)$$

die gesuchte Menge, denn es gilt

$$meas M(\alpha) = \sum_{i,j} meas (A_j \cap \Delta_i)_\alpha = \alpha \sum_{i,j} meas (A_j \cap \Delta_i) = \alpha (t_1 - t_0) \quad (3.120)$$

und aus der Ungleichung $\alpha \geq \alpha'$ folgen die Beziehungen $(A_j \cap \Delta_i)_{\alpha'} \subset (A_j \cap \Delta_i)_\alpha$ und $M(\alpha') \subset M(\alpha)$. Schließlich gilt

$$\int_{(A_j \cap \Delta_i)_{\alpha'}} y(t) dt = \alpha \int_{(A_j \cap \Delta_i)} y(t) dt = \alpha y_j meas (A_j \cap \Delta_i), \quad (3.121)$$

weil die Vektorfunktion $y(t)$ auf den Mengen A_j konstant und gleich y_j ist. Daraus folgt, dass in den Endpunkten der Intervalle Δ_i die Werte der Vektorfunktionen $(\alpha - \alpha')Y(t)$ und $Y_{M(\alpha)}(t) - Y_{M(\alpha')}(t)$ übereinstimmen. Für $\Delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$ und $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| Y_{M(\alpha)}(t) - Y_{M(\alpha')}(t) - (\alpha - \alpha')Y(t) \right| \\ & \leq |\alpha - \alpha'| \left| \int_{\tau_i}^t y(\tau) d\tau \right| + \left| \int_{\tau_i}^t (\chi_{M(\alpha)}(\tau) - \chi_{M(\alpha')}(\tau)) y(\tau) d\tau \right| \\ & \leq 2C |\alpha - \alpha'| |t - \tau_i| \leq \delta |\alpha - \alpha'|. \end{aligned} \quad (3.122)$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas kann nun folgende allgemeine Aussage bewiesen werden.

Lemma 3.5

Es seien $y_i(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, \dots, m$ beschränkte messbare Vektorfunktionen. Dann existieren zu jedem $\delta > 0$ einparametrische Familien $M_1(\alpha), \dots, M_m(\alpha)$ messbarer Teilmengen des Intervalls $[t_0, t_1]$, wobei der Parameter α Werte zwischen 0 und $1/m$ annimmt, dass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} & \text{meas } M_i(\alpha) = \alpha(t_1 - t_0) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m, 0 \leq \alpha \leq 1/m \\ & M_i(\alpha) \cap M_k(\alpha') = \emptyset, M_i(\alpha') \subset M_i(\alpha) \quad \text{für } 0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq 1/m, i \neq k \\ & \max_{t \in [t_0, t_1]} |Y_{iM_i(\alpha)}(t) - Y_{iM_i(\alpha')}(t) - (\alpha - \alpha')Y_i(t)| \leq \delta |\alpha - \alpha'| \\ & \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m, 0 \leq \alpha, \alpha' \leq 1/m \end{aligned} \quad (3.123)$$

Beweis

Es sei $n = n_1 + \dots + n_m$. Dann ist $z(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$ eine messbare beschränkte Abbildung des Intervalls $[t_0, t_1]$ in \mathbb{R}^n . Sei $\{M(\alpha)\}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) eine Familie von messbaren Teilmengen des Intervalls $[t_0, t_1]$, die gemeinsam mit $z(\cdot)$ und δ den Bedingungen von Lemma 3.4 genügen. Weiterhin sei $0 \leq \alpha \leq 1/m$. Setzt man

$$M_i(\alpha) = M((i-1)/m + \alpha) \setminus M((i-1)/m), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.124)$$

so sind $M_i(\alpha), i = 1, \dots, m$ die gesuchten Familien. Offensichtlich sind für beliebige $i \neq k, 0 \leq \alpha, \alpha' \leq 1/m$ die Mengen $M_i(\alpha)$ und $M_k(\alpha')$ disjunkt. Es ist

meas $M_i(\alpha) = \alpha(t_1 - t_0)$ und für $0 \leq \alpha' \leq \alpha \leq 1/m$ gilt $M_i(\alpha') \subset M_i(\alpha)$. Die letzte Behauptung des Lemmas folgt ebenfalls aus Lemma 3.4 und der Tatsache, dass für jeden Vektor $z = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^n$, $y_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, m$, die Ungleichungen $|y_i| \leq |z|$, $i = 1, \dots, m$, gelten. \square

3.2.4 KONSTRUKTION DER ABBILDUNG v

Für (3.90) bis (3.95) muss gezeigt werden, dass diese Problemstellung die in der dritten Voraussetzung von Satz 3.6 angeführten Eigenschaften besitzt. Da die Operatoren h_0 und h_1 stetig Fréchet-differenzierbar und von $u(\cdot)$ unabhängig sind, genügt es, Folgendes zu beweisen:

Es seien $u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)$ zulässige Steuerungen und $\delta > 0$. Dann existieren eine Umgebung $V \subset C^n([t_0, t_1])$ des Punktes $x_*(\cdot)$, eine Zahl $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung $a \rightarrow v(a)(\cdot)$ der Menge

$$\varepsilon\Sigma^m = \left\{ a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m \mid \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^m \alpha_j \leq \varepsilon \right\} \quad (3.125)$$

in \mathcal{U} so, dass

$$v(0)(t) = u_*(t) \quad \text{für fast alle } t \quad (3.126)$$

und für alle $x(\cdot), x'(\cdot) \in V$, $a, a' \in \varepsilon\Sigma^m$ die beiden folgenden Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [t_0, t_1]} \left| \int_{t_0}^t \left[\varphi(\tau, x(\tau), v(a)(\tau)) - \varphi(\tau, x'(\tau), v(a')(\tau)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))(x(\tau) - x'(\tau)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{j=1}^m (\alpha_j - \alpha'_j) \left(\varphi(\tau, x_*(\tau), u_j(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right] d\tau \right| \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\leq \delta \left(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_C + \sum_{j=1}^m |\alpha_j - \alpha'_j| \right)$$

$$\begin{aligned} & J(x(\cdot), v(a)(\cdot)) - J(x(\cdot), u_*(\cdot)) \\ & - \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(J(x(\cdot), u_j(\cdot)) - J(x(\cdot), u_*(\cdot)) \right) \leq \delta \sum_{j=1}^m \alpha_j \end{aligned} \quad (3.128)$$

Es seien also die zulässigen Steuerungen $u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)$ und $\delta > 0$ gegeben. Man betrachte die $(n+1)$ -dimensionalen Vektorfunktionen

$$\begin{aligned} y_j(t) &= \left(\varphi(t, x_*(t), u_j(t)) - \varphi(t, x_*(t), u_*(t)) \right), \\ f(t, x_*(t), u_j(t)) &- f(t, x_*(t), u_*(t)). \end{aligned} \quad (3.129)$$

Diese sind messbar und beschränkt, weil die Steuerungen $u_*(t), u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)$ messbar und beschränkt und die Abbildungen φ und f stetig sind. Daher lässt sich mit Hilfe von Lemma 3.5 eine einparametrische Familie $\{M_j(\alpha)\}$ ($0 \leq \alpha \leq 1/m$), $j=1, \dots, m$, messbarer Teilmengen des Intervalls $[t_0, t_1]$ konstruieren mit

$$\begin{aligned} M_j(\alpha) \cap M_k(\alpha') &= \emptyset \quad \text{für } j \neq k, \\ M_j(\alpha') &\subset M_j(\alpha) \quad \text{für } \alpha' \leq \alpha, \\ \text{meas } M_j(\alpha) &= \alpha(t_1 - t_0), \\ \left| Y_{jM_j(\alpha)}(t) - Y_{jM_j(\alpha')}(t) - (\alpha - \alpha') Y_j(t) \right| &\leq \frac{\delta}{2} |\alpha - \alpha'| \end{aligned} \quad (3.130)$$

für alle $t \in [t_0, t_1]$, $0 \leq \alpha, \alpha' \leq 1/m$. Sei nun

$$Q^m = \left\{ a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq \alpha_j \leq 1/m \right\} \quad (3.131)$$

und für jedes $a \in Q^m$ folgende Vektorfunktion definiert:

$$v(a)(t) = u_*(t) + \sum_{j=1}^m \chi_{M_j(\alpha_j)}(t) (u_j(t) - u_*(t)). \quad (3.132)$$

Dann wird im Folgenden bewiesen, dass $a \rightarrow v(a)(\cdot)$ die gesuchte Abbildung ist.

Da die Mengen $M_j(\alpha_j)$, $j=1, \dots, m$, paarweise disjunkt sind, gilt für jede auf $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^r$ gegebene Vektorfunktion g die Beziehung

$$g(t, v(a)(t)) = g(t, u_*(t)) + \sum_{j=1}^m \chi_{M_j(\alpha_j)}(t) (g(t, u_j(t)) - g(t, u_*(t))). \quad (3.133)$$

Aus der Definition folgt, dass für jedes $a \in Q^m$ die Vektorfunktionen $t \rightarrow v(a)(t)$ messbar und beschränkt sind und dass sie Werte aus der Menge U annehmen. Außerdem gilt offensichtlich $v(0)(t) \equiv u_*(t)$.

Weil alle Steuerungen $u_*(t), u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)$ beschränkt sind, sind ihre Werte in einer kompakten Menge $U_1 \subset \mathbb{R}^r$ enthalten. Nützt man darüber hinaus die Stetigkeit von φ und f aus, so kann man ein $\sigma > 0$ angeben, dass die Ungleichungen

$$|\varphi(t, x, u) - \varphi(t, x_*(t), u)| \leq \frac{\delta}{2(t_1 - t_0)} \quad (3.134)$$

$$|f(t, x, u) - f(t, x_*(t), u)| \leq \frac{\delta}{8(t_1 - t_0)} \quad (3.135)$$

$$|\varphi(t, x, u) - \varphi(t, x', u) - \varphi_x(t, x_*(t), u)(x - x')| \leq \frac{\delta|x - x'|}{2(t_1 - t_0)} \quad (3.136)$$

für alle t, x, x', u mit $|x - x_*(t)| < \sigma$, $|x' - x_*(t)| < \sigma$, $u \in U_1$ erfüllt sind. Weiters setzt man

$$V = \left\{ x(\cdot) \in C^n([t_0, t_1]) \mid \|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C < \sigma \right\} \quad (3.137)$$

und wählt $\varepsilon > 0$ so, dass $\varepsilon \leq 1/m$ und

$$\varepsilon(t_1 - t_0) \max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ u \in U_1}} |\varphi_x(t, x_*(t), u)| \leq \frac{\delta}{4} \quad (3.138)$$

gelten. Dabei ist $|\varphi_x|$ die Operator-Norm von φ_x als linearer Operator aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n .

Es seien $x(\cdot), x'(\cdot) \in V$, $a, a' \in \varepsilon \Sigma^m$ (und damit $a, a' \in Q^m$). Dann erhält man

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{t_0}^t \left[\varphi(\tau, x(\tau), v(a)(\tau)) - \varphi(\tau, x'(\tau), v(a')(\tau)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))(x(\tau) - x'(\tau)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sum_{j=1}^m (\alpha_j - \alpha_j') \left(\varphi(\tau, x_*(\tau), u_j(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right] d\tau \right| \\
& \leq \left| \int_{t_0}^t \left[\varphi(\tau, x(\tau), v(a)(\tau)) - \varphi(\tau, x'(\tau), v(a)(\tau)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \varphi_x(\tau, x_*(\tau), v(a)(\tau))(x(\tau) - x'(\tau)) \right] \right| \\
& \quad + \left| \int_{t_0}^t \left[\left(\varphi_x(\tau, x_*(\tau), v(a)(\tau)) - \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) (x(\tau) - x'(\tau)) \right] d\tau \right| \quad (3.139) \\
& \quad + \left| \int_{t_0}^t \left[\varphi(\tau, x'(\tau), v(a)(\tau)) - \varphi(\tau, x'(\tau), v(a')(\tau)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \varphi(\tau, x_*(\tau), v(a)(\tau)) + \varphi(\tau, x_*(\tau), v(a')(\tau)) \right] d\tau \right| \\
& \quad + \left| \int_{t_0}^t \left[\varphi(\tau, x_*(\tau), v(a)(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), v(a')(\tau)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sum_{j=1}^m (\alpha_j - \alpha_j') \left(\varphi(\tau, x_*(\tau), u_j(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right] d\tau \right|
\end{aligned}$$

Jeder der vier Summanden im rechten Teil der letzten Ungleichung wird nun einzeln abgeschätzt. Wegen (3.136) ist der erste Summand kleiner oder gleich

$$\frac{\delta}{2} \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_C. \quad (3.140)$$

Der zweite Summand ist wegen (3.133) gleich

$$\left| \int_{t_0}^t \left(\sum_{j=1}^m \chi_{M_j(\alpha_j)}(\tau) \right) \left(\varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_j(\tau)) - \varphi_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) (x(\tau) - x'(\tau)) d\tau \right| \quad (3.141)$$

und lässt sich wegen (3.138) nach oben abschätzen durch

$$2 \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_C \left(\max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ u \in U_1}} |\varphi_x(t, x_*(t), u)| \right) \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^m \chi_{M_j(\alpha_j)}(t) \right) dt \leq \frac{\delta}{2} \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_C. \quad (3.142)$$

Den dritten Summanden kann man, wieder unter Ausnutzung von (3.133) auf folgende Form bringen:

$$\left| \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^m \left(\chi_{M_j(\alpha_j)}(\tau) - \chi_{M_j(\alpha'_j)}(\tau) \right) \left(\varphi(\tau, x'(\tau), u_j(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_j(\tau)) \right) d\tau \right|. \quad (3.143)$$

Wegen (3.134) ist dieser Ausdruck nicht größer als

$$\frac{\delta}{2(t_1 - t_0)} \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} \left| \chi_{M_j(\alpha_j)}(t) - \chi_{M_j(\alpha'_j)}(t) \right| dt = \frac{\delta}{2} \sum_{j=1}^m |\alpha_j - \alpha'_j|. \quad (3.144)$$

Schließlich lässt sich der vierte Summand mittels (3.133) umformen zu:

$$\left| \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t \left[\left(\chi_{M_j(\alpha_j)}(\tau) - \chi_{M_j(\alpha'_j)}(\tau) \right) \left(\varphi(\tau, x_*(\tau), u_j(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) - (\alpha_j - \alpha'_j) \left(\varphi(\tau, x_*(\tau), u_j(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right) \right] d\tau \right|. \quad (3.145)$$

Die Differenz $\varphi(\tau, x_*(\tau), u_j(\tau)) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))$ enthält die ersten n Koordinaten der Vektorfunktion $y_j(\tau)$. Daher ist wegen (3.130) der oben stehende Ausdruck nicht größer als

$$\left| \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t \left[\left(\chi_{M_j(\alpha_j)}(\tau) - \chi_{M_j(\alpha'_j)}(\tau) \right) y_j(\tau) - (\alpha_j - \alpha'_j) y_j(\tau) \right] d\tau \right| \leq \sum_{j=1}^m \left| Y_{jM_j(\alpha_j)}(t) - Y_{jM_j(\alpha'_j)}(t) - (\alpha_j - \alpha'_j) Y_j(t) \right| \leq \frac{\delta}{2} \sum_{j=1}^m |\alpha_j - \alpha'_j|. \quad (3.146)$$

Aus (3.140), (3.142), (3.144) und (3.146) folgt, dass die linke Seite in (3.139) für alle t den Wert

$$\frac{\delta}{2} \left(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_C + \sum_{j=1}^m |\alpha_j - \alpha'_j| \right) \quad (3.147)$$

nicht übersteigt. Die Beziehung (3.127) ist damit bewiesen.

Wegen (3.130), (3.133) und (3.135) gilt schließlich

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, x(t), v(a)(t)) - f(t, x(t), u_*(t)) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(f(t, x(t), u_j(t)) - f(t, x(t), u_*(t)) \right) \right] dt \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} \left[\chi_{M_j(\alpha_j)}(t) \left(f(t, x(t), u_j(t)) - f(t, x(t), u_*(t)) \right) \right. \\
& \quad \left. - \alpha_j \left(f(t, x(t), u_j(t)) - f(t, x(t), u_*(t)) \right) \right] dt \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left| \int_{t_0}^{t_1} \left(\chi_{M_j(\alpha_j)}(t) y_j(t) - \alpha_j y_j(t) \right) dt \right| \tag{3.148} \\
&+ \sum_{j=1}^m \left[\int_{t_0}^{t_1} \chi_{M_j(\alpha_j)}(t) \left(\left| f(t, x(t), u_j(t)) - f(t, x_*(t), u_j(t)) \right| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left| f(t, x(t), u_*(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right| \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \alpha_j \int_{t_0}^{t_1} \left(\left| f(t, x(t), u_j(t)) - f(t, x_*(t), u_j(t)) \right| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left| f(t, x(t), u_*(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \right| \right) dt \right] \leq \delta \sum_{j=1}^m \alpha_j
\end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung (3.128) ebenfalls bewiesen. Damit erfüllt das Problem (3.90) bis (3.95) alle in Satz 3.6 genannten Voraussetzungen.

3.2.5 BEWEIS DES MAXIMUMPRINZIPS

Die Lagrange-Funktion des Problems (3.90) bis (3.95) lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \mid d\nu \right) \\
& + l_0^T h_0(x(t_0)) + l_1^T h_1(x(t_1)) + \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i(x(\cdot)) \tag{3.149}
\end{aligned}$$

wobei ν ein reguläres Vektormaß auf $[t_0, t_1]$ ist. Nach Satz 3.6 existieren nicht gleichzeitig verschwindende Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$, $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$ und ein Vektormaß ν mit

$$0 \in \partial_{x(\cdot)} \mathcal{L}(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \dots) \tag{3.150}$$

$$\mathcal{L}(x_*(\cdot), u_*(\cdot), \dots) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \mathcal{L}(x_*(\cdot), u(\cdot), \dots) \tag{3.151}$$

$$\lambda_i G_i(x_*(\cdot)) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (3.152)$$

Als abkürzende Bezeichnungen werden im Folgenden $f_x = f_x(t, x_*(t), u_*(t))$, $h_0' = h_0'(x_*(t_0))$, usw. verwendet. Unter Verwendung von (3.107) für die Subdifferenziale der Funktionen G_i folgt aus (3.150), (3.105) und (3.106), dass für alle $x_*(\cdot) \in C^n([t_0, t_1])$ die Gleichung

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} f_x^T x(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \varphi_x x(\tau) d\tau \mid d\nu \right) \\ & + h_0^T h_0'(x(t_0)) + h_1^T h_1'(x(t_1)) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \int_{t_0}^{t_1} (g_{ix} \mid x(t)) d\tilde{\mu}_i = 0 \end{aligned} \quad (3.153)$$

erfüllt ist, wobei $\tilde{\mu}_i, i = 1, \dots, k$, auf den Mengen $\tilde{T}_i = \{t \in [t_0, t_1] \mid g_i(t, x_*(t)) = G_i(x_*(\cdot))\}$ konzentrierte reguläre nichtnegative Maße der Totalvariation Eins sind. Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge im zweiten Summanden und Einführung der Bezeichnung $\mu_i = \lambda_i \tilde{\mu}_i$ erhält man aus (3.153)

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\lambda_0 f_x - \varphi_x^* \left(\int_t^{t_1} d\nu \right) \right) dt + d\nu + \sum_{i=1}^k g_{ix} d\mu_i \mid x(t) \right) \\ & + \left(h_0^T l_0 - \int_{t_0}^{t_1} d\nu \mid x(t_0) \right) + \left(h_1^T l_1 \mid x(t_1) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Da diese Gleichung für alle $x(\cdot) \in C^n([t_0, t_1])$ gilt, folgt mit Hilfe des Satzes von Rieß über die Eindeutigkeit der Darstellung eines linearen Funktionals im Raum $C^n([t_0, t_1])$ und

der Bezeichnung $\lambda(t) = \int_t^{t_1} d\nu$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -h_1^T l_1 + \int_t^{t_1} \left((\varphi_x^* \lambda(\tau) - \lambda_0 f_x) d\tau - \sum_{i=1}^k g_{ix} d\mu_i \right) \\ \lambda(t_0) &= h_0^T l_0. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Damit sind die Beziehungen (3.98) und (3.99) gezeigt.

Formel (3.151) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \left(\lambda_0 f(t, x_*(t), u_*(t)) dt - \left(\int_{t_0}^t \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) d\tau \middle| d\nu \right) \right) \\
& = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_1} \left(\lambda_0 f(t, x_*(t), u(t)) dt - \left(\int_{t_0}^t \varphi(\tau, x_*(\tau), u(\tau)) d\tau \middle| d\nu \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.156}$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^t \varphi(\tau, x_*(\tau), u(\tau)) d\tau \middle| d\nu \right) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\varphi(t, x_*(t), u(t)) \middle| \int_t^{t_1} d\nu \right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (\lambda(t) | \varphi(t, x_*(t), u(t))) dt.
\end{aligned} \tag{3.157}$$

Aus (3.156) und (3.157) folgt die Beziehung (3.100). Schließlich folgt aus $G_i(x_*(\cdot)) < 0$ wegen (3.152) die Gleichung $\lambda_i = 0$. Daher können unten den Maßen μ_i nur diejenigen von Null verschieden sind, solchen Indizes i entsprechen, für welche $G_i(x_*(\cdot)) = 0$ gilt. In diesem Fall erhält man

$$\tilde{T}_i = T_i = \left\{ t \in [t_0, t_1] \middle| g_i(t, x_*(t)) = 0 \right\}. \tag{3.158}$$

Daher kann man o. B. d. A. annehmen, dass alle Maße μ_i auf den Mengen T_i konzentriert sind. Damit ist das Maximumprinzip vollständig bewiesen.

□

4 MODELLIERUNG VON RÜSTEN UND PRODUKTION

In diesem Kapitel wird ein Modell zur Beschreibung von Rüst- und Produktionsvorgängen einer Maschine, auf der mehrere Produkte gefertigt werden, entwickelt. Die Modellierung erfolgt in Anlehnung an [22]. Der Rüstvorgang wird in einen Abrüstvorgang des Vorgängerprodukts und einen Aufrüstvorgang für das Nachfolgeprodukt unterteilt. Ein Produkt kann dann produziert werden, wenn der Aufrüstvorgang für dieses Produkt vollständig abgeschlossen ist. Der Fortschritt der Rüstvorgänge wird mit Hilfe eines Rüstzustandes beschrieben. Die Vorgänge auf der betrachteten Maschine sollen so geplant werden, dass nicht nur ein vorgegebener Bedarf ohne Lieferverzug gedeckt wird, sondern auch die dabei entstehenden Rüst- und Lagerkosten minimal sind. Nach der Festlegung von Annahmen für das Modell und Einführung der verwendeten Bezeichnungen wird in der Modellentwicklung auf Zielfunktion, dynamische Zusammenhänge von Größen über Differentialgleichungen und Nebenbedingungen eingegangen.

4.1 ANNAHMEN UND BEZEICHNUNGEN

Für das entwickelte Modell werden folgende Annahmen getroffen:

- Es wird eine Maschine betrachtet, auf der mehrere Produkte gefertigt werden. Zu einem Zeitpunkt können nicht gleichzeitig zwei Produkte gefertigt werden.
- Ein Produkt kann nur dann gefertigt werden, wenn der Rüstvorgang für dieses Produkt abgeschlossen ist.
- Die Produktionsrate ist für jedes Produkt nach oben hin beschränkt.
- Der Umrüstvorgang von einem Produkt auf ein anderes besteht aus einem Abrüstvorgang (z. B. Entfernen eines Werkzeugs) und einem Aufrüstvorgang (z. B. Anbringen eines neuen Werkzeugs). Die dafür benötigten Rüstzeiten und die entstehenden Rüstkosten sind produktspezifisch vorgegeben und konstant.
- Die Planung der Rüst- und Produktionsvorgänge erfolgt für einen vorgegebenen fixen Zeithorizont.
- Der Bedarf ist deterministisch und für jedes Produkt im Planungszeitraum durch eine stetige Funktion angegeben.
- Der Bedarf muss ohne Lieferverzug gedeckt werden. Die Vorproduktion auf Lager ist möglich.

Die folgenden Bezeichnungen werden für die weitere Modellierung verwendet:

- n Anzahl der Produkte
- i Produktindex ($i = 1, \dots, n$)
- $\vec{1} \in \mathbb{R}^n$ n -dimensionaler Vektor, dessen Komponenten alle 1 sind
- $[0, T]$ Planungszeitraum
- $y(t) \in \mathbb{R}^n$ $y_i(t)$ gibt den Lagerstand von Produkt i zum Zeitpunkt t an.
- $d(t) \in \mathbb{R}^n$ $d_i(t)$ gibt die Bedarfsrate von Produkt i zum Zeitpunkt t an.
- $p(t) \in \mathbb{R}^n$ $p_i(t)$ ist die Produktionsrate von Produkt i .
- $u(t) \in \mathbb{R}^n$ $u_i(t)$ ist die Aufrüstfunktion von Produkt i .
- $v(t) \in \mathbb{R}^n$ $v_i(t)$ ist die Abrüstfunktion von Produkt i .
- $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ $\xi_i(t)$ ist die Rüstzustandsfunktion von Produkt i .
- $t_R \in \mathbb{R}^n$ t_{Ri} ist die Abrüstzeit für Produkt i .
- $t_S \in \mathbb{R}^n$ t_{Si} ist die Aufrüstzeit für Produkt i .
- $c_i \in \mathbb{R}$ Produktionskapazität für Produkt i .
- $r_i \in \mathbb{R}$ Abrüstkcapazität für Produkt i .
- $s_i \in \mathbb{R}$ Aufrüstkcapazität für Produkt i .
- $C \in \mathbb{R}_n^n$ Produktionskapazitätsmatrix $C = \text{diag}(c_i)$
- $R \in \mathbb{R}_n^n$ Abrüstkcapazitätsmatrix $R = \text{diag}(r_i)$
- $S \in \mathbb{R}_n^n$ Aufrüstkcapazitätsmatrix $S = \text{diag}(s_i)$
- $k_l \in \mathbb{R}^n$ k_{li} gibt die Lagerkosten von Produkt i pro Mengeneinheit und Zeiteinheit an.
- $k_s \in \mathbb{R}^n$ k_{si} gibt die Rüstkosten für einen Aufrüst- und Abrüstvorgang von Produkt i an.

4.2 MODELLENTWICKLUNG

In diesem Modell wird ein System bestehend aus einer Maschine und mehreren Produkten betrachtet. Die Produktion hat so zu erfolgen, dass ein vorgegebener externer Bedarf ohne Lieferverzug gedeckt wird und die Summe aus Rüst- und Lagerkosten minimal ist.

4.2.1 MODELLENERUNG VON RÜSTVORGÄNGEN

Das System kann durch die Aufrüstfunktion $u(t)$ und die Abrüstfunktion $v(t)$ gesteuert werden. Beide Funktionen sind stückweise stetig; an den Unstetigkeitsstellen wird der rechtsseitige Grenzwert als Funktionswert definiert. Die Aufrüst- bzw. Abrüstfunktion eines Produktes gibt durch einen positiven Funktionswert an, ob zu einem Zeitpunkt t ein Aufrüst- bzw. Abrüstvorgang stattfindet. Ist der Funktionswert an der Stelle t gleich 0, so ist zu diesem Zeitpunkt kein Rüstvorgang für dieses Produkt aktiv. Negative Funktionswerte werden nicht zugelassen. Für die Auf- und Abrüstfunktion gelten also die Nichtnegativitätsbedingungen

$$\forall t \in [0, T]: u(t) \geq 0, v(t) \geq 0. \quad (4.1)$$

Je größer der Funktionswert der Auf- bzw. Abrüstfunktion desto schneller ist der Rüstvorgang. Der maximale Wert für die jede Komponente von $u(t)$ bzw. $v(t)$ ist 1. Damit nicht mehrere Rüstvorgänge gleichzeitig mit maximaler Geschwindigkeit stattfinden können, muss zusätzlich folgende Bedingung gelten:

$$\forall t \in [0, T]: \bar{1}^T (u(t) + v(t)) \leq 1 \quad (4.2)$$

Die Auf- und Abrüstfunktion des Produktes i beeinflussen den Rüstzustand $\xi_i(t)$ für ein Produkt. Der Zusammenhang wird durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \xi'_i(t) &= Su(t) - Rv(t) \\ \xi_i(0) &= 0, \xi_i(T) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

modelliert. Der Rüstzustand $\xi_i(t)$ gibt an, wie weit ein Auf- oder Abrüstvorgang für Produkt i schon fortgeschritten ist. Der Wertebereich für $\xi_i(t)$ ist $[0, 1]$. $\xi_i(t) = 0$ bedeutet, dass die Maschine nicht für Produkt i gerüstet ist.

Die Änderungsrate des Rüstzustandes von Produkt i kann maximal s_i betragen, der kleinstmögliche Wert ist $-r_i$. Erfolgt der Aufrüstvorgang mit maximaler Geschwindigkeit ($u_i = 1$), so soll die benötigte Zeit, um $\xi_i(t)$ von 0 auf 1 zu ändern, der vorgegebenen Aufrüstzeit entsprechen. Eine analoge Aussage wird für den Abrüstvorgang gefordert. Es gelten daher folgende Zusammenhänge:

$$r_i = \frac{1}{t_{Ri}}, s_i = \frac{1}{t_{Si}} \tag{4.4}$$

Der Rüstzustand der Maschine muss eindeutig sein, d. h. wenn die Maschine für ein Produkt vollständig vorbereitet ist, kann nicht für ein anderes Produkt aufgerüstet werden. Diese Restriktionen werden durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T]: \xi(t) &\geq 0 \\ \forall t \in [0, T]: \bar{1}^T \xi(t) &\leq 1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

beschrieben. Unter Berücksichtigung dieser Restriktionen könnte der Verlauf einer Rüstzustandsfunktion für ein Produkt wie in Abbildung 4.1 aussehen.

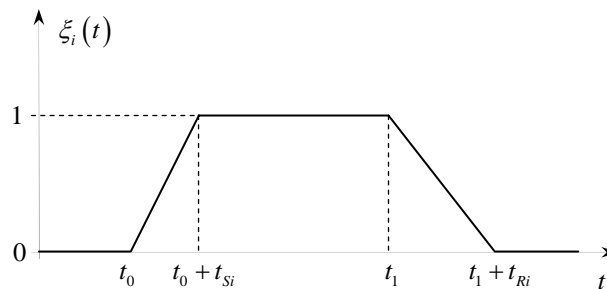


Abbildung 4.1 Rüstzustandsfunktion

Der Anfangswert der Rüstzustandsfunktion ist 0. Im Intervall $[t_0, t_0 + t_{Si}[$ findet der Aufrüstvorgang für Produkt i statt, die Änderung von ξ_i wird durch $\xi_i'(t) = s_i$ beschrieben. Bis zum Zeitpunkt t_1 bleibt der Rüstzustand erhalten, Produkt i könnte produziert werden. Im Intervall $[t_1, t_1 + t_{Ri}[$ wird wieder abgerüstet, die Änderung von ξ_i wird durch $\xi_i'(t) = -r_i$ beschrieben.

4.2.2 MODELLIERUNG DER PRODUKTIONSRATE

Für die Modellierung der Produktionsrate $p(t)$ werden diese Annahmen getroffen:

- Wenn die Maschine für ein Produkt fertig gerüstet ist, kann mit der Produktion begonnen werden. Ist der Rüstvorgang noch nicht vollständig abgeschlossen, so kann das entsprechende Produkt nicht gefertigt werden.
- Die Produktionsrate ist für jedes Produkt durch eine vorgegebene maximale Produktionskapazität beschränkt.

Die erste Annahme über den Zusammenhang von Rüstzustand und Produktionsrate wird durch folgende Gleichung modelliert:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : p_i(t)(1 - \xi_i(t)) = 0 \quad (4.6)$$

Eine positive Produktionsrate ist also nur dann möglich, wenn der dazugehörige Rüstzustand den Wert 1 annimmt.

Die zweite Annahme über die Beschränkung der Produktionsrate wird durch die Ungleichung

$$0 \leq p(t) \leq \bar{1} \quad (4.7)$$

modelliert. Produktspezifische Unterschiede bei der Produktionsrate lassen sich durch die Vorgabe von maximalen Produktionskapazitäten c_i einstellen.

4.2.3 MODELLIERUNG DES LAGERSTANDES UND DES BEDARFS

Der Lagerstand kann mit Hilfe der Lagerbilanzgleichung in differentieller Form beschrieben werden. Die Lageränderung entspricht der mit der Produktionskapazität gewichteten Produktionsrate abzüglich der Bedarfsrate $d(t)$, die durch eine stetige, stückweise differenzierbare Funktion beschrieben wird.

$$y'(t) = Cp(t) - d(t) \quad (4.8)$$

Um eine Produktion genau nach dem vorgegebenen Bedarf zu ermöglichen, muss der Bedarf kleiner oder gleich sein als die Produktionskapazität. Weiters wird angenommen, dass der Bedarf immer positiv ist. Es gelten daher folgende Einschränkungen:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : 0 < d_i(t) \leq c_i(t), \text{ meas} \{t \in [0, T] \mid d_i(t) = c_i(t)\} = 0 \quad (4.9)$$

Für das Integral der Bedarfsfunktion wird folgende Bezeichnung eingeführt:

$$D(t) = \int_0^t d(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

Die Lieferfähigkeit muss zu jedem Zeitpunkt für jedes Produkt gegeben sein, ein Lieferverzug ist in diesem Modell nicht erlaubt. Für den Lagerstand muss daher folgende Restriktion eingehalten werden:

$$y(t) \geq 0 \quad (4.11)$$

Zusätzlich sind für den Lagerstand ein Anfangslagerstand und ein gewünschter Endlagerstand am Ende der betrachteten Zeitperiode vorgegeben:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \geq 0 \\ y(T) &= y_T \geq 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die Differenz aus Anfangs- und Endlagerstand soll den Gesamtbedarf in der Periode nicht übersteigen:

$$y_0 - y_T < \int_0^T d(t) dt = D(T) \quad (4.13)$$

Wäre diese Bedingung für ein Produkt nicht erfüllt, so könnte der gesamte Bedarf aus dem vorhandenen Lager gedeckt werden. Die Fertigung dieses Produktes wäre nicht optimal, da nur höhere Lagerkosten und zusätzliche Rüstkosten entstehen.

Die Vorgabe des Endlagerstands ist für die Praxis notwendig, da bei Fehlen dieser Bedingung jede optimale Lösung (im Sinne von minimalen Rüst- und Lagerkosten) den Endlagerstand 0 liefern würde. Der Planungslauf für die nächste Zeitperiode würde dann für alle Produkte mit Lagerstand 0 starten, was bei simultanem Bedarf von mehreren Produkten zu Beginn der Periode keine machbare Lösung zulässt. Der Bedarf und der Endlagerstand müssen so gewählt werden, dass es in der zur Verfügung stehenden Zeit möglich ist, diese zu produzieren.

4.2.4 BERECHNUNG DER GESAMTKOSTEN

Ziel ist es, die entstehenden Gesamtkosten im Planungshorizont zu minimieren. Dabei werden Rüst- und Lagerkosten berücksichtigt. Die Produktionskosten pro Mengeneinheit

werden als konstant angenommen. Sie sind daher durch den Bedarf bestimmt und werden im Zielfunktional nicht berücksichtigt.

Die Gesamtlagerkosten können berechnet werden durch

$$K_I = \int_0^T k_I^T y(t) dt . \quad (4.14)$$

Der folgende Ausdruck gibt die gesamten Rüstkosten in der Periode an:

$$K_S = \int_0^T \bar{k}_S^T (u(t) + v(t)) dt \quad \text{mit} \quad \bar{k}_{S_i} = \frac{k_{S_i}}{t_{S_i} + t_{R_i}} . \quad (4.15)$$

Die Minimierung der Gesamtkosten führt daher auf

$$K = \int_0^T k_I^T y(t) + \bar{k}_S^T (u(t) + v(t)) dt \rightarrow \text{Min.} \quad (4.16)$$

5 OPTIMALE LÖSUNGEN BEI GEGEBENER LOSREIHENFOLGE

Das in Kapitel 4 formulierte Grundmodell (**Modell G**) zur Steuerung von Rüst- und Produktionsvorgängen ist ein kontrolltheoretisches Modell mit den Steuervariablen (Kontrollvariablen) $u(t)$, $v(t)$ (Auf- und Abrüstfunktionen) und $p(t)$ (Produktionsraten) und den Zustandsvariablen $y(t)$ (Lagerstand) und $\xi(t)$ (Rüstzustand). Das Zielfunktional (4.16) ist linear und der Einfluss der Steuervariablen auf die Zustandsvariablen wird durch die Differentialgleichungen (4.3) und (4.8) mit den Randbedingungen (4.12) beschrieben. Für die Steuervariablen gelten die Restriktionen (4.1), (4.2) und (4.7). Die Beschränkungen (4.5) und (4.11) sind reine Zustandsrestriktionen, während (4.6) eine gemischte Gleichheitsnebenbedingung darstellt. Da Satz 3.7 keine gemischten Gleichheitsbedingungen enthält, ist dieser auf das formulierte Grundmodell nicht anwendbar. Andere Literaturquellen wie z. B. [4], die gemischte Gleichheitsnebenbedingungen behandeln, sind ebenfalls hier nicht hilfreich, da (4.6) die dort geforderte Regularitätsbedingung nicht erfüllt.

Um Aussagen über die Struktur einer optimalen Lösung bei gegebener Losreihenfolge treffen zu können, werden daher zunächst zwei Teilprobleme betrachtet. Das erste Teilproblem betrachtet die Situation, in der die Maschine für ein Produkt vollständig gerüstet ist und produziert werden kann. Das zweite Teilproblem beschäftigt sich mit dem Übergang von der Produktion eines Produkts auf die Produktion eines anderen Produkts, also den Rüstvorgängen. Im folgenden Abschnitt werden alle möglichen Zustände aufgelistet und deren optimale Zusammensetzung diskutiert. Aus diesen Überlegungen wird das Grundmodell umformuliert, sodass es für die Optimierung in *MATLAB* zugänglich wird. Schließlich wird im letzten Abschnitt dieses Kapitels die Lösung einiger Testbeispiele explizit angegeben.

5.1 TEILPROBLEM 1: PRODUKTION

In diesem Teilproblem wird das Szenario betrachtet, in dem für ein Produkt j die Maschine bereits vollständig gerüstet ist und dieser Zustand in einem Intervall $[t_1, t_2]$ auch erhalten bleibt. D.h. für den Rüstzustand und die Auf- und Abrüstfunktionen gilt:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_1, t_2] : \xi_j(t) = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}, i \neq j : \xi_i(t) = 0 \\ \forall t \in [t_1, t_2] \forall i \in \{1, \dots, n\} : u_i(t) = v_i(t) = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Der Lagerstand von Produkt j zu Beginn bzw. Ende des betrachteten Intervalls sind fix vorgegebene Größen:

$$y_j(t_1) = y_{j1}, y_j(t_2) = y_{j2} \quad (5.2)$$

Wegen Bedingung (4.6) kann nur Produkt j produziert werden, für alle anderen Produkte ist die Produktionsrate gleich null.

5.1.1 MODELL FÜR TEILPROBLEM 1

Durch die zuvor beschriebenen Einschränkungen, bleiben vom Grundmodell nur wenige relevante Gleichungen übrig, die das Modell für dieses Teilproblem beschreiben (**Modell T1**). Da in dem betrachteten Intervall keine Rüstaktivitäten stattfinden und nur der Lagerstand von Produkt j beeinflusst werden kann, reduziert sich die Zielfunktion auf

$$K_I(j) = \int_{t_1}^{t_2} k_{lj} y_j(t) dt \rightarrow \text{Min.} \quad (5.3)$$

Die Differentialgleichung für den Lagerstand von Produkt j und ihre Randbedingungen sind gegeben durch

$$y_j'(t) = c_j p_j(t) - d_j(t) \text{ mit } y_j(t_1) = y_{j1} \geq 0, y_j(t_2) = y_{j2} > 0. \quad (5.4)$$

Als Nebenbedingungen sind nur mehr die Beschränkungen für die Produktionsrate und den Lagerstand von Produkt j anzuführen:

$$0 \leq p_j \leq 1, y_j(t) \geq 0. \quad (5.5)$$

Ein ähnliches Problem ist in [4] auf S. 241 angeführt. Die Zielfunktion enthält in dem dort formulierten Modell neben den linearen Lagerkosten auch lineare Produktionskosten und für den Lagerstand ist keine Endbedingung angegeben. Weiters wird für die Lösung, die als Übungsaufgabe gestellt wird, empfohlen eine stückweise stetige Kontrolle anzunehmen und den Fall $\lambda_0 = 1$ zu untersuchen. Diese beiden Annahmen werden zur Lösung des Problems (5.3) – (5.5) nicht getroffen.

5.1.2 NOTWENDIGE BEDINGUNGEN

Modell T1 ist ein lineares kontrolltheoretisches Modell mit der Kontrollvariablen p_j und der Zustandsvariablen y_j . Neben dem Zielfunktional (5.3) und der Differentialgleichung (5.4) gibt es zwei Nebenbedingungen an die Kontrolle und eine reine Zustandsbe-

schränkung – siehe (5.5). Die Kontrollrestriktionen legen den Steuerbereich $U = [0, 1]$ fest.

Die Pontrjaginsche Funktion ist nach (3.96) definiert als

$$H(t, y_j, p_j, \lambda_j, \lambda_0) = -\lambda_0 k_{lj} y_j + \lambda_j (c_j p_j - d_j). \quad (5.6)$$

Die notwendigen Bedingungen werden nach Satz 3.7 formuliert. Wird mit $(y_{j^*}(\cdot), p_{j^*}(\cdot))$ eine optimale Lösung des Kontrollproblems bezeichnet, so müssen folgende notwendigen Bedingungen gelten:

$$\lambda_j(t) = -l_2 + \int_t^{t_2} -\lambda_0 k_{lj} d\tau + \int_t^{t_2} d\mu \quad (5.7)$$

$$\lambda_j(t_1) = l_1 \quad (5.8)$$

$$H(t, y_j, p_j, \lambda, \lambda_0) = \sup_{p_j \in U} H(t, y_j, p_j, \lambda, \lambda_0) \quad (5.9)$$

Gleichung (5.7) kann umgeformt werden zu

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(t_2) - \lambda_0 k_{lj} (t_2 - t) + m(t) \quad \text{mit} \quad m(t) = \int_t^{t_2} d\mu. \quad (5.10)$$

Die Funktion m ist dabei eine nicht negative, monoton fallende, linksseitig stetige Funktion. Die adjungierte Funktion λ_j kann daher keine Sprünge nach oben aufweisen.

5.1.3 MÖGLICHE LÖSUNGEN

Um alle möglichen Lösungen zu charakterisieren, die den notwendigen Bedingungen (5.7) - (5.9) genügen, werden drei Fälle unterschieden:

Fall 1: $\exists \bar{\tau} > t_1 : \lambda_j(\bar{\tau}) > 0$

Sei $\tau_1 := \inf \{ \tau > t_1 \mid \lambda_j(\tau) > 0 \}$, dann gilt $\forall t \in]\tau_1, t_2] : \lambda_j(t) > 0$. Ein positiver Wert der adjungierten Funktion hat eine maximale Produktionsrate ($p_j = 1$) zur Folge. Da die Änderung des Lagerstandes $y_j' = c_j - d_j$ dann positiv ist, folgt $y_j > 0$. Weil das Maß μ auf die Menge, wo die Zustandsbeschränkung aktiv ist, konzentriert ist, ist die Funktion m konstant, solange der Lagerstand positiv ist ($m(t) = \bar{m}$). Als Gleichung für die adjungierte Funktion folgt aus (5.10) $\lambda_j(t) = \lambda_j(t_2) - \lambda_0 k_{lj} (t_2 - t) + \bar{m}$. Die Steigung dieser adjungierten

Funktion ist damit $\lambda_j' = \lambda_0 k_{ij}$ und positiv für den Fall $\lambda_0 > 0$. (Der Fall $\lambda_0 = 0$ wird später getrennt untersucht.) Die adjungierte Funktion bleibt also positiv für darauf folgende Zeitpunkte. Aus der Definition von τ_1 und der Eigenschaft der adjungierten Funktion, dass keine Sprünge nach oben möglich sind, folgt $\lambda_j(\tau_1) = 0$. Um das Zeitintervall $]t_1, \tau_1]$ zu untersuchen werden drei weitere Subfälle betrachtet:

- **Fall 1a:** $\tau_1 = t_1$

Die adjungierte Funktion ist in $]t_1, t_2]$ positiv und damit ist die Produktionsrate im gesamten Intervall maximal. Der Verlauf von Kontroll-, Zustands- und Ko-zustandsvariable ist in Abbildung 5.1 als Lösung 1a dargestellt.

- **Fall 1b:** $\tau_1 > t_1 \wedge \forall t \in]t_1, \tau_1[: \lambda_j(t) < 0$

Aus $\lambda_j < 0$ folgt eine minimale Produktionsrate ($p_j = 0$) im Intervall $]t_1, \tau_1[$. Die Änderung des Lagerstandes $y_j' = -d_j$ ist negativ, der Lagerstand im Inneren dieses Intervalls positiv. In Analogie zum Intervall $]t_1, t_2]$ folgt wiederum $\lambda_j' = \lambda_0 k_{ij}$. Diese Lösung ist als Lösung 1b in Abbildung 5.1 dargestellt.

- **Fall 1c:** $\tau_1 > t_1 \wedge \exists \tau_0 \in [t_1, \tau_1[: \lambda_j(t) \begin{cases} \equiv 0 & \text{für } t \in]\tau_0, \tau_1] \\ < 0 & \text{für } t \in]t_1, \tau_0] \end{cases}$

Für das Intervall $]t_1, \tau_0]$ folgt aus (5.10) $\lambda_0 k_{ij}(t_2 - t) - \lambda_j(t) = m(t)$. Die Funktion auf der linken Seite dieser Gleichung ist für den Fall $\lambda_0 > 0$ eine streng monoton fallende Funktion. Daher muss in diesem Intervall auch die Funktion $m(t)$ streng monoton fallend sein. Das ist aber nur möglich, wenn die Zustandsbeschränkung im gesamten Intervall aktiv ist, also $y_j = 0$. Damit gilt $y_j' = 0$ im Inneren des betrachteten Intervalls und die Produktsrate lässt sich aus der Differentialgleichung für den Lagerstand bestimmen:

$$p_j(t) = \frac{d_j(t)}{c_j} \quad (5.11)$$

Im Intervall $]t_1, \tau_0]$ gelten für Kontroll- und Zustandsvariable und die adjungierte Funktion die gleichen Beziehungen wie im Fall 1b. Dieser Lösungsfall ist in

Abbildung 5.2 als Lösung 1c dargestellt. Es ist hier auch der Spezialfall $\tau_0 = t_1$ möglich, das Intervall zu Beginn, in dem nicht produziert wird, entfällt dann.

Fall 2: $\forall t \in]t_1, t_2]: \lambda_j(t) < 0$

Ist $\lambda_j < 0$ im gesamten Intervall, dann wird die Produktionsrate minimal, also $p_j = 0$, gewählt. Wie im Fall 1b folgt $\lambda_j' = \lambda_0 k_{1j}$ (siehe Lösung 2 in Abbildung 5.2).

Fall 3: $\exists \tau_0, \tau_1 \in [t_1, t_2], \tau_0 < \tau_1 : \lambda_j(t) \begin{cases} \equiv 0 & \text{für } t \in]\tau_0, \tau_1] \\ < 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Analog wie im Fall 1c folgt $\forall t \in]\tau_0, \tau_1]: y_j(t) = 0$. Da überall sonst die adjungierte Funktion negativ ist, wird außerhalb des Intervall $]\tau_0, \tau_1]$ nichts produziert. Damit kann die geforderte Endlagerbedingung $y_j(t_2) = y_{j2} > 0$ nicht erfüllt werden. Dieser Fall führt also zu keiner realisierbaren Lösung.

In Abschnitt 5.3 kann gezeigt werden, dass bei der optimalen Lösung des Grundmodells die Teillösungen 1b und 1c, wenn $\tau_0 > t_1$ ist, ausgeschlossen werden können.

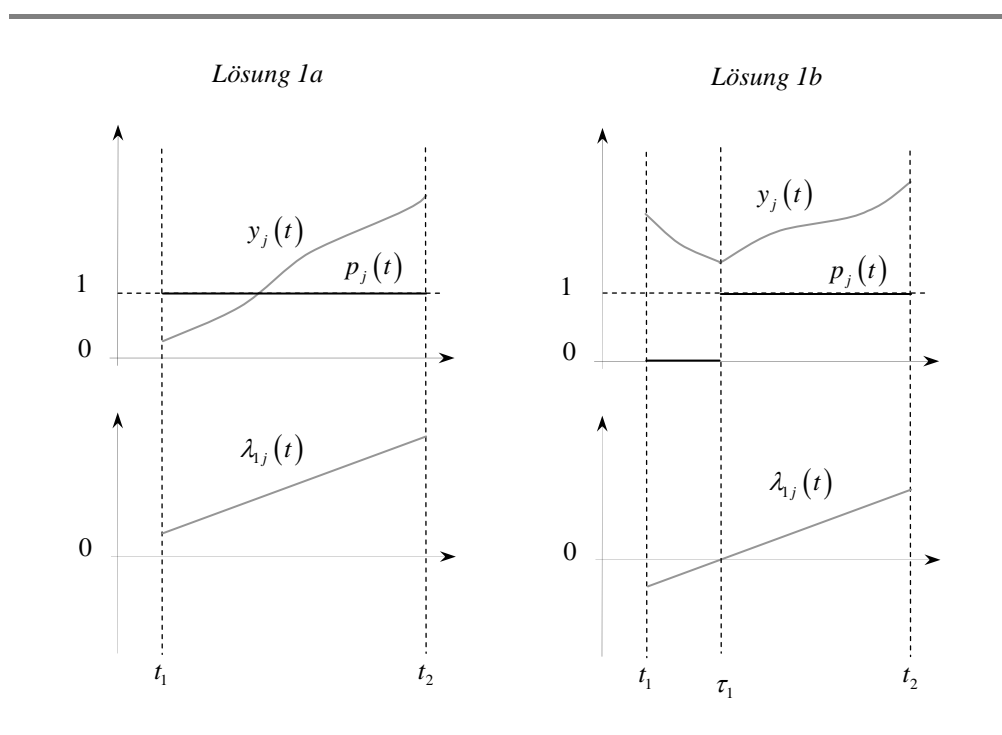


Abbildung 5.1 Mögliche Lösungen 1a, 1b (Modell T1)

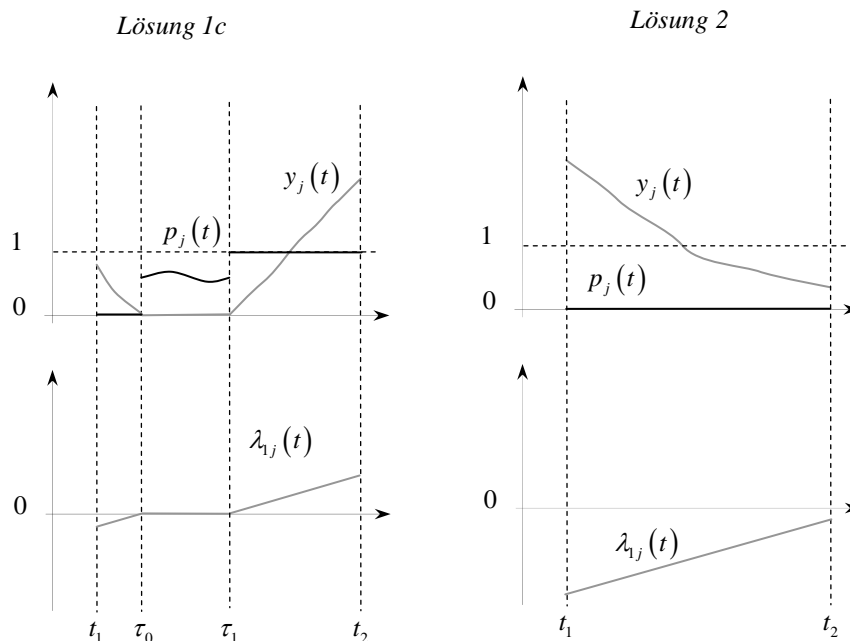


Abbildung 5.2 Mögliche Lösungen 1c, 2 (Modell T1)

5.1.4 DER FALL $\lambda_0 = 0$

In den vorangegangenen Betrachtungen wurde des Öfteren $\lambda_0 > 0$ angenommen. Der Fall $\lambda_0 = 0$ wird daher jetzt gesondert untersucht. Für diesen Spezialfall ergeben sich aus (5.6) und (5.10) folgende Beziehungen:

$$H(t, y_j, p_j, \lambda_j) = \lambda_j (c_j p_j - d_j). \quad (5.12)$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(t_2) + m(t). \quad (5.13)$$

λ_j ist also eine monoton fallende, linksseitig stetige Funktion. Es werden wie im Abschnitt zuvor drei Fälle untersucht:

Fall 1: $\exists \bar{t} > t_1 : \lambda_j(\bar{t}) > 0$

Dann gilt analog zum Fall 1 von Abschnitt 5.1.3 $\forall t \in]\bar{t}, t_2]: p_j(t) = 1, y_j(t) > 0, m(t) = \bar{m}$. Für die adjungierte Funktion gilt daher im Intervall $]\bar{t}, t_2]$ $\lambda_j(t) = \lambda_j(\bar{t})$. Im Intervall $]t_1, \bar{t}]$ ist λ_j ebenfalls positiv, da sie monoton fallend ist. Damit wird im gesamten betrachteten Intervall die Produktionsrate maximal gewählt und die adjungierte Funktion ist konstant.

Fall 2: $\forall t \in]t_1, t_2]: \lambda_j(t) < 0$

Aus der Negativität der adjungierten Funktion folgt analog zu Fall 2 in Abschnitt 5.1.3 $p_j = 0$, $y_j > 0$ und $m(t) = \bar{m}$. Die adjungierte Funktion ist konstant und kann angegeben werden durch $\lambda_j(t) = \lambda_j(t_2) + \bar{m}$.

Fall 3: $\exists \bar{\tau} \in [t_1, t_2]: \lambda_j(t) \begin{cases} \equiv 0 & \text{für } t \in]t_1, \bar{\tau}] \\ < 0 & \text{für } t \in]\bar{\tau}, t_2] \end{cases}$

Für das Intervall $]t_1, \bar{\tau}]$ folgt aus (5.10), dass die Funktion in diesem Intervall konstant ist: $m(t) = -\lambda_j(t_2)$. Da nicht alle Größen λ_j , λ_0 und μ gleichzeitig verschwinden dürfen, muss das Maß μ auf diesem Intervall positiv sein. Das hat aber zur Folge, dass die Funktion $m(t)$ streng monoton wachsend ist. Das ist ein Widerspruch zur Aussage $m(t)$ ist konstant. Dieser Zustand kann also nicht vorkommen, wenn $\lambda_0 = 0$ ist.

Es ist also nur möglich im gesamten Intervall mit maximaler Kapazität zu produzieren oder nichts zu produzieren, um von dem gegebenen Anfangslagerstand den vorgegebenen Endlagerstand zu erreichen. Diese beiden Fälle sind als Spezialfälle bereits in den Untersuchung in Abschnitt 5.1.3 enthalten. Es kann daher o. B. d. A. $\lambda_0 > 0$ angenommen werden.

5.2 TEILPROBLEM 2: RÜSTEN

Das zweite Teilproblem beschäftigt sich mit jenem Fall, wo alle Komponenten der Rüstzustandsfunktion in einem Intervall $]t_2, t_3[$ kleiner als 1 sind. Es kann also in diesem Intervall kein Produkt produziert werden. Neben dem in diesem Abschnitt nicht weiter diskutierten Zustand des Stillstandes ($\xi = 0$ in einem Intervall) werden hier alle Prozesse, die sich mit der Änderung der Rüstzustandsfunktion beschäftigen, betrachtet.

5.2.1 MODELL FÜR TEILPROBLEM 2

Durch die zuvor beschriebenen Einschränkungen, bleiben vom Grundmodell einige relevante Gleichungen übrig, die das Modell für dieses Teilproblem beschreiben (**Modell T2**). Da in dem betrachteten Intervall keine Produktion stattfindet und damit der Lagerstand von keinem Produkt beeinflusst werden kann, reduziert sich die Zielfunktion auf

$$K_S = \int_{t_2}^{t_3} \bar{k}_S^T (u(t) + v(t)) dt \rightarrow \text{Min.} \quad (5.14)$$

Die Differentialgleichung für den Rüstzustand ist gegeben durch

$$\xi'(t) = Su(t) - Rv(t). \quad (5.15)$$

Die Randbedingungen werden für die drei später diskutierten Zustände Aufrüsten, Umrüsten und Abrüsten weiter unten festgelegt.

Als Nebenbedingungen sind die Beschränkungen für die Rüstfunktionen und den Rüstzustand anzuführen:

$$\begin{aligned} \forall t \in]t_2, t_3[: u(t) \geq 0, v(t) \geq 0, \bar{1}^T (u(t) + v(t)) \leq 1 \\ \forall t \in]t_2, t_3[: \xi(t) \geq 0, \bar{1}^T \xi(t) \leq 1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.2.2 AUFRÜSTEN

Um ein Produkt j produzieren zu können, ist es notwendig die Rüstzustandsfunktion dieses Produktes in einem Intervall $[t_0, t_1]$ vom Anfangswert 0 auf den Wert 1 zu erhöhen:

$$\xi_j(t_0) = 0, \xi_j(t_1) = 1 \quad (5.17)$$

Das geschieht, indem die Kontrollvariable u_j positive Werte annimmt. Ein stückweises Aufrüsten eines Produktes auf einen Wert kleiner als 1 und wieder Abrüsten (durch positive Werte von v_j) ist nicht optimal, da das den Wert der Zielfunktion im Intervall $[t_0, t_1]$ erhöhen würde. Es gilt daher

$$\forall t \in [t_0, t_1] : u_j(t) \geq 0, v_j(t) = 0. \quad (5.18)$$

Da die Rüstzustandsfunktion von 0 auf 1 anwächst, gilt unter Verwendung der Differentialgleichung (5.15)

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi_j'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} s_j u_j(t) dt = 1. \quad (5.19)$$

Damit diese Bedingung mit einem für u_j zulässigen Wert erfüllt werden kann, muss die Länge des Intervalls $[t_0, t_1]$ zumindest die Aufrüstdauer t_{sj} umfassen. Durch Umformen und Einsetzen von (5.19) in die Zielfunktion erhält man

$$K_S = \int_{t_0}^{t_1} \bar{k}_{Sj} u_j(t) dt = \frac{\bar{k}_{Sj}}{s_j}. \quad (5.20)$$

D.h. die Zielfunktion in diesem Intervall ist unabhängig von der konkreten Wahl des Wertes von u_j . O. b. d. A. werden für das weitere Vorgehen für die Rüstfunktion u_j folgende Werte gewählt:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_1 - t_{Sj}[: u_j(t) &= 0 \\ \forall t \in [t_1 - t_{Sj}, t_1[: u_j(t) &= 1 \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.2.3 UMRÜSTEN

Hier wird in einem Intervall $[t_2, t_3]$ der Übergang von der Produktion eines Produktes j (und damit $\xi_j = 1$) zur Produktion eines anderen Produktes k ($\xi_k = 1$) betrachtet. Die Randwerte der genannten Rüstzustandsfunktionen lauten daher:

$$\begin{aligned} \xi_j(t_2) &= 1, \xi_j(t_3) = 0 \\ \xi_k(t_2) &= 0, \xi_k(t_3) = 1 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Das (teilweise) Abrüsten und wieder Aufrüsten des gleichen Produkts ist nicht optimal, da die Zielfunktion verbessert wird, wenn die Rüstzustandsfunktion dieses Produkts konstant auf 1 gehalten wird. In Analogie zu (5.19) gilt:

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^{t_3} \xi_j'(t) dt &= \int_{t_2}^{t_3} r_j v_j(t) dt = 1 \\ \int_{t_2}^{t_3} \xi_k'(t) dt &= \int_{t_2}^{t_3} s_k u_k(t) dt = 1 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Diese beiden Bedingungen können nur dann erfüllt werden, wenn die Länge des Intervalls $[t_2, t_3]$ zumindest die Abrüstzeit von Produkt j und die Aufrüstzeit von Produkt k umfasst, da

$$\begin{aligned} u_k + v_j \leq 1 &\Rightarrow v_j \leq 1 - u_k \\ \int_{t_2}^{t_3} v_j(t) dt &= \frac{1}{r_j} \leq \int_{t_2}^{t_3} 1 - u_k(t) dt = t_3 - t_2 - \frac{1}{s_k} \Rightarrow t_3 - t_2 \geq \frac{1}{r_j} + \frac{1}{s_k} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Einsetzen von (5.23) in die Zielfunktion liefert

$$K_S = \int_{t_2}^{t_3} \bar{k}_{Sj} v_j(t) + \bar{k}_{Sk} u_k(t) dt = \frac{\bar{k}_{Sj}}{r_j} + \frac{\bar{k}_{Sk}}{s_k}. \quad (5.25)$$

Die Rüstkosten sind also wieder unabhängig von v_j und u_j .

5.2.4 ABRÜSTEN

Das Absenken der Rüstzustandsfunktion eines Produktes j nach der Produktion auf den Wert 0, wird als Abrüstvorgang bezeichnet. Das ist z. B. am Ende des Planungshorizonts notwendig, um den geforderten Endwert der Rüstzustandsfunktion zu erreichen. Bezeichnet man das Intervall, in dem dieser Vorgang stattfindet mit $[t_3, t_4]$, so sind die Randwerte dieser Funktion vorgegeben durch:

$$\xi_j(t_3) = 1, \xi_j(t_4) = 0 \quad (5.26)$$

Das Absenken geschieht, indem die Kontrollvariable v_j positive Werte annimmt. Ein stückweises Abrüsten eines Produktes und wieder Aufrüsten (durch positive Werte von u_j) ist nicht optimal, da das den Wert der Zielfunktion im Intervall $[t_3, t_4]$ erhöhen würde. Es gilt daher

$$\forall t \in [t_3, t_4]: v_j(t) \geq 0, u_j(t) = 0. \quad (5.27)$$

Da die Rüstzustandsfunktion von 1 auf 0 abnimmt, gilt unter Verwendung der Differentialgleichung (5.15)

$$\int_{t_3}^{t_4} \xi_j'(t) dt = \int_{t_3}^{t_4} r_j v_j(t) dt = 1. \quad (5.28)$$

Damit diese Bedingung mit einem für v_j zulässigen Wert erfüllt werden kann, muss die Länge des Intervalls $[t_3, t_4]$ zumindest die Abrüstdauer t_{Rj} umfassen. Durch Umformen und Einsetzen von (5.28) in die Zielfunktion erhält man

$$K_S = \int_{t_3}^{t_4} \bar{k}_{Sj} v_j(t) dt = \frac{\bar{k}_{Sj}}{r_j}. \quad (5.29)$$

Die Zielfunktion in diesem Intervall ist wieder unabhängig von v_j . O. b. d. A. werden für das weitere Vorgehen für die Rüstfunktion v_j folgende Werte gewählt:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_3, t_3 + t_{Rj}[: v_j(t) &= 1 \\ \forall t \in [t_3 + t_{Rj}, t_4[: v_j(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

5.3 MÖGLICHE ZUSTÄNDE UND DEREN SYNTHESE

Im letzten Abschnitt wurden mögliche Zustände des Grundmodells diskutiert. Es gibt Zeitintervalle, in denen entweder nach Bedarf oder auf Lager produziert wird (Produktionsintervalle), Zeitintervalle, in denen die Rüstzustandfunktionen geändert werden (Rüstintervalle) oder Intervalle, in denen weder produziert noch gerüstet wird (Stillstandszeiten). Offen bleibt die Frage, in welcher Abfolge diese Zeitintervalle aneinandergereiht werden und insbesondere, wo Stillstandszeiten in einer optimalen Lösung auftreten können. Um diese Frage zu beantworten, hilft der folgende Satz.

Satz 5.1

In einem Intervall $[t_1, t_3]$ mit $\xi_i(t) = 1$ soll Produkt i so produziert werden, dass der Lagerstand an den Intervallgrenzen die Randbedingungen $y_i(t_1) = 0$ und $y_i(t_3) = \bar{y} > 0$ erfüllt. Ist die Produktionsrate dieses Produkts von der Gestalt

$$p_i(t) = \begin{cases} d_i(t)/c_i & \text{für } t \in [t_1, \tau_1[\\ 1 & \text{für } t \in [\tau_1, t_2[\\ 0 & \text{für } t \in [t_2, t_3[\end{cases} \quad (5.31)$$

mit $t_2 < t_3$, dann sind die daraus resultierenden Lagerkosten für dieses Intervall nicht minimal.

Beweis

Am Ende eines Produktionsintervalls ist ein Intervall, in dem die Produktionsrate gleich 0 ist nicht optimal. Das folgt aus den Überlegungen in Abschnitt 5.1. Da im Intervall $[\tau_1, t_2[$ auf Lager produziert wird, ist dort die adjungierte Funktion $\lambda_{qi} > 0$ und auch deren Ableitung $\lambda_{qi}' > 0$. Soll die Produktionsrate im anschließenden Intervall $[t_2, t_3[$ den Wert 0 annehmen, so müsste dort $\lambda_{qi} < 0$ gelten. Da der Lagerstand im gesamten Intervall $[\tau_1, t_3]$ positiv ist, ist auch kein Sprung der adjungierten Funktion nach unten erlaubt. Damit erfüllt die angegebene Lösung die notwendigen Bedingungen nicht und kann daher nicht optimal

sein. (Produktionsraten und Lagerstände der angegebenen Lösung und der optimale Lösung sind in Abbildung 5.3 dargestellt.)

□

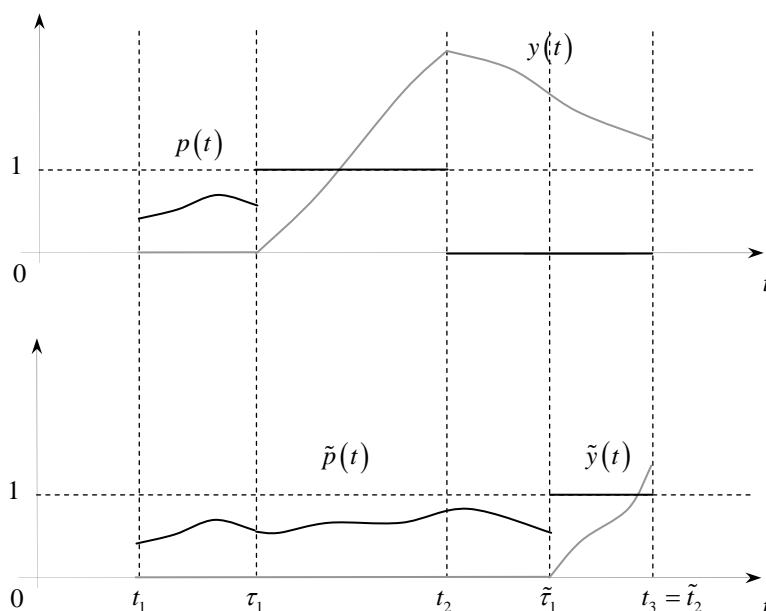


Abbildung 5.3 Produktionsraten und Lagerstände zu Satz 5.1

Mit Hilfe dieses Satzes können die folgenden Aussagen bewiesen werden:

Satz 5.2

Sei $[t_3, t_4]$ ein Produktionsintervall für ein Produkt k ($\forall t \in [t_3, t_4]: \xi_k(t) = 1$). Dann kann in einer optimalen Lösung die Produktionsrate zu Beginn des Produktionsintervalls nicht 0 sein ($\nexists \tau \in [t_3, t_4] \forall t \in [t_3, \tau[: p_k(t) = 0$), wenn zuvor bereits irgendein anderes Produkt $j \neq k$ produziert wurde, d. h. es gibt Zeitpunkte t_1 und t_2 mit $t_1 < t_2 \leq t_3$ sodass

$\forall t \in [t_1, t_2[: p_j(t) > 0$ und im Intervall $[t_2, t_3]$ der Umrüstprozess stattfindet.

Beweis

Angenommen $\exists \tau \in [t_3, t_4] \forall t \in [t_3, \tau[: p_k(t) = 0$, dann können das Umrüstintervall $[t_2, t_3]$ und das Intervall $[t_3, \tau[$ unter Anpassung der Rüstzustandsfunktionen vertauscht

werden, ohne dass sich der Lagerstand der Produkte und damit der Zielfunktionswert ändert:

$$\begin{aligned}
\forall t \in [t_1, t_2 + \tau - t_3]: \xi_j(t) &= 1 \\
\forall t \in [t_2, t_2 + \tau - t_3]: p_j(t) &= 0 \\
\forall t \in]t_2 + \tau - t_3, \tau[: \xi_j(t) < 1 \wedge \xi_k(t) < 1
\end{aligned} \tag{5.32}$$

D. h. am Ende des Produktionsintervalls von Produkt j wäre die Produktionsrate 0 ist. Das würde aber bedeuten, dass diese Lösung nach Satz 5.1 nicht optimal ist, da die Zielfunktion kann noch weiter reduziert werden kann. Damit kann in einer optimalen Lösung zu Beginn eines Produktionsintervalls kein Stillstand auftreten, mit Ausnahme des ersten produktionsloses.

□

Satz 5.3

Sei $[t_2, t_3]$ ein Intervall, in dem der Umrüstvorgang von der Produktion eines Produkts j auf die Produktion von Produkt k stattfindet. $[t_1, t_2]$ bezeichne das Produktionsintervall von Produkt j und $[t_3, t_4]$ von Produkt k . Dann entspricht in einer optimalen Lösung die Intervalllänge des Umrüstintervalls $[t_2, t_3]$ genau der notwendigen Umrüstdauer $t_{Rj} + t_{Sk}$ und für die Rüstfunktionen gilt:

$$\forall t \in [t_2, t_3]: u_k(t) + v_j(t) = 1 \tag{5.33}$$

Beweis

Wie in (5.24) angegeben beträgt die minimale Umrüstdauer von Produkt j auf Produkt k $t_{Rj} + t_{Sk}$. Angenommen die Länge des Umrüstintervalls $[t_2, t_3]$ ist größer als diese Zeitspanne, dann kann das Umrüstintervall reduziert werden und die Rüstzustandsfunktionen angepasst werden, ohne dass die Lagerstände und damit der Zielfunktionswert beeinflusst werden:

$$\begin{aligned}
\forall t \in [t_2, t_3 - t_{Rj} - t_{Sk}]: \xi_j(t) &= 1 \wedge p_j(t) = 0 \\
\forall t \in]t_3 - t_{Rj} - t_{Sk}, t_3[: \xi_j(t) < 1 \wedge \xi_k(t) < 1
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Diese Wahl der Zustands- und Kontrollvariablen ist nach Satz 5.1 aber nicht optimal. Es kann also eine Lösung mit kleineren Lagerkosten gefunden werden. Damit der Umrüstprozess die minimale Zeit in Anspruch nimmt, muss in (5.24) Gleichheit gelten. Das ist genau dann der Fall, wenn im gesamten Umrüstintervall $u_k(t) + v_j(t) = 1$ gilt.

□

Da wie in (5.25) bereits gezeigt die Rüstkosten unabhängig sind von der konkreten Wahl der Rüstfunktionen, werden diese für das Umrüstintervall $[t_2, t_3]$ o. B. d. A. wie folgt festgelegt:

$$v_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [t_2, t_2 + t_{Rj}] \\ 0 & \text{für } t \in [t_2 + t_{Rj}, t_3] \end{cases}, \quad u_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [t_2, t_2 + t_{Rj}] \\ 1 & \text{für } t \in [t_2 + t_{Rj}, t_3] \end{cases} \quad (5.35)$$

Der Umrüstvorgang wird also zerlegt in einen Abrüstvorgang für Produkt j und in einen Aufrüstvorgang für Produkt k . Beide Rüstvorgänge finden mit der maximal möglichen Geschwindigkeit statt, damit die Bedingung aus Satz 5.3 erfüllt ist.

Satz 5.4

Sei $[t_1, t_2]$ das letzte Produktionsintervall, das im Planungshorizont $[0, T]$ auftritt. Der Abrüstvorgang von diesem Produkt j finde im Intervall $[t_2, T]$ statt, wobei die Abrüstfunktion in Analogie zu (5.30) definiert wird mit

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_2, t_2 + t_{Rj}[: v_j(t) &= 1 \\ \forall t \in [t_2 + t_{Rj}, T] : v_j(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Dieser Abrüstvorgang kann nur dann Teil einer optimalen Lösung sein, wenn $t_2 + t_{Rj} = T$. D. h. am Ende des Planungszeitraums ist ein Stillstandsintervall nicht optimal.

Beweis

Angenommen es gibt ein Stillstandsintervall am Ende des Planungszeitraums, d. h. $t_2 + t_{Rj} < T$. Dann kann die Rüstzustandsfunktion folgendermaßen abgeändert werden, ohne die Lagerstände zu beeinflussen:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_2, T - t_{Rj}] : \xi_j(t) = 1 \wedge p_j(t) = 0 \\ \forall t \in]T - t_{Rj}, T] : \xi_j(t) < 1 \wedge v_j(t) = 1 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Das würde aber bedeuten, dass am Ende eines Produktionsintervalls die Produktionsrate 0 ist, was nach Satz 5.1 in einer optimalen Lösung nicht vorkommen kann.

□

In den nachfolgenden beiden Tabellen sind nochmals alle Zustände durch Definition von Kontroll- und Zustandsvariablen und Angabe der wichtigsten Restriktionen angeführt.

Zustand	Kontrolle p	Kontrolle u, v	Kontrollrestr.
① Stillstand	$p = 0$	$u = v = 0$	$\vec{1}^T (u(t) + v(t)) = 0$
② Aufrüsten	$p = 0$	$\exists j \in I : u_j = 1, v_j = 0$ $\forall i \neq j : u_i = v_i = 0$	$\vec{1}^T (u(t) + v(t)) = 1$
③ Produktion nach Be- darf	$\exists j \in I : p_j = d_j/c_j$ $\forall i \neq j : p_i = 0$	$u = v = 0$	$\vec{1}^T (u(t) + v(t)) = 0$
④ Produktion auf Lager	$\exists j \in I : p_j = 1$ $\forall i \neq j : p_i = 0$	$u = v = 0$	$\vec{1}^T (u(t) + v(t)) = 0$
⑤ Abrüsten	$p = 0$	$\exists j \in I : u_j > 0, v_j = 0$ $\forall i \neq j : u_i = v_i = 0$	$\vec{1}^T (u(t) + v(t)) = 1$

Tabelle 5.1 Charakterisierung der Kontrollvariablen in verschiedenen Zuständen

Zustand	Zustand y	Zustand ξ	Zustandsrestr.
① Stillstand	$y > 0$	$\xi = 0$	$\bar{1}^T \xi(t) = 0$
② Aufrüsten	$y > 0$	$\exists j \in I : 0 < \xi_j < 1$ $\forall i \neq j : \xi_i = 0$	$\bar{1}^T \xi(t) < 1$
③ Produktion nach Bedarf	$\exists j \in I : y_j = 0$ $\forall i \neq j : y_i > 0$	$\exists j \in I : \xi_j = 1$ $\forall i \neq j : \xi_i = 0$	$\bar{1}^T \xi(t) = 1$
④ Produktion auf Lager	$y > 0$	$\exists j \in I : \xi_j = 1$ $\forall i \neq j : \xi_i = 0$	$\bar{1}^T \xi(t) = 1$
⑤ Abrüsten	$y > 0$	$\exists j \in I : 0 < \xi_j < 1$ $\forall i \neq j : \xi_i = 0$	$\bar{1}^T \xi(t) < 1$

Tabelle 5.2 Charakterisierung der Zustandsvariablen in verschiedenen Zuständen

Wie in den vorigen Abschnitten gezeigt, reichen diese Zustände aus, um die Struktur einer optimalen Lösung beschreiben zu können. Ist die Abfolge der einzelnen Produkte (Losreihenfolge) vorgegeben, so sieht die optimale Lösung wie folgt aus:

Zu Beginn kann ein Stillstandsintervall auftreten, wenn von allen Produkten der Anfangslagerstand entsprechend hoch ist. Dann folgt der Aufrüstprozess für die Produktion des Produktes, das im ersten Los gefertigt werden soll. Im anschließenden Produktionsintervall kann zuerst in einem Teilintervall nach Bedarf produziert werden. Dazu ist es notwendig, dass der Lagerstand dieses Produktes im gesamten Teilintervall 0 ist. Dann wird auf Lager produziert, um den Lagerstand dieses Produktes soweit aufzubauen, dass er zumindest bis zum nächsten Los desselben Produktes ausreicht. Der Abschnitt mit der Bedarfsproduktion kann auch auf die Länge 0 reduziert werden, es muss dann auch der Lagerstand zu Beginn des Produktionsintervalls nicht mehr notwendigerweise 0 sein.

Ist die Produktion des ersten Loses beendet, beginnt der Abrüstprozess für das gerade produzierte Produkt. Erreicht die Rüstzustandsfunktion den Wert 0, kann für das nächste Los aufgerüstet werden. Es folgen wieder Produktionsintervall und Abrüstintervall des nächsten Produktes. Diese Reihenfolge wiederholt sich bei allen weiteren Produktionslosen, wobei der Abrüstprozess des letzten Loses am Ende des Planungshorizonts abgeschlossen wird. Die eben beschriebene Struktur der Rüstzustandsfunktionen, Produktionsraten und Lagerstände ist in der folgenden Abbildung visualisiert.

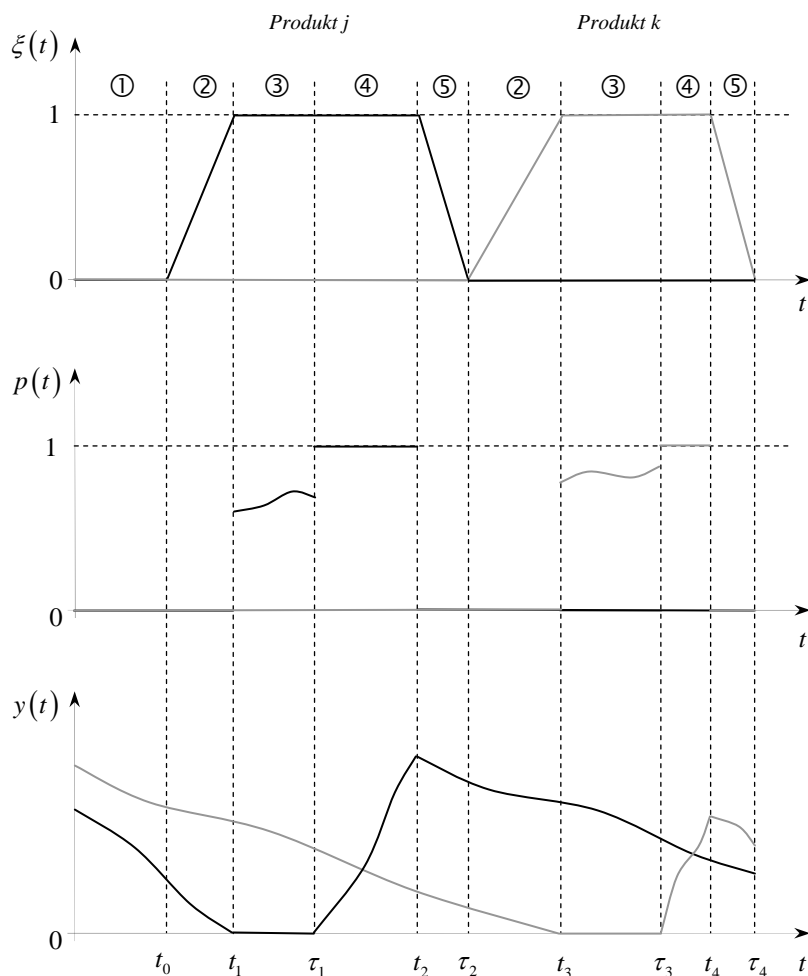


Abbildung 5.4 Struktur der Rüstzustandsfunktionen, Produktionsraten und Lagerstände

5.4 UMFORMULIERUNG DES GRUNDMODELLS

Durch die im letzten Abschnitt festgelegte Struktur einer optimalen Lösung für das Grundmodell bei gegebener Losreihenfolge, kann dieses Modell umformuliert werden. Als Variablen werden jetzt die Zeitpunkte, die den Beginn und das Ende von Produktionsintervallen angeben, verwendet. Für diese Zeitpunkte werden folgende einheitliche Bezeichnungen eingeführt, die später auch durchgehend bei den Beispielen verwendet werden:

$t_{1,j}$ Beginn der Bedarfsproduktion von Los j

$t_{2,j}$ Beginn der Produktion mit maximaler Kapazität von Los j

$t_{3,j}$ Ende der Produktion mit maximaler Kapazität von Los j

Die Abfolge der einzelnen Produktionslose wird durch Aneinanderreihung der Produktnummern dargestellt. 1 2 1 3 bedeutet, dass zuerst Produkt 1, dann Produkt 2, anschließend wieder Produkt 1 und am Ende Produkt 3 gefertigt wird.

Weiters sei die Funktion pr so definiert, dass sie jedem Los j die Nummer jenes Produkts i zuordnet, das in diesem Los produziert wird. D. h. $pr(3) = 1$ bedeutet, dass beim 3. Los Produkt 1 gefertigt wird. Die Gesamtanzahl aller Lose wird mit L bezeichnet, während die Anzahl der Lose von Produkt i mit $l(i)$ bezeichnet wird. Im oben angeführten Beispiel wäre also $L = 4$ und $l(1) = 2$ bzw. $l(2) = l(3) = 1$.

Die Stelle, an der das j -te Los von Produkt i steht, wird durch die Funktion $s(i, j)$ angegeben. $s(1, 2) = 3$ bedeutet, dass das zweite Los von Produkt 1 an der dritten Stelle der gegebenen Losabfolge steht.

Die Produktionsrate eines Produkts i ist festgelegt durch:

$$p_i(t) = \begin{cases} d_i(t)/c_i & \text{für } t \in [t_{1,j}, t_{2,j}[\text{ mit } pr(j) = i \\ 1 & \text{für } t \in [t_{2,j}, t_{3,j}[\text{ mit } pr(j) = i . \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.38)$$

Der Lagerstand von Produkt i berechnet sich über die Differentialgleichung (4.8):

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_0^t c_i p_i(\tau) - d_i(\tau) d\tau = y_{0i} + c_i \int_0^t p_i(\tau) d\tau - D_i(t). \quad (5.39)$$

Um die Bedingung der Lieferfähigkeit (4.11) durch die oben definierten Zeitpunkte neu zu formulieren, ist folgender Satz hilfreich. (Eine ähnliche Aussage wird in [22] bewiesen.)

Satz 5.5

Seien $t_{1,j}$ die Startzeitpunkte der Bedarfsproduktion für Los j , dann gilt:

$$y(0) \geq 0 \wedge y(T) \geq 0 \wedge \forall j \in \{1, \dots, L\} : y_{pr(j)}(t_{1,j}) \geq 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0, T] : y(t) \geq 0. \quad (5.40)$$

Beweis

Wir betrachten die Implikation $y(0) \geq 0 \wedge y(T) \geq 0 \wedge \forall j \in \{1, \dots, L\} : y_{pr(j)}(t_{1,j}) \geq 0 \Rightarrow \forall t \in]0, T[: y(t) \geq 0$, die Umkehrung folgt trivialerweise. Sei i ein beliebiger, aber fixer Produktindex, dann ist also zu zeigen, dass

$$y_i(0) \geq 0 \wedge y_i(T) \geq 0 \wedge \forall j \in \{1, \dots, l(i)\} : y_i(t_{1,s(i,j)}) \geq 0 \Rightarrow \forall t \in [0, T] : y_i(t) \geq 0 \quad (5.41)$$

Für die Zeitpunkte im Intervall $[0, T]$ werden drei Fälle unterschieden:

(a) t liegt in einem Intervall, in dem nach Bedarf produziert wird, also

$$t \in [t_{1,s(i,j)}, t_{2,s(i,j)}], j \in \{1, \dots, l(i)\} \quad (5.42)$$

Dann folgt aus der Lagerbilanzgleichung (5.39) und der Definition der Produktionsrate (5.38)

$$y_i(t) = y_i(t_{1,s(i,j)}) + \int_{t_{1,s(i,j)}}^t c_i p_i(\tau) - d_i(\tau) d\tau = y_i(t_{1,s(i,j)}) \geq 0. \quad (5.43)$$

Insbesondere gilt auch

$$y_i(t_{2,s(i,j)}) = y_i(t_{1,s(i,j)}) \geq 0. \quad (5.44)$$

(b) Liegt t in einem Intervall, in dem auf Lager produziert wird, also

$$t \in [t_{2,s(i,j)}, t_{3,s(i,j)}], j \in \{1, \dots, l(i)\}, \quad (5.45)$$

dann ist die Produktionsrate gleich 1. Mit Hilfe der Lagerbilanzgleichung (5.39) erhält man dann

$$y_i(t) = y_i(t_{2,s(i,j)}) + \int_{t_{2,s(i,j)}}^t c_i - d_i(\tau) d\tau \geq y_i(t_{1,s(i,j)}) \geq 0. \quad (5.46)$$

(c) Liegt t in einem Intervall, in dem nicht produziert wird, dann ist die Produktionsrate gleich 0. Das ist möglich, wenn der Zeitpunkt t noch vor dem Produktionsbeginn des ersten Loses von Produkt i liegt. Dann gilt:

$$t \in [0, t_{1,s(i,1)}] : y_i(t) = y_i(t_{1,s(i,1)}) + \int_t^{t_{1,s(i,1)}} d_i(\tau) d\tau \geq 0, \quad (5.47)$$

Befindet sich der Zeitpunkt t nach dem Produktionsende des letzten Loses von Produkt i liegt. Dann gilt:

$$t \in \left[t_{3,s(i,l(i))}, T \right] : y_i(t) = y_i(T) + \int_t^T d_i(\tau) d\tau \geq 0. \quad (5.48)$$

Zwischen zwei Produktionslosen eines Produkts ist ebenfalls die Produktionsrate 0 und damit folgt:

$$t \in \left[t_{3,s(i,j)}, t_{1,s(i,j+1)} \right] : y_i(t) = y_i(t_{1,s(i,j+1)}) + \int_t^{t_{1,s(i,j+1)}} d_i(\tau) d\tau \geq 0. \quad (5.49)$$

□

Die Zielfunktion beschränkt sich auf die Minimierung der gesamten Lagerkosten, da die Rüstkosten durch die Vorgabe der Losreihenfolge bereits festgelegt sind:

$$K_S = \sum_{i=1}^n k_{Si} l(i) \quad (5.50)$$

Der folgende Satz gibt an, wie die Lagerkosten für ein Produkt berechnet werden können:

Satz 5.6

Die Lagerkosten für ein Produkt i können berechnet werden durch

$$K_I(i) = k_{ii} \left(y_{0i} T + c_i \sum_{\substack{j=1 \\ pr(j)=i}}^L \left(T - \frac{t_{2,j} + t_{3,j}}{2} \right) (t_{3,j} - t_{2,j}) + \sum_{\substack{j=1 \\ pr(j)=i}}^L \left((T - t_{2,j}) D_i(t_{2,j}) - (T - t_{1,j}) D_i(t_{1,j}) + \int_{t_{1,j}}^{t_{2,j}} D_i(t) dt \right) - \int_0^T D_i(t) dt \right) \quad (5.51)$$

Beweis

Die Lagerkosten für Produkt i sind nach (4.14) gegeben durch

$$K_I(i) = k_{ii} \int_0^T y_i(t) dt. \quad (5.52)$$

Einsetzen der Lagerbilanzgleichung (5.39) ergibt

$$K_I(i) = k_{ii} \left(y_{0i} T + c_i \int_0^T \int_0^t p_i(\tau) d\tau dt - \int_0^T D_i(t) dt \right). \quad (5.53)$$

Es bleibt also noch übrig das doppelte Integral über die Produktionsrate auszuwerten. Diese Berechnung wird grafisch in Abbildung 5.5 motiviert. Dort entspricht diesem doppelten Integral die Fläche unter der Kurve des Integrals über der Produktionsrate. Dieser Flächeninhalt wird in drei Teile unterteilt, was durch die unterschiedliche Färbung (weiß, grau, grau schraffiert) dargestellt wird. Als Summe dieser drei Teilflächen (multipliziert mit der Produktionskapazität c_i) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
c_i \int_0^T \int_0^t p_i(\tau) d\tau dt &= c_i \sum_{\substack{j=1 \\ pr(j)=i}}^L \left(T - \frac{t_{2,j} + t_{3,j}}{2} \right) (t_{3,j} - t_{2,j}) + \\
&\sum_{\substack{j=1 \\ pr(j)=i}}^L \left((T - t_{2,j}) (D_i(t_{2,j}) - D_i(t_{1,j})) \right) + \\
&\sum_{\substack{j=1 \\ pr(j)=i}}^L \int_{t_{1,j}}^{t_{2,j}} D_i(t) - D_i(t_{1,j}) dt
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Die erste Summe entspricht der Summe aller grau gefärbten Trapezflächen. Die zweite Summe ist die Summe alle grau schraffierten Rechtecksflächen und die dritte Summe gibt die Summe weiß eingefärbten Flächenteile unter der Kurve an.

Aufspalten und Berechnen des Integrals vereinfachen (5.54) zu

$$\begin{aligned}
c_i \int_0^T \int_0^t p_i(\tau) d\tau dt &= c_i \sum_{\substack{j=1 \\ pr(j)=i}}^L \left(T - \frac{t_{2,j} + t_{3,j}}{2} \right) (t_{3,j} - t_{2,j}) + \\
&\sum_{\substack{j=1 \\ pr(j)=i}}^L \left((T - t_{2,j}) (D_i(t_{2,j}) - D_i(t_{1,j})) \right) + D_i(t_{1,j}) (t_{2,j} - t_{1,j}) + \int_{t_{1,j}}^{t_{2,j}} D_i(t) dt = \\
&c_i \sum_{\substack{j=1 \\ pr(j)=i}}^L \left(T - \frac{t_{2,j} + t_{3,j}}{2} \right) (t_{3,j} - t_{2,j}) + \\
&\sum_{\substack{j=1 \\ pr(j)=i}}^L \left((T - t_{2,j}) D_i(t_{2,j}) - (T - t_{1,j}) D_i(t_{1,j}) + \int_{t_{1,j}}^{t_{2,j}} D_i(t) dt \right)
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Einsetzen von (5.55) in (5.53) liefert die gewünschte Behauptung.

□

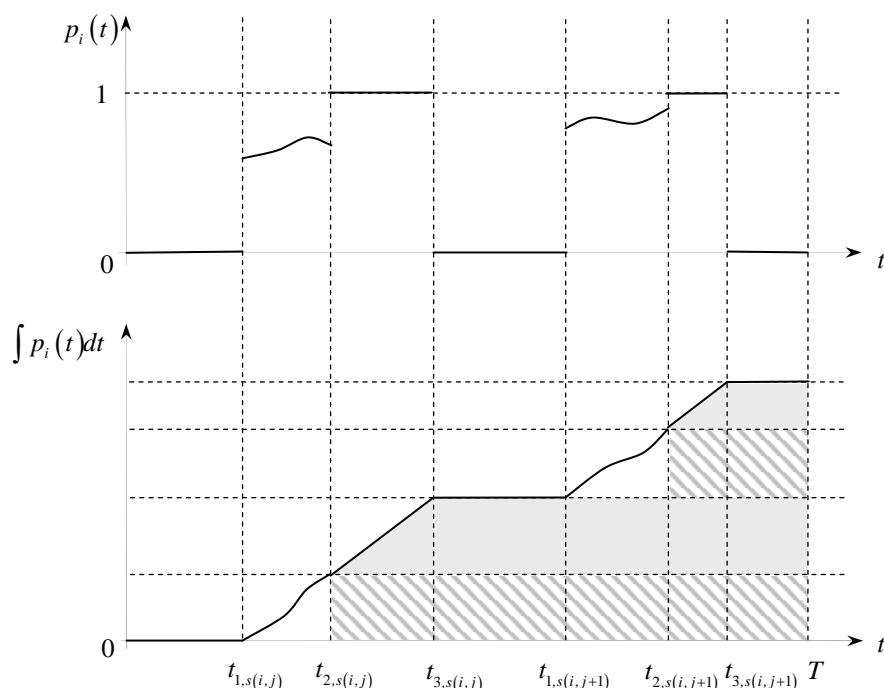


Abbildung 5.5 Grafische Darstellung des Integrals über $p_i(t)$

Die **Zielfunktion** ist gegeben durch die Summe der Lagerkosten aller Produkte:

$$K_I = \sum_{i=1}^n K_I(i) \quad (5.56)$$

Bei den Restriktionen dieses Modells kommen sowohl lineare als auch nichtlineare Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen vor.

Als **lineare Ungleichungsnebenbedingungen** benötigt man:

$$\begin{aligned} t_{S_{pr(1)}} - t_{1,1} &\leq 0 \\ t_{1,j} - t_{2,j} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, L \\ t_{2,j} - t_{3,j} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, L \\ t_{3,L} &\leq T - t_{R_{pr(L)}} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Da der Anfangswert der Rüstzustandsfunktion 0 ist, muss der Produktionsbeginn des ersten Loses größer oder gleich als die notwendige Aufrüstdauer sein. Der Startzeitpunkt der Produktion auf Lager muss bei jedem Los größer oder gleich als der Startzeitpunkt der Produktion nach Bedarf sein. Tritt Gleichheit ein, dann wird bei diesem Los nicht nach Bedarf produziert. Der Endzeitpunkt der Produktion auf Lager muss bei jedem Los größer sein als der entsprechende Startzeitpunkt. Schließlich muss nach dem Produktionsende des

letzten Loses noch genügend Zeit für den Abrüstvorgang bleiben, damit der geforderte Endzustand der Rüstzustandfunktion erreicht werden kann.

Die linearen Gleichungsnebenbedingungen

$$t_{1,j} - t_{3,j-1} = t_{R_{pr(j)}} + t_{S_{pr(j)}}, \quad j = 2, \dots, L \quad (5.58)$$

garantieren, dass zwischen zwei Losen genau die benötigte Umrüstdauer eingehalten wird.

Die nichtlinearen Ungleichungsnebenbedingungen

$$\begin{aligned} -y_{pr(j)}(t_{1,j}) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, L \\ \Leftrightarrow -y_{0_{pr(j)}} + D_{pr(j)}(t_{1,j}) - \sum_{\substack{i=1 \\ pr(i)=pr(j)}}^{j-1} (c_{pr(i)}(t_{3,i} - t_{2,i}) + D_{pr(i)}(t_{2,i}) - D_{pr(i)}(t_{1,i})) &\leq 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

garantieren die Nichtnegativität des Lagerstandes zu Produktionsbeginn jedes Loses und zusammen mit den **nichtlinearen Gleichungsnebenbedingungen**

$$\begin{aligned} y_i(T) &= y_{T_i}, \quad i = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow y_{0_i} - D_i(T) + \sum_{\substack{j=1 \\ pr(j)=i}}^L (c_i(t_{3,j} - t_{2,j}) + D_i(t_{2,j}) - D_i(t_{1,j})) &= y_{T_i} \end{aligned} \quad (5.60)$$

die den geforderten Endlagerstand garantieren, stellen sie die in Satz 5.5 bewiesene Äquivalenz zu Bedingung (4.11) dar. Die Einhaltung des vorgegebenen Anfangslagerstandes braucht nicht explizit als Nebenbedingung formuliert werden, da dieser Wert in die Berechnung der Lagerstände über die Lagerbilanzgleichung (5.39) eingeht.

5.5 LÖSUNG VON OPTIMIERUNGSPROBLEMEN IN *MATLAB*

Zur Lösung des in Abschnitt 5.3 definierten Optimierungsproblems (5.56) - (5.60) wird die Funktion `fmincon` in *MATLAB* verwendet. Mit diesem Befehl können restringierte Optimierungsprobleme folgender Bauart gelöst werden:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \text{Min.} \\ A_u x &\leq b_u \\ A_g x &= b_g \\ C_u(x) &\leq 0 \\ C_g(x) &= 0 \\ x_u &\leq x \leq x_o \end{aligned} \quad (5.61)$$

Eine Zielfunktion f soll minimiert werden, wobei als Nebenbedingungen lineare Ungleichungs- und Gleichungsrestriktionen, nichtlineare Ungleichungs- und Gleichungsrestriktionen und Boxrestriktionen für die Variablen, die im Vektor x zusammengefasst sind, vorkommen können. A_u und A_g sind Matrizen, b_u , b_g , x_u und x_o sind Vektoren und die Funktionswerte der nichtlinearen Funktionen $C_u(x)$ und $C_g(x)$ sind ebenfalls Vektoren.

Die Syntax für den Befehl `fmincon` lautet

$$x = \text{fmincon}(f, x_0, A_u, b_u, A_g, b_g, x_u, x_o, f_{nl}). \quad (5.62)$$

Dabei gibt x_0 den Startwert an und in der Funktion f_{nl} sind die beiden nichtlinearen Funktionen $C_u(x)$ und $C_g(x)$ zusammengefasst.

Gibt man zusätzlich zu den nichtlinearen Funktionen f und f_{nl} ihre Gradienten an, so beschleunigt das die Berechnung der Lösung. Für die Berechnung des Gradienten der Zielfunktion – siehe (5.56) – werden folgende Ableitungen benötigt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_I}{\partial t_{1,j}} &= -k_{ii}(T - t_{1,j})d_i(t_{1,j}) \\ \frac{\partial K_I}{\partial t_{2,j}} &= k_{ii}(T - t_{2,j})(d_i(t_{2,j}) - c_i) \\ \frac{\partial K_I}{\partial t_{3,j}} &= k_{ii}c_i(T - t_{3,j}) \end{aligned} \quad (5.63)$$

mit $j = 1, \dots, L$ und $i = \text{prod}(j)$

Die j -te Komponente ($j \in \{1, \dots, L\}$) der nichtlinearen Funktion $C_u(x)$ ist in dem betrachteten Problem – siehe auch (5.59) – gegeben durch

$$C_{u,j} = -y_{0_{pr(j)}} + D_{pr(j)}(t_{1,j}) - \sum_{\substack{i=1 \\ pr(i)=pr(j)}}^{j-1} (c_{pr(i)}(t_{3,i} - t_{2,i}) + D_{pr(i)}(t_{2,i}) - D_{pr(i)}(t_{1,i})). \quad (5.64)$$

Um den Gradienten dieser Komponente anzugeben, sind folgende Ableitungen notwendig:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{u,j}}{\partial t_{1,k}} &= \begin{cases} d_i(t_{1,k}) & \text{für } \text{prod}(k) = i \wedge k \leq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\frac{\partial C_{u,j}}{\partial t_{2,k}} &= \begin{cases} c_i - d_i(t_{2,k}) & \text{für } \text{prod}(k) = i \wedge k < j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\frac{\partial C_{u,j}}{\partial t_{3,k}} &= \begin{cases} -c_i & \text{für } \text{prod}(k) = i \wedge k < j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.65}$$

mit $j = 1, \dots, L$ und $i = \text{prod}(j)$

Die i -te Komponente ($i \in \{1, \dots, n\}$) der nichtlinearen Funktion $C_g(x)$ ist in dem betrachteten Problem – siehe auch (5.60) – gegeben durch

$$C_{g,i} = y_{T_i} - y_{0_i} + D_i(T) - \sum_{\substack{j=1 \\ \text{pr}(j)=i}}^L (c_i(t_{3,j} - t_{2,j}) + D_i(t_{2,j}) - D_i(t_{1,j})). \tag{5.66}$$

Damit ergeben sich zur Berechnung der Gradienten folgende Ableitungen ($i = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{u,i}}{\partial t_{1,j}} &= \begin{cases} d_i(t_{1,j}) & \text{für } \text{prod}(j) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\frac{\partial C_{u,i}}{\partial t_{2,j}} &= \begin{cases} c_i - d_i(t_{2,j}) & \text{für } \text{prod}(j) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\frac{\partial C_{u,i}}{\partial t_{3,j}} &= \begin{cases} -c_i & \text{für } \text{prod}(j) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.67}$$

5.6 TESTBEISPIELE BEI GEGEBENER LOSREIHENFOLGE

Die Beispiele in diesem Kapitel sollen anschaulich sein und umfassen daher nur wenige Produkte. Die Lösung von Beispielen mit einem Produkt werden nicht behandelt, da die optimale Lösung offensichtlich ist. Nach vollständigem Abbau des Anfangslagerstandes wird ein Produkt möglichst lange nach Bedarf gefertigt. Das ist nicht bis zum Ende des Planungshorizonts möglich, da die Rüstzustandsfunktion den Endwert 0 hat und der vorgegebene Endlagerstand positiv sein kann. Im Anschluss an die Bedarfsproduktion muss also so lang auf Lager produziert werden, dass die der gewünschte Endlagerstand erreicht wird und der Lagerstand während des Abrüstvorganges nicht negativ wird. Das garantiert minimale Lagerkosten. Die Rüstkosten umfassen genau einen Aufrüstvorgang für das Produkt, der unmittelbar vor Produktionsbeginn stattfindet und eine Abrüstvorgang am Ende des betrachteten Zeitraums. Die ersten beiden Beispiele stammen von Jodlbauer [22]. Er stellt

dort ein ähnliches Modell zur Optimierung von Rüst- und Produktionsvorgängen vor, wobei zum hier entwickelten Modell ein grundlegender Unterschied besteht: Die Produktion ist nur mit einer fix vorgegebenen produktabhängigen Kapazität möglich, d. h. es gibt in seinem Modell keine Produktion nach Bedarf.

Beispiel 5.1

Zwei Produkte mit konstantem Bedarf werden an einer Maschine gefertigt. Die notwendigen Daten sind in Tabelle 5.3 dargestellt. 1 2 1 1 2 lautet die in [22] ermittelte optimale Losreihenfolge. Da in dem hier vorgestellten Modell die Produktion nach Bedarf möglich ist, werden in einer optimalen Lösung nicht zwei getrennte Lose von ein und demselben Produkt unmittelbar aufeinander folgen. Durch das Zusammenlegen von diesen Losen, erreicht man eine Einsparung bei den Rüstkosten und ein längeres Zeitintervall, in dem nach Bedarf produziert wird, was wiederum die Lagerkosten reduziert. Es wird also versucht für die Losreihenfolge 1 2 1 2 eine Lösung zu finden. Die optimale Lösung für diese Losabfolge ist in Tabelle 5.4 angegeben.

<i>Prod.</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>T</i>	y_0	y_T	t_S	t_R	k_I	k_S
1	1	0,4	10	0,08	0,08	0,2	0,1	4	5
2	1	0,2	10	0,52	0,52	0,3	0,2	4	15

Tabelle 5.3 Daten für Beispiel 5.1

<i>Los</i>	<i>Prod.</i>	$t_{1,i}$	$t_{2,i}$	$t_{3,i}$
1	1	0,200	0,850	2,200
2	2	2,600	2,600	3,825
3	1	4,225	7,075	8,325
4	2	8,725	9,100	9,800

Tabelle 5.4 Lösung für Beispiel 5.1

In Abbildung 5.6 ist die Lösung grafisch dargestellt. Als Gesamtkosten erhält man 66,08, wobei 40 auf Rüstkosten und 26,08 auf Lagerkosten entfallen. Im Vergleich dazu

erhält Jodlbauer bei der optimalen Lösung 78,05 Gesamtkosten. Dieser Unterschied ist auf die unterschiedliche Modellierung der Produktionsrate zurückzuführen. Das Fehlen der Bedarfsproduktion lässt nur eine Produktion auf Lager zu, was Lagerkosten von 33,05 nach sich zieht.

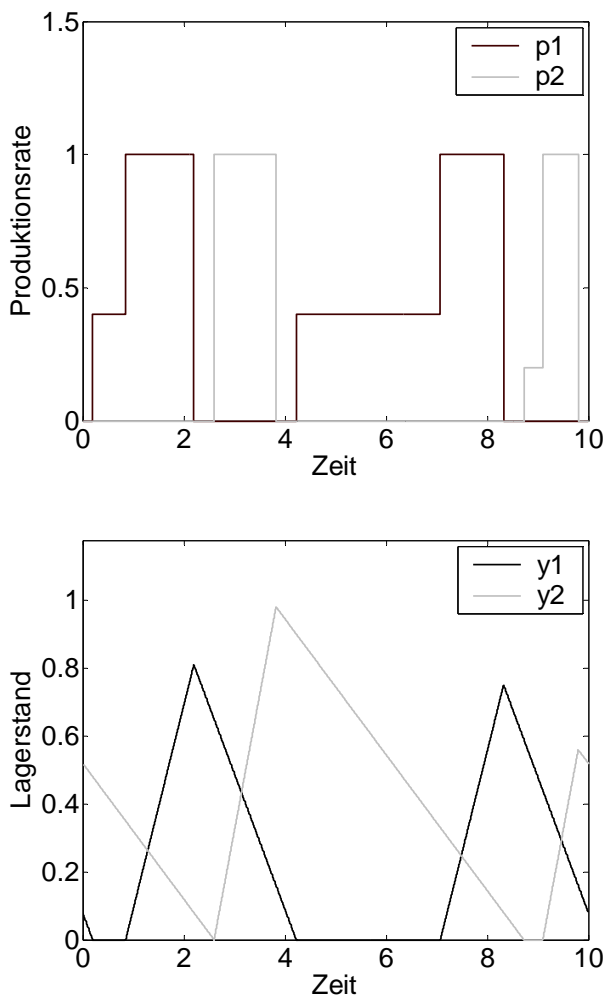


Abbildung 5.6 Produktionsraten und Lagerstände für Beispiel 5.1

Beispiel 5.2

In diesem Beispiel gelten dieselben Angaben wie in Tabelle 5.3 mit der Ausnahme, dass der Bedarf nicht mehr konstant ist, sondern durch die Funktionen

$$\begin{aligned} d_1(t) &= 0,4 + 0,1 \sin(-1 + 0,6\pi t) \\ d_2(t) &= 0,2 + 0,1 \sin(-2,5 + 0,4\pi t) \end{aligned} \tag{5.68}$$

beschreiben wird. Die optimale Losreihenfolgen nach [22] lautet 1 2 1 2 1, diese wird auch hier für die Konstruktion der Lösung verwendet. Die optimale Lösung ist in Tabelle 5.5 und Abbildung 5.7 dargestellt. Die Gesamtkosten betragen dabei 67,16, im Vergleich dazu ist in [22] ein Wert von 77,23 angegeben.

<i>Los</i>	<i>Prod.</i>	$t_{1,i}$	$t_{2,i}$	$t_{3,i}$
1	1	0,242	1,626	2,625
2	2	3,025	3,025	3,880
3	1	4,280	5,808	7,111
4	2	7,511	7,511	8,656
5	1	9,056	9,741	9,900

Tabelle 5.5 Lösung für Beispiel 5.2

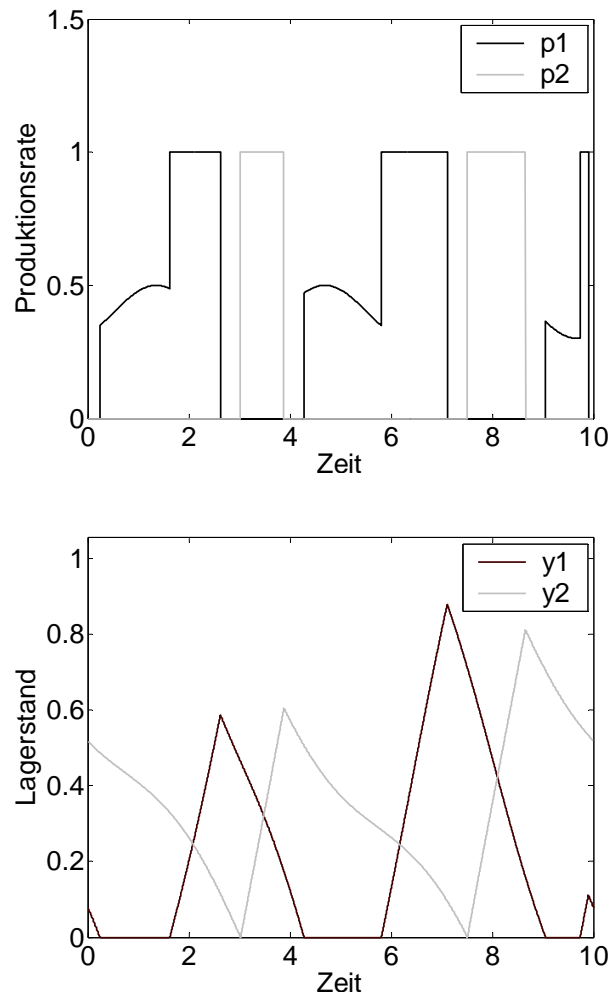


Abbildung 5.7 Produktionsraten und Lagerstände für Beispiel 5.2

6 OPTIMIERUNG DER LOSREIHENFOLGE

Im letzten Kapitel wurde die Losreihenfolge fixiert und unter dieser Einschränkung ein Optimum gesucht. Hier wird nun beschrieben, wie die Losreihenfolge einer bestehenden Lösung geändert und die Zulässigkeit der Lösung weiterhin gewährleistet werden kann. Als Reihenfolgeänderungen werden drei Möglichkeiten angeführt: ein Los weglassen, ein Los hinzufügen und zwei benachbarte Lose vertauschen. Mit der Nacheinanderausführung von diesen drei elementaren Manipulationen können alle beliebigen Reihenfolgeänderungen erreicht werden. Bevor mit der Optimierung begonnen werden kann, ist es allerdings notwendig eine zulässige Startlösung zu konstruieren.

6.1 STARTALGORITHMUS

Ziel dieses Startalgorithmus ist es, eine Lösung für das umformulierte Grundmodell aus Abschnitt 5.4 zu finden, die alle Nebenbedingungen (5.56) - (5.59) erfüllt. Da die Erfüllung der Nichtnegativitätsbedingungen des Lagerstandes für alle Produkte mit steigender Produktanzahl ziemlich komplex wird, basiert der verwendete Algorithmus auf einer einfachen Heuristik, die allerdings nicht für alle beliebigen Beispiele erfolgreich ist.

Bei der Startlösung wird die Möglichkeit der Bedarfsproduktion nicht wahrgenommen, bei der konstruierten Lösung wird der Einfachheit halber jedes Produkt mit der maximal möglichen Produktionskapazität produziert. Für ein Produkt i ist daher die Gesamtproduktionsdauer $T_p(i)$ für den ganzen Planungshorizont durch die Bedarfsfunktion und den Anfangs- bzw. Endlagerstand festgelegt:

$$T_p(i) = y_0(i) - y_T(i) + D_i(T). \quad (6.1)$$

Grundidee der verwendeten Heuristik ist, dass ausgehend von einem bestimmten Zeitpunkt und Lagerstand eines Produkts, die Reichweite für dieses Produkt berechnet werden kann, innerhalb der der Startzeitpunkt für das nächste Produktionslos liegen muss. Die Reichweite rw gibt an, wie lange man mit dem Lagerstand von diesem Produkt zum Zeitpunkt τ_0 auskommt, ohne dieses Produkt produzieren zu müssen. Sie ist für ein Produkt i implizit definiert durch

$$y_i(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{rw(i, \tau_0)} d_i(t) dt. \quad (6.2)$$

Gestartet wird mit dem Zeitpunkt $\tau_0 = 0$ und dem gegebenen Anfangslagerstand y_0 für jedes Produkt. Daraus kann für jedes Produkt die Reichweite bestimmt werden. Die Länge des ersten Berechnungszyklus ist durch die maximale Reichweite rw_{max} , die vom Produkt i^* angenommen wird, begrenzt:

$$rw_{max}(\tau_0) = \max_{i=1, \dots, n} (rw(i, \tau_0)), \quad i^* = \arg \max_{i=1, \dots, n} (rw(i, \tau_0)). \quad (6.3)$$

Es wird angenommen, dass das erste Produktionslos für Produkt i^* zu diesem spätest möglichen Zeitpunkt startet. Alle anderen Produkte werden im Intervall $[\tau_0, rw_{max}(\tau_0)]$ einmal produziert. Die Abfolge der Produktionslose erfolgt nach ansteigender Reichweite. Es bleibt also noch offen, die Länge der einzelnen Lose zu bestimmen. Dazu wird zunächst jene Zeit ermittelt, die tatsächlich für die Produktion zur Verfügung steht. Das ergibt sich aus der Intervalllänge von $[\tau_0, rw_{max}(\tau_0)]$ abzüglich der notwendigen Auf- und Abrüstzeiten, die nun durch die Annahme der Losreihenfolge bekannt sind. Die gesamt mögliche Produktionsdauer für alle Produkte wird gewichtet nach der noch notwendigen Produktionsdauer der einzelnen Produkte (hier $T_p(i)$) aufgeteilt.

Somit können die Losstart- und Endzeitpunkte für das Intervall $[\tau_0, rw_{max}(\tau_0)]$ berechnet werden, indem die einzelnen Produktionslose unter Einhaltung der Auf- und Abrüstzeiten aneinandergereiht werden. Dabei ist noch zu berücksichtigen, dass der Startzeitpunkt eines Loses nicht größer sein darf, als die berechnete Reichweite für das Produkt, das in diesem Los gefertigt wird, damit die Nichtnegativität des Lagerstandes gewährleistet ist. Tritt der Fall ein, dass der Startzeitpunkt größer als die Reichweite des jeweiligen Produkts ist, dann wird der Startzeitpunkt gleich der Reichweite gesetzt und das vorangegangene Los entsprechend verkleinert. Durch diese Verkürzung des vorangegangenen Loses, kann es vorkommen, dass von diesem Produkt nicht mehr ausreichend produziert werden kann, um damit bis zum Ende des betrachteten Intervalls, also bis $rw_{max}(\tau_0)$, die Lieferfähigkeit zu garantieren. Es ist daher notwendig für dieses Produkt jenen Zeitpunkt τ zu bestimmen, zu dem der Lagerstand wieder den Wert 0 erreicht. Gilt $\tau < rw_{max}(\tau_0)$, dann werden nur mehr jene Lose angelegt, deren Endpunkte zuzüglich der notwendigen Rüstzeiten vor τ liegen.

Der nächste Berechnungszyklus startet nach dem Ende des zuletzt festgelegten Produktionsloses inklusive der notwendigen Rüstzeit. Dieser Zeitpunkt τ_1 kann wegen der zuvor beschriebenen möglichen Korrektur kleiner sein als $rw_{max}(\tau_0)$. Für den Zeitpunkt τ_1 werden nun wieder die Lagerstände und die noch erforderliche Restproduktionszeit für alle Produkte berechnet. Aus den Lagerständen ergeben sich erneut Reichweiten für alle Produkte, wobei das Maximum dieser Reichweiten den neuen Berechnungszyklus $[\tau_1, rw_{max}(\tau_1)]$ beschränkt. Dieses Verfahren wird solange durchgeführt, bis die Restproduktionszeit bei allen Produkten gleich null ist.

Bei dem beschriebenen Algorithmus ist es möglich, dass in einem Berechnungszyklus folgende Situation eintritt: Die Reichweiten von zwei Produkten i und j unterscheiden sich nur wenig voneinander und der Losstartzeitpunkt des Produktes mit der geringeren Reichweite (i) ist gleich der Reichweite dieses Produkts. Da die Reichweite von Produkt j nur geringfügig größer ist, kann von Produkt i , wenn es die Rüstzeiten überhaupt zulassen, nur wenig produziert werden. Das würde bedeuten, dass die neue Reichweite von Produkt i nicht viel größer ist als die zuvor bestimmte Reichweite. Nach dem (kleinen) Los von Produkt j müsste wieder sofort Produkt i folgen, falls die neue Reichweite von i größer als jene von j ist. Die Konstruktion der Startlösung kann also nicht mehr sinnvoll fortgesetzt werden. Tritt dieser Fall ein, dann ist eine Korrektur vorgesehen. Diese Korrektur kann durchgeführt werden, wenn in einem vorangegangenen Berechnungszyklus bereits ein Los k von Produkt j vorhanden ist. Dann wird in diesem vorangegangenen Zyklus jenes Los vor Los k mit der größten Reichweite halbiert und Los k um diesen Betrag vergrößert. Das hat zur Folge, dass damit die Reichweite von Produkt j vergrößert wird und oben beschriebene Situation an dieser Stelle nicht mehr eintritt.

Beispiel 6.1

Der Startalgorithmus angewendet auf Beispiel 5.2 liefert die Losreihenfolge 1 2 1. Die Losstart- bzw. Endzeitpunkt sind in untenstehender Tabelle eingetragen. Da bei der Startlösung keine Produktion nach Bedarf erfolgt, sind die Zeitpunkte $t_{1,i}$ und $t_{2,i}$ identisch. Die Gesamtkosten dieser Lösung betragen 84,48. Verwendet man diese Startlösung als Startwert für die Optimierung bei gegebener Losreihenfolge in *MATLAB* mit `fmincon`, so kann man die Gesamtkosten auf 66,30 reduzieren. Damit erhält man eine geringfügig bessere Lösung als die in Beispiel 5.2 angegebene.

<i>Los</i>	<i>Prod.</i>	$t_{1,i}$	$t_{2,i}$	$t_{3,i}$
1	1	0,200	0,200	2,625
2	2	3,025	3,025	5,089
3	1	5,489	5,489	7,035

Tabelle 6.1 Startlösung für Beispiel 5.2

6.2 REIHENFOLGEMANIPULATIONEN

Um von der Startlösung ausgehend eine möglichst gute Lösung für das formulierte Optimierungsproblem zu finden, ist es notwendig die Losreihenfolge zu ändern. Als mögliche Manipulationen werden folgende Möglichkeiten in Betracht gezogen:

- Los weglassen
- Los hinzufügen
- benachbarte Lose vertauschen

Durch mehrfaches Durchführen dieser elementaren Reihenfolgeänderungen kann grundsätzlich jede beliebige Änderung in der Losabfolge herbeigeführt werden.

Für die geänderte Abfolge der Lose kann dann wieder mit Hilfe des Befehl `fmincon` in *MATLAB* ein (lokales) Optimum bestimmt werden. Dabei ist es günstig, die Losabfolge und die dazugehörigen Produktionsstart- und -endzeitpunkte so zu abzuändern, dass die Lösung zulässig bleibt. Um diese Anforderung einfacher zu erreichen, ist es vorteilhaft von einer Lösung auszugehen, bei der nicht nach Bedarf produziert wird. Die Bedarfsproduktion kann bei jeder Lösung eliminiert werden, indem man das Intervall mit Bedarfsproduktion auf die Länge 0 minimiert und den Produktionsendzeitpunkt jedes Loses geeignet nach links verschiebt. Durch diese einfache Transformation bleibt die Zulässigkeit der Lösung erhalten. Die Losstart- und -endzeitpunkte der transformierten Lösung werden mit a_j bzw. b_j bezeichnet und sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 a_j &= t_{1,j} & j &= 1, \dots, L \\
 b_j &= t_{1,j} + \frac{P_j}{c_{pr(j)}} & j &= 1, \dots, L
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

mit $P_j = c_{pr(j)}(t_{3,j} - t_{2,j}) + D_{pr(j)}(t_{2,j}) - D_{pr(j)}(t_{1,j})$

Bei allen drei beschriebenen Reihenfolgemanipulationen wird von dieser transformierten Lösung ohne Bedarfsproduktion ausgegangen.

6.2.1 LOS WEGLASSEN

Das Los k ($k \in \{1, \dots, L\}$) kann unter Einhaltung aller Nebenbedingungen nur dann weggelassen werden, wenn ein Vorgängerlos $k^* < k$ mit dem gleichen Produkt vorhanden ist und genügend Freiraum nach diesem Vorgängerlos geschaffen werden kann, um es um die Losgröße von Los k zu erweitern.

Gibt es ein Vorgängerlos k^* vom gleichen Produkt, dann muss, unter Einhaltung der Zulässigkeit der Lösung, überprüft werden, ob genug Platz vorhanden ist, um das Los k an dieses Los anzuhängen. Dazu werden alle Lose bis zum Los k^* soweit wie möglich nach links verschoben. Diese Linksverschiebung garantiert, dass die Nichtnegativität des Lagerstandes nicht verletzt wird. So erhält man folgende Start- und Endzeitpunkte der Lose:

$$\tilde{a}_j = \begin{cases} t_{S,pr(j)} & j = 1 \\ \tilde{b}_{j-1} + t_{R,pr(j-1)} + t_{S,pr(j)} & j = 2, \dots, k^* \\ a_j & j = k^* + 1, \dots, L. \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\tilde{b}_j = \begin{cases} \tilde{a}_j + (b_j - a_j) & j = 1, \dots, k^* \\ b_j & j = k^* + 1, \dots, L \end{cases}$$

Der Freiraum nach Los k^* kann berechnet werden durch

$$\Delta = \tilde{a}_{k^*+1} - \tilde{b}_{k^*} - t_{R,pr(k^*)} - t_{S,pr(k^*+1)}. \quad (6.6)$$

Ist dieser Freiraum größer als die Länge vom Los k , es gilt also

$$\Delta > \tilde{b}_k - \tilde{a}_k, \quad (6.7)$$

dann kann das Los k weggelassen werden und der Endpunkt von Los k^* wird geändert zu

$$\tilde{b}_{k^* \text{ neu}} = \tilde{b}_{k^*} + \tilde{b}_k - \tilde{a}_k. \quad (6.8)$$

6.2.2 LOS HINZUFÜGEN

Das Hinzufügen eines Loses ist dann sinnvoll, wenn nicht unmittelbar vor bzw. nach dem eingefügten Los ein Los mit dem gleichen Produkt steht. Um die Lagerstände dieses Produkts nicht zu verändern, wird ein Los mit Länge 0 hinzugefügt. Für die Beibehaltung

der Zulässigkeit, ist also nur noch zu überprüfen, ob vor und nach dem eingefügten Los genügend Zeit zum Rüsten zur Verfügung steht. Wird das zusätzliche Los von Produkt i nach dem Los k eingefügt, wobei $k = 0$ dem Einfügen eines Loses zu Beginn (vor dem ersten Los) entspricht, dann ist die erforderliche Rüstzeit gegeben durch

$$t_{SR} = \begin{cases} t_{S,i} + t_{R,i} + t_{S,pr(k+1)} & \text{für } k = 0 \\ t_{S,i} + t_{R,i} + t_{R,pr(k)} & \text{für } k = L. \\ t_{S,i} + t_{R,i} + t_{R,pr(k)} + t_{S,pr(k+1)} & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.9)$$

Der Abstand zwischen den Losen k und $k + 1$ muss mindestens so groß sein, wie diese Rüstzeit, um ein sinnvolles Hinzufügen dieses Loses zu gewährleisten:

$$a_{k+1} - b_k > t_{SR}. \quad (6.10)$$

Die neue zulässige Ausgangslösung für den nächsten Optimierungslauf lautet daher:

$$a_{j,neu} = \begin{cases} a_j & j = 1, \dots, k \\ b_{j-1} + t_{R,pr(j-1)} + t_{S,i} & j = k + 1 \\ a_{j-1} & j = k + 2, \dots, L + 1 \end{cases}$$

$$b_{j,neu} = \begin{cases} b_j & j = 1, \dots, k \\ a_{j,neu} & j = k + 1 \\ b_{j-1} & j = k + 2, \dots, L + 1 \end{cases} \quad (6.11)$$

$$pr_{neu}(j) = \begin{cases} pr(j) & j = 1, \dots, k \\ i & j = k + 1 \\ pr(j-1) & j = k + 2, \dots, L + 1 \end{cases}$$

6.2.3 LOSE VERTAUSCHEN

Das Vertauschen von zwei benachbarten Losen k und $k + 1$ ist dann sinnvoll, wenn nach der Vertauschung nicht zwei Lose desselben Produkts aufeinander folgen. (Diese müssten bei einer Optimierung zu einem Los zusammengefasst werden und das Vertauschen der Lose wäre somit äquivalent zum Weglassen eines Loses.)

Durch die Vertauschung der Lose k und $k + 1$ wird das Los k nach rechts und das Los $k + 1$ nach links verschoben:

$$\begin{aligned}
a_{k,neu} &= b_{k-1} + t_{R,pr(k-1)} + t_{S,pr(k+1)} \\
b_{k,neu} &= a_{k,neu} + b_{k+1} - a_{k+1} \\
a_{k+1,neu} &= b_{k,neu} + t_{R,pr(k+1)} + t_{S,pr(k)} \\
b_{k+1,neu} &= a_{k+1,neu} + b_k - a_k \\
pr_{neu}(k) &= pr(k+1) \\
pr_{neu}(k+1) &= pr(k)
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Die Rechtsverschiebung von Los k könnte die Nichtnegativität des Lagerstandes verletzen. Daher muss der Lagerstand zum Zeitpunkt $a_{k+1,neu}$ überprüft werden:

$$y_{pr(k),neu}(a_{k+1,neu}) = y_{pr(k)}(a_k) - D_{pr(k)}(a_{k+1,neu}) + D_{pr(k)}(a_k). \tag{6.13}$$

Ist dieser Lagerstand kleiner als 0, so muss das neue $k+1$ -te Los um

$$\Delta = -\frac{y_{pr(k),neu}(a_{k+1,neu})}{c_{pr(k)}} \tag{6.14}$$

verkleinert werden und das Vorgängerlos von diesem Produkt um diese Länge vergrößert werden. Voraussetzungen dafür sind, dass überhaupt ein Vorgängerlos desselben Produkts existiert und nach diesem Los genügend Freiraum vorhanden ist, um die Losgröße zu erhöhen. Um den möglichen Freiraum zu vergrößern ist es, so wie (6.5), erlaubt alle Lose einschließlich des betrachteten Vorloses so weit wie möglich nach links zu verschieben. Ist eine der beiden Voraussetzung nicht erfüllt, wird die Vertauschung der beiden Lose nicht durchgeführt.

6.3 BEST-FIRST-SUCHE

Die einfachste Strategie zur Optimierung der Losreihenfolge ist die Best-First-Suche. Dabei werden ausgehend von einer aktuellen Lösung alle zulässig durchführbaren Reihenfolgemanipulationen betrachtet. Diejenige mit der größtmöglichen Verbesserung im Zielfunktional wird schließlich durchgeführt. Das wird so lange wiederholt, bis keine Reihenfolgeoperation zu einer Verbesserung mehr führt. Es handelt sich bei Best-First also um eine lokale Suche. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass der Suchraum mit kleinen, möglichst zielgerichteten Schritten abgesucht wird. Es besteht allerdings die Gefahr, dass man bei dieser Suche bei einem lokalen Minimum hängen bleibt.

Zur Beschreibung des Algorithmus bezeichnet im Folgenden $s \in S$ eine Lösung im Lösungsraum, $f(s)$ die Zielfunktion, m eine Reihenfolgemanipulation von s nach s' , so-

dass gilt $s \xrightarrow{m} s'$ und $M(s)$ die Menge aller Reihenfolgemanipulationen, die von s aus möglich sind. Führt man alle Manipulationen aus $M(s)$ durch, so erhält man eine Menge von Nachbarlösungen, die mit $U(s)$ bezeichnet wird. Der Algorithmus der Best-First-Suche lässt sich damit vereinfacht so formulieren:

Algorithmus 6.1 (Best-First-Suche)

```
(1) s = Startlösung
(2) s* = s
(3) for j = 1, ..., maxiter do
(4)   wähle s aus U(s*), so dass f(s) -> min
(5)   if f(s) < f(s*) then s* = s, goto (3)
(7)   else Abbruch
```

Im ersten Schritt wird eine Startlösung berechnet, die dann im nächsten Schritt als bisher beste Lösung definiert wird. Dann wird im jeden Iterationsschritt der for-Schleife die beste Lösung aus der Umgebung U der bisher besten Lösung s^* , die sich ausgehend von der Lösung s^* , aus allen möglichen Reihenfolgemanipulationen ergibt, ausgewählt. Die beste Lösung s aus $U(s^*)$ wird mit der Lösung s^* verglichen (siehe Zeile 5). Ist diese besser als s^* , dann wird s^* durch s ersetzt und es folgt der nächste Iterationsschritt, wenn die Maximalanzahl an Iterationen (maxiter) noch nicht überschritten ist. Wenn keine bessere Lösung gefunden wird, wird der Algorithmus abgebrochen.

6.4 MODIFIZIERTE BEST-FIRST-SUCHE

Um die Rechenzeit pro Iterationsschritt bei der Best-First-Suche zu verkürzen, wurde als alternativer Algorithmus die Best-First-Suche etwas modifiziert. Es wird bei jedem Iterationsschritt nur so lange die Reihenfolge manipuliert bis eine Lösung gefunden wird, die besser ist, als die aktuell beste Lösung. Von dieser Lösung wird im nächsten Iterationsschritt wieder neu gestartet, bis wieder eine Verbesserung erzielt wird. Kann keine bessere Lösung durch Ausprobieren aller möglichen Reihenfolgemanipulationen gefunden werden oder ist eine vorgegebene Anzahl an maximalen Iterationen erreicht, bricht der Algorithmus ab.

Algorithmus 6.2 (modifizierte Best-First-Suche)

```

(1) s = Startlösung
(2) s* = s
(3) for j = 1, ..., maxiter do
(4)   wähle s aus U(s*)
(5)   if f(s) < f(s*): s* = s then go to (3)
       else
(6)     if  $\nexists$  s aus U(s*) mit s < s* then
           Abbruch
(7)     else go to (4)

```

6.5 TABU-SUCHE

Die Tabu-Suche ist ein heuristisches Optimierungsverfahren, das im einfachsten Fall eine weitere Modifikation der Best-First-Suche darstellt (siehe [9]). Eine Schwäche von Best-First ist das Problem, dass der Algorithmus abbricht, wenn er ein lokales Minimum gefunden hat. Die Tabu-Suche versucht diese Schwäche auszumerzen, indem nicht nur die aktuelle Umgebung einer Lösung betrachtet wird, sondern auch der bisherige Verlauf der Suche. Die Umkehrung einer durchgeführten Reihenfolgemanipulation wird in einer Tabuliste abgespeichert und wird für eine bestimmte Anzahl von Suchschritten (Tabudauer) verboten. D. h. wenn z. B. ein Los von einem Produkt eingefügt wurde, dann darf es nicht gleich wieder entfernt werden. Ist die Tabudauer groß genug, dann kann die Suche nicht in einem lokalen Minimum hängen bleiben, weil nach hinreichend vielen Schritten die nähere Umgebung des lokalen Optimums tabu ist und die Suche in anderen Bereichen des Lösungsraumes fortgesetzt werden muss.

Algorithmus 6.3 (Tabu-Suche)

```

(1) s = Startlösung
(2) s* = s
(3) for j = 1, ..., maxiter do
(4)   wähle m aus M(s) \ T mit  $s \xrightarrow{m} s'$  so dass  $f(s') \rightarrow \min$ 
(5)   s = s'
(6)   if f(s) < f(s*) then s* = s
(7)   Tabuliste T aktualisieren
(8)   goto (3)

```

7 TESTBEISPIELE

In diesem Kapitel werden die Testergebnisse des beschriebenen Lösungsansatzes für das entwickelte Modell zusammengefasst. Anhand von verschiedenen Beispielen, deren Struktur im ersten Abschnitt genauer beschrieben wird, werden zunächst im zweiten Abschnitt die drei verwendeten heuristischen Verfahren zur Reihenfolgeoptimierung miteinander verglichen. Im dritten Abschnitt erfolgt die Gegenüberstellung mit einem an der FH Steyr entwickelten Integrierten Zeitkontinuierlichen Schedulermodell (IZKS).

7.1 BESCHREIBUNG DER TESTUMGEBUNG

Der erste Satz von Testbeispielen umfasst zehn Problemstellungen mit unterschiedlicher Produktanzahl. Beispiel 1 und 2 sind die im Kapitel 4 angeführten Beispiel 5.1 und Beispiel 5.2 mit jeweils zwei Produkten. Bei den restlichen Beispielen stimmt die Beispielnummer mit der Anzahl der Produkte überein. Der Planungshorizont beträgt jeweils 10 Zeiteinheiten. Der Bedarf ist bei den Beispielen 1, 4, 5, 8 und 9 konstant, bei den Beispielen 2, 3, 6, 7 und 10 dynamisch. Als Bedarfsfunktion wurde für jedes Produkt die Summe einer linearen Funktion und einer Sinusfunktion mit frei wählbarer Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung gewählt:

$$d(t) = d_1 + d_2 t + d_3 \sin(d_4 + d_5 \pi t) \quad (7.1)$$

Die detaillierten Inputdaten für die Aufgaben 3 – 10 sind im Anhang zu finden.

Der zweite Satz von Testbeispielen (Beispiele 6+ - 10+) umfasst fünf Problemstellungen, wobei die Produktanzahl von 6 bis 10 variiert. Der Planungshorizont beträgt bei den Aufgaben 6+ und 7+ jeweils 15, bei 8+ und 9+ 30 und bei Beispiel 10+ 315. Die Gestalt der Bedarfsfunktionen ist wie in (7.1) angegeben und alle anderen Inputdaten dieser Aufgaben sind ebenfalls im Anhang angeführt. Im Gegensatz zu den ersten zehn Testaufgaben, bei denen die Anzahl der Lose in den berechneten Lösungen maximal 21 beträgt, führen die Aufgaben 6+ - 10+ auf Lösungen mit einer höheren Losanzahl (ca. 50), was die Anzahl der Variablen und damit auch die Rechenzeit vervielfacht.

Alle Aufgaben wurden bei folgender Rechnerkonfiguration durchgeführt: Pentium IV, 1,7 GHz, 256 MB RAM.

7.2 VERGLEICH DER OPTIMIERUNGSLGORITHMEN

Die 15 definierten Testbeispiele wurden mit drei verschiedenen heuristischen Verfahren zur Reihenfolgeoptimierung gerechnet: mit der Best-First-Suche (siehe Abschnitt 6.3), mit einer modifizierten Best-First-Suche (siehe 6.4) und mit der Tabu-Suche (siehe 6.5). Die Gesamtkosten der berechneten Lösungen sind in Tabelle 2.1 und die dazugehörigen Rechenzeiten in Tabelle 7.2 dargestellt.

Beispiel	Best First	mod. Best First	Tabu Suche
1	66,08	66,08	66,08
2	63,52	63,52	63,52
3	144,51	144,51	144,51
4	72,26	72,26	72,26
5	196,51	196,51	196,51
6	187,89	187,89	187,89
7	141,27	143,38	141,27
8	143,28	144,20	141,90
9	424,71	539,61	424,71
10	229,38	229,27	229,38
6+	52831,45	53134,97	52763,43
7+	55822,70	55962,82	55695,55
8+	144828,56	133186,02	132372,01
9+	106298,21	106610,11	106298,21
10+	10821728	10826872	10743851

Tabelle 7.1 Vergleich der Gesamtkosten

Bei den ersten 6 Beispielen liefern alle drei Algorithmen die gleiche Lösung. Die Best-First-Suche erreicht bei den Beispielen 7, 9+ und 9+ die beste Lösung, während die modifizierte Best-First-Suche noch bei der Aufgaben 10 am besten abschneidet. Insgesamt am erfolgreichsten ist die Tabu-Suche, die bei allen Aufgaben mit Ausnahme von Nr. 10 den kleinsten Zielfunktionswert hat. Die Rechenzeiten sind bei den Beispielen 1 – 10, 7+ und 9+ bei der modifizierten Best-First-Suche am kürzesten, die Best-First-Suche liefert bei den Aufgaben 6+, 8+ und 10+ die schnellsten Rechenzeiten. Bei der Tabu-Suche sind die Rechenzeiten bei den meisten Beispielen am längsten, sie hängen aber sehr stark von der Anzahl der gewählten Maximalanzahl an Iterationen ab, da fast immer diese maximale

Anzahl an Iterationen auch durchgeführt wird. Es erfolgt nur dann ein früherer Abbruch, wenn von der aktuellen Lösung keine Reihenfolgemanipulationen mehr zulässig sind.

Beispiel	Best First	mod. Best First	Tabu Suche
1	0,53	0,25	0,28
2	0,64	0,39	0,62
3	1,33	1,19	11,44
4	6,99	3,46	34,75
5	20,08	13,07	41,84
6	46,83	23,66	47,25
7	97,11	85,48	498,48
8	97,11	37,22	378,42
9	195,45	3,97	664,50
10	1036,44	913,40	2876,73
6+	2656,40	3961,68	6811,19
7+	9381,55	3013,27	14265,19
8+	10159,91	45425,31	227256,95
9+	124715,82	16646,80	126752,05
10+	28263,91	58330,22	125218,92

Tabelle 7.2 Vergleich der Rechenzeiten (in Sekunden)

In der Tabelle 7.3 sind die Anzahl der Lose und die Gesamtkosten von der gewählten Startlösung und der besten gefunden Lösung gegenübergestellt. Bei der Startlösung wurde nach dem in Abschnitt 6.1 angeführten Algorithmus eine Optimierung für die gefundene Reihenfolge durchgeführt und dann die Zielfunktion ausgewertet.

Bei Beispiel 3 stimmt die Startlösung bereits mit der besten gefunden Lösung überein, während bei allen anderen Beispielen eine Verbesserung um bis zu 52,6 % (bei Beispiel 8+) erzielt werden kann. Der Startlösungsalgorithmus ist so konzipiert, dass er versucht eine zulässige Lösung mit möglichst wenig Produktionslosen zu erstellen. Da bei den Beispielen 6+ - 10+ Lösungen mit geringen Gesamtkosten eine relativ große Anzahl an Losen aufweisen, weichen bei diesen Beispielen die Startlösung und die optimierte Lösung stark voneinander ab. Das erklärt wiederum auch die hohen Rechenzeiten bei diesen Beispielen.

Beispiel	Startlösung		Optimierung	
	Anzahl Lose	K ges	Anzahl Lose	K ges
1	3	67,53	4	66,08
2	3	66,30	4	63,52
3	6	144,51	6	144,51
4	7	74,62	6	72,26
5	13	203,85	12	196,51
6	13	207,00	10	187,89
7	14	149,60	13	141,27
8	11	169,19	15	141,90
9	10	541,74	15	424,71
10	12	287,20	21	229,27
6+	15	72487,00	26	52763,43
7+	15	81716,00	36	55695,55
8+	15	279360,00	50	132372,01
9+	17	186040,00	51	106298,21
10+	48	13213000	54	10743851

Tabelle 7.3 Vergleich Startlösung - Optimierung

7.3 VERGLEICH ZU IZKS

In [22] entwickelte Jodlbauer ein Modell zur Minimierung der Rüst- und Lagerkosten bei einer Maschine und mehreren Produkten. Dieses Modell unterscheidet sich von dem hier beschriebenen Grundmodell vor allem im Zulässigkeitsbereich der Produktionsrate. Während im Grundmodell die Produktionsrate eines Produkts i jeden Wert im Intervall $[0, c_i]$ gewählt werden kann, erlaubt Jodlbauer in seinem Modell nur die beiden diskreten Werte 0 und c_i . Das hat zur Folge, dass die Bedarfsproduktion in einer Lösung nicht vorkommt und sich die Lagerkosten damit erhöhen.

Basierend auf dem in [22] beschriebenen Integrierten Zeitkontinuierlichen Schedulermodell (IZKS-Modell) entwickelten Jodlbauer und Reitner im Rahmen des Forschungsprojektes „Produktionssysteme“ an der Fachhochschule Steyr einen in C++ implementierten Algorithmus zur Lösung dieser Problemklasse. Die Grundstruktur ist gleich, wie die hier beschriebene, allerdings unterscheiden sich die Lösungsansätze für die Teilprobleme erheblich. Der von Jodlbauer entwickelte Startalgorithmus basiert auf Ideen des EPL-Modells (siehe Abschnitt 2.2.2) und beginnt mit der Konstruktion der Lösung am Ende des

Planungshorizonts. Die dabei errechnete Lösung ist nicht immer zulässig, die Produktionsstart- und Endzeitpunkte vor Beginn des Planungshorizonts liegen können. Die Optimierung für eine gegebene Losreihenfolge basiert auf einem Liniensuchverfahren mit selbst definierten heuristischen Suchrichtungen. Für die Optimierung der Losreihenfolge werden auch die hier verwendeten Reihenfolgemanipulationen (Lose vertauschen, Los hinzufügen, Los weglassen) berücksichtigt. Bei der Auswahl der Änderungen wurden allerdings die Verbesserungspotentiale jeder Änderung abgeschätzt und nur die Manipulationen mit den besten Erfolgsaussichten tatsächlich durchgeführt.

Um Referenzwerte für den in *MATLAB* implementierten Optimierungsalgorithmus zu erhalten, wurden die angeführten Beispiele mit dem IZKS-Modell gelöst. Die Anzahl der Lose, die Gesamtkosten und die Rechenzeit der einzelnen Lösungen sind in folgender Tabelle aufgelistet.

Beispiel	Anzahl Lose	K ges	Rechenzeit
1	5	78,05	0,53
2	5	75,82	0,91
3	7	150,89	3,26
4	7	75,22	16,88
5	11	203,40	17,25
6	12	209,05	21,60
7	14	162,01	13,20
8	18	160,47	72,36
9	18	477,66	234,33
10	20	243,15	47,54
6+	32	55929,00	90,45
7+	35	59924,00	306,19
8+	64	140760,00	270,56
9+	65	111210,00	416,87
10+	65	10388060	3237,50

Tabelle 7.4 Ergebnisse des IZKS-Modells

Das IZKS-Modell liefert bei jedem Beispiel eine andere Lösung, was zumeist bereits an der Anzahl zu erkennen ist. Dieser Umstand ist nicht weiter verwunderlich, da die Voraussetzung für die Optimierung der Lagerkosten in den beiden Modellen sich unterscheiden. Vergleicht man die Gesamtkosten, so liefert die Optimierung in *MATLAB* klarerweise

deutlich bessere Zielfunktionswerte (siehe Tabelle 7.5, mit Ausnahme von Beispiel 10+). Um den Vergleich etwas fairer zu gestalten, wenngleich dann die *MATLAB*-Optimierung etwas im Nachteil ist, wurden die errechneten Lösung wie in Gleichung (6.4) so transformiert, dass die Bedarfsproduktion wegfällt. Die Gesamtkosten, die man dann erhält, wurden mit der Lösung des IZKS-Modells verglichen. Der Unterschied in Prozent ist in der folgenden Tabelle in der dritten Spalte (korrigierte Gesamtkosten) ersichtlich. Dabei bedeutet ein positiver Wert, dass die Lösung des IZKS-Modells besser ist.

Beispiel	K ges	korr. K ges	Rechenzeit
1	-15,33 %	4,71 %	-52,73 %
2	-16,23 %	1,50 %	-56,84 %
3	- 4,23 %	2,10 %	-63,38 %
4	- 3,94 %	- 0,68 %	-79,54 %
5	- 3,39 %	- 1,76 %	-24,22 %
6	-10,12 %	- 4,55 %	9,55 %
7	-12,80 %	2,58 %	635,73 %
8	-10,71 %	- 7,64 %	34,20 %
9	-11,09 %	1,08 %	-16,59 %
10	- 5,71 %	- 0,42 %	1821,38 %
6+	- 5,66 %	- 0,23 %	7430,34 %
7+	- 7,06 %	- 5,18 %	4558,93 %
8+	- 5,96 %	1,14 %	83895,34 %
9+	- 4,42 %	2,04 %	29817,27 %
10+	3,42 %	10,66 %	3767,76 %

Tabelle 7.5 Vergleich Optimierung *MATLAB* – IZKS

Nur bei Aufgabe 10+ sind die Gesamtkosten etwas höher als beim IZKS-Modell. Startet man die Optimierung in *MATLAB* mit der Lösung des IZKS-Modells, so kann diese nach 20 Iterationen des Best-First-Algorithmus noch um 3,58 % verbessert werden.

Bei knapp der Hälfte der Beispiele ist auch nach der durchgeführten Transformation die optimierte Lösung in *MATLAB* besser. Nur bei den Beispielen mit sehr wenigen Produkten (Beispiel 1 – 3), Beispielen mit geringer Auslastung (Beispiel 7, 9 und 10) und Beispielen, deren beste Lösung viele Produktionslose umfasst (Beispiel 8+ – 10+) ist das IZKS-Modell besser bzw. nur wenig schlechter. Mit Auslastung ist dabei der Quotient (*Summe Rüstzeiten + Produktionszeiten*) / *T* gemeint, wobei zur Berechnung der Produktionszeiten die

transformierte Lösung ohne Bedarfsproduktion verwendet wird. Die Auslastung liegt bei den Beispielen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 8 zwischen 70 und 90 %, bei den Beispielen 7, 9 und 10 aber nur bei 40 – 50 %. Bei geringer Auslastung kann der Vorteil der Bedarfsproduktion zur Minimierung der Lagerkosten stärker ausgenutzt werden und die Optimierung der beiden verglichenen Modelle unterscheidet sich stärker als bei höherer Auslastung. Die Rechenzeit ist bei den ersten fünf Beispielen und bei Beispiel 9 in *MATLAB* kürzer, als bei dem in C++ implementierten Algorithmus. Bei Beispielen mit steigender Produktanzahl kann die Rechenzeit bei der Optimierung in *MATLAB* allerdings deutlich höher sein.

8 LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Arrow K. J., Karlin S.: Production over time with increasing marginal costs, in: K. J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf (Eds.) Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford University Press, Standford, 61-69, 1958.
- [2] Bai S. X., Varanasi S.: An optimal production flow control problem with piecewise constant demand, Mathematical Computer Modelling Vol. 24, No. 7, 87 – 107, 1996.
- [3] Drexl A., Haase K.: Proportional lotsizing and scheduling, International Journal of Production Economics, 40, 73-87, 1995.
- [4] Feichtinger G., Hartl R. F.: Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse, de Gryuter, Berlin, 1986.
- [5] Fleischmann B.: The discrete lot-sizing and scheduling problem, European Journal of Operational Research, 44 (3), 337-348, 1990.
- [6] Fleischmann B.: The discrete lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs, European Journal of Operational Research, 75, 395-404, 1994.
- [7] Fleischmann B., Meyr H.: The general lotsizing and scheduling problem, OR Spektrum 19, 11-21, 1997.
- [8] Giri B. C., Moon I.: Accounting for idle capacity cost in the scheduling of economic lot sizes, International Journal of Production Research, 42 (4), 677-691, 2004.
- [9] Glover F., Laguna M.: Tabu Search, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.
- [10] Goldratt E.: The Theory of Constraints, North River Press, Great Barrington, 1990.
- [11] Goldratt E., Cox J.: The Goal: A Process of Ongoing Improvement, revised edition, North River Press, Great Barrington, 1987.
- [12] Gupta M., Ko H.-J., Min H.: TOC-based performance measures and five focusing Steps in a job-shop manufacturing environment, International Journal of Production Research, 40 (4), 907-930,2002.

- [13] Haase K.: Lotsizing and Scheduling for Production Planning, Springer, Berlin, 1994.
- [14] Hanssmann F.: Operations Research in Production and Inventory, John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [15] Harris F. W.: How many part to make at once, *Factory, The Magazine of Management*, 10 (2): 135-136, 1913.
- [16] Hartl R. F., Sethi S. P., Vickson R. G.: A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints, *SIAM Review*, Vol. 37, No. 2, pp. 181-218, June 1995.
- [17] Higgens P., Le Roy P., Tierney L.: *Manufacturing Planning and Control, Beyond MRP II*, Chapman&Hall, London, 1999.
- [18] Holt C. C., Modigliani F., Muth J. F., Simon H. A.: *Production Planning, Inventories and Work Force*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1960.
- [19] Hopp W. J., Spearman M. L.: *Factory Physics, Foundations of Manufacturing and Management*, Irwin, New York, 1996.
- [20] Ioffe A. D., Tichomirov V. M.: *Theorie der Extremalaufgaben*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.
- [21] Jensen M. T., Khouja M.: An optimal polynomial time algorithm for the common cycle economic lot and delivery scheduling problem, *European Journal of Operational Research* 156, 305-311, 2004.
- [22] Jodlbauer H.: An approach for integrated scheduling and lot-sizing, *European Journal of Operational Research*, Vol. 172, Issue 2, 386 – 400.
- [23] Karmarkar U. S., Kekre S., Kekre S.: The Deterministic Lotsizing Problem with startup and reservation costs, *Operations Research*, 35 (3), 389-398, 1987.
- [24] Karmarkar U. S., Schrage L.: The Deterministic Dynamic Product Cycling Problem, *Operations Research*, 33 (2), 326-345, 1985.
- [25] Khmelnitsky E., Kogan K., Maimon M.: Maximum principle-based methods for production scheduling with partially sequence-dependent setups, *International Journal of Production Research*, Vol. 35, No. 10, 2701-2712, 1997.

- [26] Knolmayr G.: Advanced Planning and Scheduling Systems: Optimierungsmethoden als Entscheidungskriterium für die Beschaffung von Software-Paketen, erschienen in: Wagner U. (Hrsg.): Zum Erkenntnisstand der Betriebswirtschaftslehre am Beginn des 21. Jahrhunderts, Festschrift für Erich Loitlsberger zum 80. Geburtstag, Berlin: Duncker & Humbolt 2001, S. 135-155.
- [27] Kogan K., Perkins J., R.: Infinite horizon production planning with periodic demand: solvable cases and a general numerical approach, IIE Transactions 35, 61 – 71, 2003.
- [28] Kogan K.: Discrete event control of production flows: make-to-stock and make-to-order environments, International Journal of Production Research, Vol. 35, No. 6, 1729 – 1741, 1997.
- [29] Kogan K., Khmel'nitsky E., Shtub A., Maimon O.: Optimal flow control of flexible manufacturing systems: Setup localization by an iterative procedure, International Journal of Production Economics 51, 37 – 46, 1997.
- [30] Maimon O., Khmel'nitsky E., Kogan, K.: Optimal flow control in manufacturing systems, Production planning and scheduling, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998.
- [31] Meyr H.: Simultaneous lotsizing and scheduling by combining local search with dual reoptimization, European Journal of Operations Research 120, 311 – 326, 2000.
- [32] Orlicky J.: Material Requirements Planning, the New Way of Life in Production and Inventory Management. New York, McGraw Hill, 1975.
- [33] Rempala R.: Joint replenishment multiproduct inventory problem with continuous production and discrete demands, International Journal of Production Economics 81-82, 495 – 511, 2003.
- [34] Salomon M.: Deterministic Lotsizing Models for Production Planning, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [35] Schragenheim E., Dettmer, W.: Manufacturing at Warp Speed: Optimizing Supply Chain Financial Performance, St. Lucie Press, Florida, 2001.
- [36] Seierstad A., Sydsaeter K.: Optimal Control Theory with Economic Applications, Elsevier, Amsterdam, 1987.

- [37] Segerstedt A.: Lot Sizes in a capacity constrained facility with available initial inventories, *International Journal of Production Economics* 59, 469-475, 1999.
- [38] Sethi S. P., Thompson G. L.: *Optimal Control Theory, Applications to Management Science and Economics*, Second Edition, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.
- [39] Soman C. A., Van Donk D. P., Gaalman G. J. C.: A basic period approach to the economic lot scheduling problem with shelf life considerations, *International Journal of Production Research*, 42 (8), 1677-1689, 2004.
- [40] Taft E. W.: Formulas for Exact and Approximate Evaluation – Handling Cost of Jigs and Interest Charges of Product Manufactured Included. *The Iron Age* 101: 1410-12, 1918.
- [41] Tempelmeier H.: *Material-Logistik, Modelle und Algorithmen für die Produktionsplanung und -steuerung und das Supply Chain Management*, Springer, Berlin, 2003.
- [42] Vollmann T. E., Berry W. L., Whybark D. C.: *Manufacturing Planning and Control Systems*, Richard D. Irwin Inc., 1988.
- [43] Wagner H. W., Whitin T. H.: Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, 5 (1): 88-96, 1958.
- [44] Zäpfel G.: *Grundzüge des Produktions- und Logistikmanagement*, de Gruyter, Berlin, 1996.

9 ANHANG

9.1 DATEN FÜR DIE BEISPIELE 3 – 10

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	1,5	0	0,1	0,2	4	10	2
2	0,5	0	0,2	0,3	4	15	2
3	0,8	0	0,3	0,4	4	10	3

Tabelle 9.1 Daten für Beispiel 3

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	0,4	0,05	0,1	-1	0,4
2	0,3	0	0,2	1	0,3
3	0,5	-0,025	0,05	2	0,5

Tabelle 9.2 Bedarfsdaten für Beispiel 3

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	1	1	0,1	0,1	1	3	2
2	1	0,5	0,1	0,1	1	5	2
3	1	1	0,1	0,1	1	7	2
4	0,5	0,5	0,1	0,1	1	9	2

Tabelle 9.3 Daten für Beispiel 4

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	0,4	0	0	0	0
2	0,2	0	0	0	0
3	0,3	0	0	0	0
4	0,5	0	0	0	0

Tabelle 9.4 Bedarfsdaten für Beispiel 4

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	0,08	0,08	0,1	0,1	4	5	2
2	0,52	0,52	0,1	0,1	4	15	2
3	1	0	0,1	0,1	4	10	2
4	0,5	0	0,1	0,1	4	5	2
5	1,5	0	0,1	0,1	4	8	2

Tabelle 9.5 Daten für Beispiel 5

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	0,4	0	0	0	0
2	0,2	0	0	0	0
3	0,3	0	0	0	0
4	0,2	0	0	0	0
5	0,5	0	0	0	0

Tabelle 9.6 Bedarfsdaten für Beispiel 5

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	0,4	0	0,2	0,1	2	5	4
2	0,3	0	0,1	0,2	3	5	4
3	1	0	0,2	0,1	6	15	4
4	0,5	0	0,1	0,2	2	10	4
5	1,5	0	0,2	0,1	3	5	4
6	1,2	0	0,1	0,2	4	10	4

Tabelle 9.7 Daten für Beispiel 6

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	0,2	0,01	0,03	1	0,4
2	0,3	0,005	0,1	2	0,3
3	0,4	-0,01	0,2	3	0,2
4	0,5	0	0,01	2	0,3
5	0,4	0	0,02	1	0,4
6	0,3	0	0,05	2	0,1

Tabelle 9.8 Bedarfsdaten für Beispiel 6

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	0,2	0	0,1	0,1	1	10	10
2	0,3	0	0	0,2	2	2	10
3	0,4	0	0	0,2	1	5	10
4	0,5	0	0	0,1	4	8	10
5	0,4	0	0,1	0,2	2	10	10
6	0,3	0	0,1	0,1	1	5	10
7	0,2	0	0	0,1	2	5	10

Tabelle 9.9 Daten für Beispiel 7

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	0,1	0,01	0,03	3	0,3
2	0,2	0,01	0,1	2	0,2
3	0,3	-0,01	0,2	4	0,5
4	0,3	0,03	0,01	1	0,1
5	0,2	0,02	0,02	2	0,2
6	0,5	-0,01	0,05	3	0,7
7	0,3	-0,005	0,02	2	0,2

Tabelle 9.10 Bedarfsdaten für Beispiel 7

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	1,2	0	0	0,2	1	5	3
2	1	0	0	0,1	3	4	3
3	0,8	0	0	0,3	1	6	3
4	0,6	0	0	0,1	4	2	3
5	0,5	0	0	0,3	3	5	3
6	0,4	0	0	0,1	2	3	3
7	0,8	0	0	0,2	4	3	3
8	0,6	0	0	0,1	3	2	3

Tabelle 9.11 Daten für Beispiel 8

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	0,4	0	0	0	0
2	0,2	0	0	0	0
3	0,1	0	0	0	0
4	0,3	0	0	0	0
5	0,5	0	0	0	0
6	0,3	0	0	0	0
7	0,2	0	0	0	0
8	0,1	0	0	0	0

Tabelle 9.12 Bedarfsdaten für Beispiel 8

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	1,3	1,5	0,05	0,05	2	16	20
2	1,1	1,4	0	0,1	2	14	20
3	0,8	1,3	0,05	0	0,5	2	20
4	0,9	0,8	0,1	0,05	1	8	20
5	1,2	0	0	0,1	1	10	20
6	0,5	0	0	0,05	2	18	20
7	1	0	0	0,2	3	17	20
8	0,5	0	0,1	0,08	4	28	20
9	1,4	0	0,05	0,1	4	13	20

Tabelle 9.13 Daten für Beispiel 9

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	0,9	0	0	0	0
2	0,1	0	0	0	0
3	0,2	0	0	0	0
4	0,4	0	0	0	0
5	0,4	0	0	0	0
6	0,3	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0
8	0,8	0	0	0	0
9	0,5	0	0	0	0

Tabelle 9.14 Bedarfsdaten für Beispiel 9

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_s	k_I	k_S	c
1	1	0	0	0,05	1	5	20
2	1,5	0	0	0,05	1	5	20
3	2	0	0	0,05	1	5	20
4	2,5	0	0	0,05	1	5	20
5	3	0	0	0,05	1	5	20
6	3,5	0	0	0,05	1	5	20
7	3	0	0	0,05	1	5	20
8	2,5	0	0	0,05	1	5	20
9	2	0	0	0,05	1	5	20
10	1,5	0	0	0,05	1	5	20

Tabelle 9.15 Daten für Beispiel 10

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	0,9	0,04	0,9	5	0,1
2	0,9	-0,09	0,1	3	0,8
3	0,9	0,01	0,7	3	0,2
4	0,7	0,04	0,2	3	0,5
5	1,5	-0,1	0,3	10	0,9
6	0,7	0,08	0,5	4	0,9
7	0,5	0,01	0,2	7	0,3
8	1,2	-0,08	0,3	8	0,5
9	0,9	0,06	0,6	8	0,5
10	0,6	0,1	0,9	7	0,4

Tabelle 9.16 Bedarfsdaten für Beispiel 10

9.2 DATEN FÜR DIE BEISPIELE 6+ - 10+

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	200	0	0	0,055	5	1000	728
2	300	0	0	0,069	3	600	728
3	400	0	0	0,027	2	400	728
4	400	0	0	0,055	3	1000	728
5	300	0	0	0,041	2	400	728
6	600	0	0	0,041	4	400	728

Tabelle 9.17 Daten für Beispiel 6+

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	84,1	1,2	23,6	-23,6	0,4
2	79,6	2,0	17,9	-16,6	1,6
3	83,4	1,0	25,0	-17,5	0,5
4	78,0	1,9	-14,9	- 1,7	-1,2
5	38,6	5,7	14,7	3,2	1,1
6	74,6	2,2	-22,0	- 1,7	-1,5

Tabelle 9.18 Bedarfsdaten für Beispiel 6+

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	200	0	0	0,014	1	400	728
2	300	0	0	0,069	2	200	728
3	400	0	0	0,027	3	600	728
4	400	0	0	0,069	4	1000	728
5	200	0	0	0,069	5	800	728
6	300	0	0	0,014	4	600	728
7	600	0	0	0,041	3	200	728

Tabelle 9.19 Daten für Beispiel 7+

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	85	1,2	10	-23,6	0,4
2	81	2,0	15	-16,6	0,3
3	78	1,0	12	-17,5	0,5
4	60	1,9	-10	-1,7	-0,2
5	74	1,0	-5	0	0,5
6	78	3,0	7	3,2	0,4
7	67	2,2	-12	-1,7	-0,1

Tabelle 9.20 Bedarfsdaten für Beispiel 7+

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_s	k_I	k_S	c
1	200	0	0	0,027	4	2000	754
2	300	0	0	0,027	1	600	754
3	400	0	0	0,027	3	1200	754
4	400	0	0	0,053	3	400	754
5	200	0	0	0,053	5	800	754
6	100	0	0	0,066	4	800	754
7	300	0	0	0,014	1	2000	754
8	600	0	0	0,041	3	1000	754

Tabelle 9.21 Daten für Beispiel 8+

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	65	0	0	0	0
2	71	0	0	0	0
3	68	0	0	0	0
4	50	0	0	0	0
5	85	0	0	0	0
6	45	0	0	0	0
7	63	0	0	0	0
8	56	0	0	0	0

Tabelle 9.22 Bedarfsdaten für Beispiel 8+

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	200	0	0	0,027	2	1000	754
2	300	0	0	0,040	2	400	754
3	400	0	0	0,027	1	200	754
4	400	0	0	0,027	2	1000	754
5	200	0	0	0,053	2	1000	754
6	100	0	0	0,040	2	800	754
7	400	0	0	0,040	1	400	754
8	300	0	0	0,014	2	1000	754
9	600	0	0	0,041	4	800	754

Tabelle 9.23 Daten für Beispiel 9+

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	52	0	0	0	0
2	67	0	0	0	0
3	40	0	0	0	0
4	75	0	0	0	0
5	60	0	0	0	0
6	48	0	0	0	0
7	59	0	0	0	0
8	63	0	0	0	0
9	72	0	0	0	0

Tabelle 9.24 Bedarfsdaten für Beispiel 9+

<i>Prod.</i>	y_0	y_T	t_R	t_S	k_I	k_S	c
1	415	415	0	0,125	0,271	15000	300
2	74	74	0	0,125	7,396	20000	80
3	73	73	0	0,250	5,313	30000	95
4	8	8	0	0,125	4,167	10000	75
5	36	36	0	0,500	116,042	110000	20
6	106	106	0	0,250	11,146	50000	60
7	65	65	0	1,000	62,500	310000	24
8	53	53	0	0,500	245,833	130000	13
9	165	165	0	0,750	37,500	200000	20
10	55	55	0	0,125	1,667	5000	150

Tabelle 9.25 Daten für Beispiel 10+

<i>Prod.</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	4	0	0	0	0
2	4	0	0	0	0
3	8	0	0	0	0
4	16	0	0	0	0
5	0,8	0	0	0	0
6	0,8	0	0	0	0
7	0,24	0	0	0	0
8	3,4	0	0	0	0
9	3,4	0	0	0	0
10	4	0	0	0	0

Tabelle 9.26 Bedarfsdaten für Beispiel 10+

9.3 LEBENSLAUF

PERSÖNLICHE DATEN

Name:	Sonja Reitner
Geburtsdatum:	30.5.1977
Geburtsort:	Steyr
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Religionsbekenntnis:	römisch-katholisch
Familienstand:	in Lebensgemeinschaft, eine Tochter (Claudia, geb. 25.9.2005)
Vater:	Karl Reitner, geb. Blahowetz, Werkzeugmacher, geb. 31.3.1947
Mutter:	Anna Reitner, medizinisch-technische Fachkraft, geb. 24.6.1954
Geschwister:	Carina Reitner, geb. 20.6.1978
Wohnadresse:	Kegelprielstr. 16, 4400 Steyr

AUSBILDUNG UND BERUFLICHE TÄTIGKEITEN

1983 – 1987	Volksschule St. Anna in Steyr
1987 – 1995	Bundesrealgymnasium Steyr, Michaelerplatz
1995 – 2000	Studium Lehramt Mathematik / Physik an der Johannes Kepler Universität Linz (Tutorin für das physikalische Schulversuchspraktikum am Institut für Experimentalphysik)
2000 – 2001	Unterrichtspraktikum am BG/BRG Ramsauerstraße, Linz
2001 – 2003	AHS-Lehrerin am BG/BRG Ramsauerstraße, Linz
seit 2002	Lektorin an der FH Steyr für Wirtschaftsmathematik und Statistik
2003 – 2005	Forschungsassistentin an der FH Steyr im Projekt „Produktionssysteme“

PUBLIKATIONEN

- ALTHALER J., JODLBAUER H., REITNER S., Wirtschaftsmathematik - Fallstudie zur Beherrschung unternehmerischer Komplexität, Ennsthaler, Steyr, 2004.
- JODLBAUER H., PALMETSHOFER K., REITNER S., Einführung von flexiblen Losgrößen zur gleichzeitigen Reduktion von Rüst- und Lagerkosten, PPS Management, 4/2004.
- JODLBAUER H., PALMETSHOFER K., REITNER S., Implizite Determinierung von Plan-Belegungszeiten, Wirtschaftsinformatik, Heft 2, 2005.
- REITNER S., WEIDENHILLER A., Testing a New Approach for the Multi-Item Dynamic Scheduling Problem, Proceedings FH Science Day, Shaker, 2005.
- JODLBAUER H., REITNER S., WEIDENHILLER A., Reformulation and Solution Approaches for an Integrated Scheduling Model, Lecture Notes in Computer Science, Volume 3984/2006, Springer Berlin / Heidelberg.

9.4 EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche gekennzeichnet gemacht habe.