JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ
Netzwerk für Forschung, Lehre und Praxis

Navier-Stokes Gleichungen

Bakkalaureatsarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Science

in der Studienrichtung

Technische Mathematik

Angefertigt am *Institut für Numerische Mathematik*

Betreuung:

O. Univ. Prof. Dipl. Ing. Dr. Ulrich Langer

Eingereicht von:

Alexander Blumenschein

Linz, Jänner 2017

Zusammenfassung

Die Untersuchung von Fluiden ist ein höchst komplexes und theoretisch noch nicht vollständig geklärtes Forschungsgebiet (Millennium Problem). Die mathematische Beschreibung von Strömungen durch die Geschwindigkeit u, den Druck p und weitere relevante Größen ergibt ein System von partiellen Differentialgleichungen für diese Größen, das man als Navier-Stokes Gleichungen bezeichnet. Wie für viele physikalische Gleichungen, ist dieses System von Gleichungen abhängig von den besonderen Eigenschaften des betrachteten Fluids und ändert je nach Charakterisierung dieser Eigenschaften, wie zum Beispiel der Viskosität des Fluids, der Existenz von innerer Reibung und vieler anderer Faktoren seine Gestalt. Im Folgenden sollen sowohl die zugrundeliegenden Ansätze, die zu den einzelnen Teilen der Navier-Stokes Gleichungen gehören, als auch ihre Bedeutung für speziellere Fluide und wie sich deren Eigenschaften auf die einzelnen Gleichungen auswirken. Am Anfang wird ein wichtiges Hilfsmittel vorgestellt, das Fundamentallemma der Variationsrechnung, das in der Herleitung vieler physikalischer Beziehungen eine Rolle spielt. Anschließend soll der Leser einen Eindruck von zwei der gebräuchlichsten Anschauungen zur Beschreibung von Fluiden und deren Zusammenhängen erhalten, der Eulerschen und der Lagrange'schen Betrachtungsweise. Um die Navier-Stokes Gleichungen herzuleiten wird das Reynold'sche-Transporttheorem (RTT) vorgestellt und für den dreidimensionalen Fall bewiesen. Es werden die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichung mithilfe des RTT aus der Massenerhaltung und aus der Impulserhaltung hergeleitet. Anschließend werden verschiedene Klassen von Fluiden, ihre Besonderheiten und deren Einfluss auf die Navier-Stokes-Gleichungen vorgestellt.

Acknowledgments

Ich möchte mich im Rahmen dieser Arbeit zum einen bei meinem Betreuer, Herr Professor Langer dafür bedanken, dass er mich bei allen meinen Fragen nach bestem Wissen und Gewissen unterstützt hat, mit seiner Vorlesung und dem zugehörigen Proseminar den Grundstein gelegt und mir damit die Möglichkeit für diese Bachelor-Arbeit gegeben hat. Ebenso gilt mein Dank auch Peter Gengl, dem Leiter des Proseminars und meinen Kollegen, die mit mir das Proseminar und die Vorlesung besucht haben.

Alexander Blumenschein
Linz, Jänner 2016

Contents

Chapter 1

Einleitung

Der Schwerpunkt dierser Bakkalaureatsarbeit liegt auf der Herleitung und Diskussion der Navier-Stokes Gleichungen, die Aussagen zur Strömung von Fluiden liefern. Solche Strömungen spielen in der Industrie, im Bauwesen, den Lebenswissenschaften und in vielen anderen Bereichen eine entscheidende Rolle. So werden zum Beispiel mit den Navier-Stokes Gleichungen und entsprechenden weiteren Gleichungen, die die Wohl-Gestelltheit des entstehenden Problems ermöglichen, die Strömung der Luft um Auto-Karosserien und Flugzeuge, aber auch die Strömung von Wasser um Schiffe betrachtet. Ziel dabei soll sein, den Luftwiderstand bei Autos zu minimieren, also durch Optimierung der Karosserie ein möglichst Benzin-sparendes Strömungsprofil zu erzeugen. Die zusätzlich notwendigen Bedingungen, wie zum Beispiel, dass die Hülle des Flugzeugs den Belastungen des Flugs standhalten soll oder dass die Karosserie des Autos gewisse Belastunge während eines Unfalls nur in sehr eingeschränkter Weise an die Fahrerkabine weitergeben soll, können als gekoppelte Probleme mit den Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigt werden. Weitere wichtige Beispiele für Strömungsphänomene, die mit den Navier-Stokes Gleichungen modelliert und simuliert werden, sind Luft- bzw. Windströmungen um Wolkenkratzer und andere hohe Gebäude, Wasserströmungen zum Beispiel um Brückenpfeiler und Schiffe, aber auch in der Wettervorhersage, in Klimamodellen und den Lebenswissenschaften (z.B. Blutströmungen) werden sie benutzt.

In Kapitel 2 werden zunächst einige mathematische Grundlagen vorgestellt, die verwendet werden, um die Navier-Stokes herzuleiten. Die beiden Beschreibungsweisen von Strömungen, die Euler'sche und die Lagrange'sche Betrachtungsweise, stellen zwei verschiedene Möglichkeiten dar, Strömungen zu betrachten und zu beschreiben. Dabei wird typischerweise die Lagrange'sche Beschreibung für Festkörper und die Eulersche Beschreibung für Fluide verwendet. Das Fundamentallemma der Variationsrechnung und das Reynold'sche Transporttheorem werden verwendet, um aus der integralen Bilanzierungsform, die differentielle Form der Navier-Stokes Gleichungen abzuleiten.

In Kapitel 3 werden die Teilgleichungen, aus denen die Navier-Stokes Gleichungen bestehen, hergeleitet. Aus der Erhaltung der Masse leiten wir die Kontinuitätsgleichung ab. Aus der Impulserhaltung wird dann in einer sehr ähnlichen Art und Weise die Bewegungsgleichung abgeleitet. Die Bewegungsgleichung kann dabei in zwei

Formen vorliegen, in konvektiver oder in konservativer Form. Im Rahmen dieser Betrachtungen werden wir die sehr oft implizit verwendete Eigenschaft der Symmetrie des Spannungstensors zeigen. Da die beiden beschreibenden Gleichungen in den meisten Fällen unterbestimmt sein werden, ist es erforderlich zusätzliche Bedingungen vorzugeben. Eine solche Zusatzbedingung ist die Energiegleichung. Es folgen zwei bekannte Theoreme von Bernoulli und Lagrange.
In Kapitel 4 werden spzielle Fluide vorgestellt und ihr Einfluss auf die Navier-Stokes-Gleichungen näher erläutert. Dazu werden im ersten Abschnitt die rheologische Gleichungen von nicht-viskosen und von viskosen Fluiden betrachtet. Im Rahmen dieser Betrachtung werden wir auch die Beziehung zu der 'vereinfachten' Version der Navier-Stokes-Gleichungen, den sogenannten Euler-Gleichungen erläutern. Außerdem verweisen wir auf einige thermodynamische Beziehungen, die später verwendet werden, um ein geschlossenes System für die Navier-Stokes-Gleichungen aufzustellen.
Im zweiten Abschnitt von Kapitel 4 wird dann der Fall von barotropischen Strömungen betrachtet und der Spezialfall einer adiabatischen, barotropischen Strömung vorgestellt. Im Rahmen dieses Beispiels wird auf die spezielle Form, insbesondere des Drucks in Abhängigkeit der Dichte, etwas näher eingegangen.
Im dritten Abschnitt wird dann ein vollständiges, beschreibendes System für ein Fluid mit Wärmephänomenen vorgestellt.
Zum Abschluss von Kapitel 4 wird noch die dimensionslose Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen für inkompressible Newtonsche Fluide vorgestellt. Wie der Name vermuten lässt, ist ihr Zweck, die Navier-Stokes Gleichungen unabhängig der Einheiten der einzelnen Größen darzustellen, sondern als Beschreibung von Verhältnissen.
In Kapitel 5 werden mögliche Rand- und Anfangsbedingungen betrachtet. Wie für alle Differentialgleichungen, spielen diese Bedingungen auch für die Navier-Stokes Gleichungen eine entscheidende Rolle, um die Eindeutigkeit einer Lösung zu ermöglichen.
Zum Abschluss folgt in Kapitel 6 noch eine kurze Zusammenfassung und Rekapitulation des Inhalts.

Chapter 2

Mathematische Grundlagen

2.1 Das Fundamentallemma der Varationsrechnung

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung ist ein häufig verwendetes Hilfsmittel um aus Bilanzformulierungen Differentialgleichungen herzuleiten. Daher wird das Lemma hier kurz erwähnt und bewiesen vgl. [3].

2.1.1 Formulierung

Lemma 2.1. *Fundamentallemma der Variationsrechnung*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 3)$ ein Gebiet, also offen, nichtleer und zusammenhängend, $f \in C(\Omega)$, also aus der Menge der stetigen Funktionen auf Ω und es sei:

$$\int_G f(x)\ dx \ = 0\ ,$$

für alle Teilgebiete $G \subset \Omega$, die mindestens einen Lipschitz-stetigen Rand besitzen, dann gilt:

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega\ .$$

Proof. Der Beweis ist sehr kurz und beruht auf einem Widerspruchsbeweis. Unter unseren Voraussetzungen nehmen wir an, dass die Konklusion falsch wäre, das heißt

$$\exists \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) \neq 0$$

und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass der Fall $f(\bar{x}) > 0$ vorliegt. Nach Voraussetzung ist f stetig, also muss es eine Umgebung

$$U_r(\bar{x}) := \{y \in \mathbb{R}^d |\ \|\bar{x} - y\| \leq r\}$$

von $\bar{x}$ geben, sodass $f(x) > 0 \quad \forall x \in U_r(\bar{x})$, wobei $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^3$ ist.

Das heißt aber auch:

$$\int_{U_r} f(x)\, dx \;>\; 0$$

Da aber U_r einen Lipschitz-Rand besitzt, müsste nach Voraussetzungen gelten:

$$\int_{U_r} f(x)\, dx \;=\; 0 \;\lightning$$

$\square$

2.2 Beschreibung von Fluiden

Im Großen und Ganzen lässt sich die Beschreibung von Strömungen in einem Fluid auf zwei Arten durchführen vgl. [3]:

- die Lagrangsche Betrachtungsweise
- die Eulersche Betrachtungsweise

Die Anätze für die beiden Betrachtungsweisen unterscheiden sich grundlegend, aber es lässt sich zeigen, dass sich eine Beschreibung durch die andere ausdrücken lässt. Typischerweise wird die Lagrangsche Betrachtungsweise dabei für Festkörper und die Eulersche Betrachtungsweise für Fluide verwendet.

2.2.1 Lagrangsche Betrachtungsweise

Sei $(t_A, t_E) \subset (T_1, T_2) \subset \mathbb{R}$ die temporale Komponente unseres Rechengebiets, wobei (T_1, T_2) das Intervall beschreibt, in dem die Bewegung der Fluidpartikel beobachtet wird. Weiters soll $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$ jenes räumliche Gebiet bezeichnen, welches das Fluid zum Zeitpunkt $t \in [T_1, T_2]$ einnimmt.
Der Ausgangspunkt für die Lagrangsche Betrachtungsweise ist nun, einen beliebigen aber fest gewählten Referenzzeitpunkt t_0 ($z.B.\ t_0 \;=\; t_A \;=\; 0$) festzulegen und jedes Fluidpartikel durch die Ortskoordinate X zu identifizieren, die das Partikel zum Zeitpunkt t_0 in $\Omega(t_0)$ hat. Durch diesen Ansatz lässt sich nun die Strömung im Fluid durch eine Trajektorien - Funktion ϕ beschrieben. Dabei gilt:

$$\hat{x} = \phi(X, t) \tag{2.1}$$

beschreibt die Ortskoordinate jenes Partikels zum Zeitpunkt t, das zum Zeitpunkt t_0 dei Ortskoordinate X hatte. Daraus folgt sofort:

$$X = \phi(X, t_0) \tag{2.2}$$

Diese Beschreibung mittels ϕ ist natürlich nur sinnvoll für $X \in \Omega(t_0)$ und für $t > t_0$. Da nun ϕ die Bewegung der einzelnen Fluidpartikel beschreibt, lassen sich daraus sehr leicht die entsprechnenden Formen für Geschwindigkeit und Beschleunigung aus den Ableitungen der Trajektorien-Funktion ableiten.

$$\underline{\textit{Geschwindigkeit}} : \hat{v}(X,t) = \partial_t \phi(X,t) \tag{2.3}$$

$$\underline{\textit{Beschleunigung}} : \hat{a}(X,t) = \partial_t^2 \phi(X,t), \tag{2.4}$$

wobei $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$ die partielle Ableitung nach der Zeit ist.

2.2.2 Eulersche Betrachrungsweise

Die Bezeichnungen für das temporale und die entsprechenden räumlichen Gebiete seien wie bei der Lagrangschen Betrachtungsweise.
Im Gegensatz zur Lagrangschen Betrachtungsweise, ist der Anatz für die Eulersche dadurch gegeben, das Geschwindigkeitsfeld des Fluidpartikels $v(x,t)$, das sich zum Zeitpunkt $t \in (T_1, T_2)$ am Punkt $x \in \Omega(t)$ befindet, zu betrachten.

2.2.3 Zusammenhang zwischen den beiden Betrachtungsweisen

Es muss gelten:

$$v(x,t) = \hat{v}(X,t) = \partial_t \phi(X,t), \; \textit{wobei } x = \hat{x} = \phi(X,t).$$

Analog lässt sich auch eine Beziehung für die Beschleunigung a aufstellen:

$$\begin{aligned} a(x,t) = \hat{a}(X,t) = \partial_t^2 \phi(X,t) &= \partial_t v(\phi(X,t),t) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{dv}{dx_i}(x,t)\partial_t \phi_i(X,t) + \partial_t(x,t) \\ &= \partial_t v(x,t) + v(x,t) \cdot \nabla_x v(x,t) =: \frac{d}{dt} v(x,t). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen

$$v \cdot \nabla = v \cdot grad = \sum_{i=1}^{d} v_i \partial_{x_i} \tag{2.5}$$

die konvektive Ableitung und

$$\frac{d}{dt} = D_t := \partial_t + v \cdot \nabla \tag{2.6}$$

die materielle Ableitung.

Um nun aus dem in der Eulerschen Betrachtungsweise gegebenen Geschwindigkeitsfeld $v(x,t)$ die Trajektorien-Funktion ϕ zu erhalten, muss eine Anfangswertaufgabe gelöst werden:
Gesucht: $\phi(X,t) \in C^1(\Omega(t_0) \times (t_A, t_E))$, sodass

$$\frac{d\phi}{dt} = v(\phi, t) \quad \forall t \in (t_A, t_E) \tag{2.7}$$

$$\phi(X, t_0) = X \tag{2.8}$$

für ein gegebenes Geschwindigkeitsfeld v und Anfangswert X. Dabei ist C^1 die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen. Es sei bemerkt, dass wir in $\phi \in C^1$ bzw. $\phi(.,.) \in C^1$ die Argumente X und t der besseren Lesbarkeit wegen angegeben sind.

2.3 Reynolds Transport-Theorem

Dieses Theorem wird eine wichtige Rolle bei der Herleitung der Navier-Stokes Gleichungen spielen und wird daher genauer betrachtet und auch für den Fall $d = 3$ bewiesen vgl. [3].

2.3.1 Vorbereitendes Lemma 1

Um die Beweisskizze für das Transport-Theorem abzukürzen führen wir ein Lemma ein, das manche Schritte des Beweises vorwegnimmt.

Lemma 2.2. *Sei $t_0 \in (T_1, T_2)$, $\omega(t_0)$ ein beschränktes Gebiet und sei $\overline{\omega(t_0)} \subset \Omega_{t_0}$. Dann existiert ein Intervall (t_1, t_2), mit $t_0 \in (t_1, t_2)$, sodass die folgenden Aussagen gelten:*

a) Die Abbildung $t \in (t_1, t_2)$, $X \in \omega(t_0) \to x = \phi(X, t_0; t) \in \omega(t)$ hat stetige Ableitungen erster Ordnung bezüglich t, X_1, X_2, X_3 und stetige Ableitungen zweiter Ordnung $\dfrac{\partial^2}{\partial t \partial X_i}$ für i = 1,2,3.

b) Die Abbildung $X \in \omega(t_0) \to x = \phi(X, t_0; t) \in \omega(t)$ ist eine stetig differenzierbare Bijektion von $\omega(t_0)$ auf $\omega(t)$ mit der Jacobi-Determinante:

$$D(X,t) = det(\frac{D\phi(X, t_0; t)}{DX}) = det(\frac{\partial \phi_i}{\partial X_j})(X, t_0; t) \text{ für i,j = 1,2,3.}$$

Diese Determinante ist stetig und positiv $\forall X \in \omega(t_0), \forall t \in (t_1, t_2)$.

c) Es gilt:

$$\{(x,t) \mid t \in [t_1, t_2],\ x \in \overline{\omega(t)}\} \subset \mathcal{M} = \{(x,t) \mid x \in \Omega_t,\ t \in (T_1, T_2)\}.$$

Daher ist die Geschwindigkeit v(x,t) eine stetige Abbildung mit beschränkten Ableitungen erster Ordnung auf $\{(x,t) \mid t \in (t_1, t_2),\ x \in \omega(t)\}$

d) Es gilt:

$$v(\phi(X,t_0;t),t) \;=\; \frac{\partial\phi}{\partial t}(X,t_0;t) \quad \forall\; X \in \omega(t_0),\; \forall t \in (t_1,t_2).$$

Proof. vgl. [3] Lemma 1.4.5.
Da nach Voraussetzung $\overline{\omega(t_0)} \times t_0$ eine kompakte Teilmenge der offenen Menge M ist, gibt es eine offene, beschränkte Teilmenge M, sodass $\overline{\omega(t_0)} \times \{t_0\} \subset M \subset \overline{M} \subset \mathcal{M}$. Da wir angenommen haben, dass das Geschwindigkeitsfeld stetig differenzierbar auf M ist, ist es beschränkt und Lipschitz-stetig bezüglich x auf M. Aus der lokalen Lösbarkeit von $\frac{dx}{dv} \;=\; v(x,t)$ mit $x(t_0) \;=\; X$ folgt die Existenz eines $\epsilon > 0$, sodass für alle $X \in \overline{\omega(t_0)}$ die Lösung $\phi(X,t_0;t)$ für alle $t \in I \;=\; [t_0-\epsilon,\; t_0+\epsilon]$ definiert ist. Diese Abbildung hat stetige und beschränkte Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial X_i}$ und $\frac{\partial^2}{\partial t\partial X_i}$ für i = 1,2,3 auf $\overline{\omega(t_0)} \times I$, woraus a) folgt.
Die Eindeutigkeit der Lösung impliziert, dass die Abbildung in b) bijektiv ist und weiters lässt sich daraus schließen, dass sie stetig differenzierbar ist.
Da $\phi(X,t_0;t_0) \;=\; X$, gilt, dass $D(X,t_0) \;=\; 1$, da die Abbildung dann die Identität ist. Wegen der Stetigkeit von D gibt es ein Intervall $(t_1,t_2) \subset I$, sodass D auf $\omega(t_0) \times (t_1,t_2)$ positiv und beschränkt ist. c) ist eine Konsequenz daraus, dass $v \in [C^1(\mathcal{M})]^3$ und dass $(\phi(X,t_0;t),t) \in \mathcal{M}$ für $X \in \overline{\omega(t_0)}$ und $t \in [t_1,t_2]$.
Die Folgerung d) bedeutet, dass $\phi(X,t_0;.)$ eine Lösung für $\frac{dx}{dv} \;=\; v(x,t)$ mit $x(t_0) \;=\; X$ ist und auf dem Intervall (t_1,t_2) definiert ist, sofern $X \in \omega(t_0)$. □

Eine alternative, aber mehr heuristische physikalische Begründung wäre, das aufgrund der Stetigkeit, falls die Determinante zu einem Zeitpunkt $\hat{t}$ kleiner als 0 werden sollte, sie aber für t_0 gleich 1 und damit größer als 0 ist, auch in einem Punkt $\tilde{t}$ zwischen t_0 *und* $\hat{t}$ gleich 0 werden müsste. Eine Determinante gleich 0 würde für eine Deformation aber bedeuten, dass sich Partikel durchdringen könnten, also mehr als ein Partikel am gleichen Ort wäre, was natürlich unmöglich ist.

2.3.2 Vorbereitendes Lemma 2

Lemma 2.3. *Es gelten die gleichen Bedingungen wie im Lemma aus Abschnitt 2.3.1. Dann hat die Funktion* $D \;=\; D(X,t)$ *eine stetige und beschränkte Ableitung nach der Zeit* $\frac{\partial D}{\partial t}$ *für* $X \in \omega(t_0),\; t \in (t_1,t_2)$. *Diese Ableitung hat die Gestalt:*

$$\frac{\partial D}{\partial t}(X,t) \;=\; D(X,t) \cdot div(v(x,t))$$

mit $x \;=\; \phi(X,t)$.

Proof. vgl. [3] Theorem 1.4.6.
Die Determinante D lässt sich nach ihrer i-ten Spalte Laplace-entwickeln. Für eine beliebige $n \times n$ Matrix A hat eine Laplace-Entwicklung nach der k-ten Spalte die Form:

$$det(A) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}(-1)^{j+k}|S_{j,k}|.$$

Dabei bezeichnen die $S_{j,k}$ jene $(n-1)\times(n-1)$ Matrix, die man erhält, wenn man in A die j-te Zeile und die k-te Spalte streicht. In unserem Fall ist $n \;=\; 3$ und die Matrix A ist die Jacobi-Matrix von ϕ, also $\frac{D\phi(X,t_0;t)}{DX}$. Wir betrachten also D und erhalten mit der Laplace-Entwicklung:

$$D(X,t) \;=\; \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha}(X,t)\cdot D_{i,\alpha}(X,t), \tag{2.9}$$

wobei $D_{i,\alpha} \;=\; \hat{d}_{j,i}(-1)^{i+j}$ die zu $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha}$ gehörenden Kofaktoren bezeichnen. Für $\alpha,\beta \;=\; 1,2,3$ hängen die Kofaktoren $D_{i,\beta}$ nicht von $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha}$ ab, also gilt:

$$\frac{\partial D}{\partial \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha}}(X,t) = D_{i,\alpha}(X,t)$$

Wir betrachten $D(X,t)$ nun als eine Funktion, die von $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha}$ abhängt. Diese Funktionen hängen widerum von t ab. Also:

$$\frac{\partial D}{\partial t} \;=\; \sum_{i,\alpha=1}^{3} \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha}} \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha})(X,t) = \sum_{i,\alpha}^{3} D_{i,\alpha}\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t \partial X_\alpha}(X,t) \tag{2.10}$$

Unter den Voraussetzungen des vorbereitenden Lemmas 1 folgt nun:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t \partial X_\alpha}(X,t) = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} v_i(\phi(X,t),t) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x,t).\frac{\partial \phi_j}{\partial X_\alpha}(X,t)$$

Mittels Einsetzen ergibt sich nun für die Ableitung der Determinante:

$$\frac{\partial D}{\partial t}(X,t) \;=\; \sum_{i,\alpha=1}^{3} D_{i,\alpha} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \phi_j}{\partial X_\alpha}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \;=\; \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{(\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \phi_j}{\partial X_\alpha} D_{i,\alpha})}_{D.\delta_{ij}} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x,t)$$

Dieser Ausdruck lässt sich wiederum umschreiben in:

$$\frac{\partial D}{\partial t}(X,t) \;=\; D\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \;=\; D\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \;=\; D(X,t)\cdot div_x(v(x,t))$$

□

2.3.3 Formulierung

Theorem 2.4. *Reynolds Transport-Theorem, RTT (vgl. [1] Theorem 1.4.7)*
Sei $\omega(t) \subset \Omega(t)$ ein hinreichend glattes (zumindest Lipschitz-stetiges), beschränktes und einfach zusammenhängendes Kontrollgebiet, das zu jedem Zeitpunkt $t \in (T_1, T_2)$ eine fixierte Menge Fluidpartikel einnimmt:

$$\omega(t) = \{\phi(X,t) | X \in \omega(t_0)\}.$$

Weiters sei F: $Q \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funtion in x, eine sogenannte Eigenschaftsdichte für die Eigenschaft $\mathcal{F}$, also

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\omega(t)} F(x,t)dx, \tag{2.11}$$

wobei $Q = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} | x \in \Omega(t), t \in (T_1, T_2)\}$
Außerdem seien sowohl F, als auch v: $Q \to \mathbb{R}^d$ stetig diffenrenzierbar und $\overline{\omega(t_0)} \subset \Omega(t)$. Dann existiert ein Intervall $(t_1, t_2) \subset (T_1, T_2)$ mit $t_0 \in (t_1, t_2)$, sodass $\mathcal{F}$ in diesem Intervall wohldefiniert und stetig differenzierbar ist.
Außerdem gilt für die Ableitung von F die Beziehung

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + div_x(F \cdot v)(x,t) \right] dx, \tag{2.12}$$

wobei

$$\begin{aligned} div_x(F \cdot v) &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(F \cdot v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot v_i + F \cdot div_x v \\ &= (\nabla_x F) \cdot v + F \cdot div_x v. \end{aligned}$$

2.3.4 Beweisskizze für den Fall d = 3

Proof. Um dieses Theorem zu beweisen wenden wir auf die Ableitung von $\mathcal{F}$ eine Koordinatentransformation von den Euler'schen Koordinaten (x,t) auf die Lagrang'schen Koordinaten (X,t), das heißt

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} F(x,t)\ dx = \frac{d}{dt} \int_{\omega(t_0)} [F(\phi(X,t),t) \cdot |D(X,t)|] dX,$$

wobei $D(X,t)$ die Determinante der Jacobi-Matrix der Transformation von $\omega(t)$ auf $\omega(t_0)$ ist.

Da die Voraussetzungen dafür erfüllt sind, wissen wir aus dem Lemma in Abschnitt 2.3.1, dass $D(X,t) > 0$. Daher gilt weiters:

$$\int_{\omega(t_0)} [F(\phi(X,t),t) \cdot |D(X,t)|] dX = \int_{\omega(t_0)} [F(\phi(X,t),t) \cdot D(X,t)] dX$$

Weil $\omega(t_0)$ fixiert ist und nicht von t abhängt, gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) &= \int_{\omega(t_0)} \frac{\partial}{\partial t} \left[F(\phi(X,t),t) \cdot D(X,t)\right] dX \\
&= \int_{\omega(t_0)} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t}(\phi(X,t),t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\phi(X,t),t) \underbrace{\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(X,t)}_{v_i(x,t)} \right] \cdot D(X,t) \\
&\quad + F(\phi(X,t),t) \cdot \frac{\partial D}{\partial t}(X,t) \; dX
\end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Erkenntnisse aus 2.3.1 und 2.3.2, ergibt sich damit die Form:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(t) &= \int_{\omega(t_0)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(\phi(X,t),t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\phi(X,t),t) v_i(x,t) \right] \cdot D(X,t) \\
&\quad + F(\phi(X,t),t) \cdot div(v(x,t)) \cdot D(X,t) dX
\end{aligned}$$

mit $x = \phi(X,t)$. Um nun zum gewünschten Erebnis zu gelangen, führen wir die Rücksubstitution von $\omega(t_0)$ auf $\omega(t)$ durch. Wir erhalten folglich

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) &= \int_{\omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t) v_i(x,t) + F(x,t) \cdot div_x(v(x,t)) dx \\
&= \int_{\omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + div_x(F.v)(x,t) dx
\end{aligned}$$

womit die Beziehung (2.12) bewiesen ist. □

Chapter 3

Herleitung der Navier-Stokes Gleichungen

Die Beschreibung der Strömung eines Fluids führt auf ein Anfangs-Randwert-Problem (ARWP) für die Navier-Stokes-Gleichungen, bestehend zunächst aus der Kontinuitätsgleichung, der Bewegungsgleichung, entsprechenden Rand- und Anfangswerten und eventuell aus zusätzlichen Gleichungen. Das Ziel ist es nun die erwähnten Gleichungen herzuleiten. Hierzu wird das gerade eben bewiesene Transport-Theorem benötigt, siehe auch [3].

3.1 Kontinuitätsgleichung

Diese Gleichung gibt Auskunft über einen Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung der Dichte in einem Fluid und des Geschwindigkeitsfelds innerhalb des Fluids. Um diese Gleichung herzuleiten werden das Prinzip der Massenerhaltung und das Transport-Theorem benutzt. Sie hat die allgemeine Gestalt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) \ + \ div_x(\rho \ v)(x,t) = 0 \tag{3.1}$$

3.1.1 Ansatz

Bezeichne $\omega(t) = \{x = \phi(X,t) | X \in \omega(t_0)\}$ ein Kontrollgebiet, das eine fixierte Menge Fluidpartikel zu jedem Zeipunkt $t \in (T_1, T_2)$ enthält, genauer gesagt jene Menge, die zum Startzeitpunkt t_0 im Gebiet $\omega(t_0)$ enthalten ist.

Unter Voraussetzung von Quellenfreiheit und nach dem Prinzip der Massenerhaltung, wird die Masse dieses Gebiets sich im Laufe der Zeit nicht ändern oder anders ausgedrückt:

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

3.1.2 Herleitung

Die Masse eines Gebiets lässt sich durch das Integral

$$M(t) = \int_{\omega(t)} \rho(x,t)dx$$

ausdrücken, wobei $\rho(x,t)$ die Massendichte des Fluids an einem Ort x zu einem Zeitpunkt t bezeichnet und die Maßeinheit $[kg/m^3]$ besitzt.

Wird nun das Transport-Theorem aus Abschnitt 2.3.3 auf die Masse angewandt ergibt sich:

$$0 = \frac{dM}{dt}(t) = \int_{(t)} [\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + div_x(\rho.v)(x,t)]dx.$$

Da diese Identität nun $\forall t \in (T_1, T_2)$ und $\forall \overline{\omega(t)} \subset \Omega(t)$ gilt, erhält man mittels Fundamentallemma 2.1 der Variationsrechnung aus Abschnitt 2.1.1 die Kontinuitätsgleichung (3.1).

3.1.3 Spezialfall: Inkompressible Fluide

In diesem Fall gilt, dass ρ zeitlich gesehen eine Konstante ist ($\rho = \text{const.} > 0$), also:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad div_x(\rho v) = \rho \; div_x(v).$$

Damit ergibt sich aus der Massenerhaltungsgleichung (3.1) sofort die Kontinuitätsgleichung

$$div_x(v(x,t)) = 0 \quad \forall \; (x,t) \in Q. \tag{3.2}$$

für kompressible Fluide

3.2 Bewegungsgleichung

Auch die Bewegungsgleichung liefert einen Zusammenhang zwischen dem Dichte-Feld in einem Fluid und dem Geschwindigkeitsfeld in seinem Inneren unter der Wirkung von Volumenkräften und Oberflächenkräften (Spannungen). Die Bewegungsgleichung wird in zwei verschiedenen Formen verwendet:
konservative Form:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}(x,t) \; + \; div_x(\rho v_i \cdot v)(x,t) \; = \; \rho(x,t) f_i(x,t) \; + \; \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}(x,t)$$

$$\forall \; i = 1, 2, \ldots, d, \quad \forall \; (x,t) \in Q.$$

bzw.

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} \ + \ div(\rho v \otimes v) \ = \ \rho f \ + \ div(T) \quad \text{in } Q, \tag{3.3}$$

wobei $\otimes$ das Tensorprodukt bezeichnet, d.h. $\rho v \otimes v \ := \ [\rho v_i \cdot v]_{i=1,2,\ldots,d}$.
konvektive Form:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t}(x,t) \ + \ \rho v \cdot \nabla v_i(x,t) \ = \ \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}(x,t) \ + \ \rho f_i(x,t)$$

$$\forall \ i = 1, 2, \ldots, d, \ \ \forall \ (x,t) \in Q,$$

bzw.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \cdot \nabla v = div(T) + \rho f \quad \text{in } Q. \tag{3.4}$$

3.2.1 Ansatz

Analog zum Ansatz für die Kontinuitätsgleichung in Abschnitt 3.1.1 ist die Vorgangsweise für die Herleitung der Bewegungsgleichung. Es bezeichne

$$\omega(t) = \{x = \phi(X,t) | X \in \omega(t_0)\}$$

wieder ein beliebiges Kontrollgebiet.

Im Gegensatz zur Kontinuitätsgleichung verwendet man zur Herleitung der Bewegungsgleichung allerdings den Impulserhaltungssatz, statt der Massenerhaltung. Für diesen Impuls I mit Maßeinheit $[kg \cdot m/s]$, beziehungsweise seine temporale Ableitung lassen sich folgnde Formeln aufstellen:

$$\frac{dI}{dt}(t) = F(\omega(t)) \quad \forall t \in (T_1, T_2) \tag{3.5}$$

mit

$$I(t) = \int_{\omega(t)} v(x,t)\rho(x,t) \ dx, \tag{3.6}$$

d.h., die zeitliche Änderung des Impulses eines abgeschlossenen Massensystems ist gleich der auf das System wirkenden Kräfte. Wieder bezeichnet ρ die Massendichte, v das Geschwindigkeitsfeld und F die Kräfte, die in und auf $\omega(t)$ wirken. Diese Kräfte lassen sich in Volumen- und Oberflächenkräfte aufteilen:

$$. \ F(\omega(t)) = \underbrace{F_V(\omega(t))}_{Volumnenkr\ddot{a}fte} \ + \ \underbrace{F_S(\omega(t))}_{Oberfl\ddot{a}chenkr\ddot{a}fte} \tag{3.7}$$

3.2.2 Herleitung der konservativen Form

Auch hier werden wir wieder das Transport-Theorems 2.3.3 auf den Impuls I anwenden. Dazu ist es notwendig, F_V und F_S in Integral-Ausdrücke umzuwandeln.

Für die Volumenkräfte ergibt sich:

$$F_V(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(x,t) f(x,t)\ dx \tag{3.8}$$

und für die Oberflächenkräfte ergibt sich:

$$F_S(\omega(t)) = \int_{\partial\omega(t)} T(x,t;n(x,t))\ ds_x \tag{3.9}$$

$\rho(x,t)f(x,t)$ bezeichnet dabei die spezifische Volumenkraftdichte,

$$T(x,t;n(x,t)) \ = \ t^n(x,t) \ = \ \left[\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ji}(x,t) n_j(x,t)\right]_{i=1}^{d} \tag{3.10}$$

die Oberflächenspannungen und σ den symmetrischen Spannungstensor.
Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes, des Transport-Theorems aus Abschnitt 2.3.3 auf (3.5)-(3.6), Einsetzen von (3.8) - (3.10) in (3.7) und Gleichsetzen der Ergebnisse führt auf die Identität:

$$\left[\int_{\omega(t)} [\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}(x,t) + div_x(\rho v_i \cdot v)(x,t)]\ dx\right]_{i=1}^{d} \tag{3.11}$$

$$= \left[\int_{\omega(t)} \rho(x,t) f_i(x,t)\ dx + \int_{\omega(t)} \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{ji}}{x_j}(x,t)}_{[div\sigma]_i}\ dx\right]_{i=1}^{d}$$

$$= \int_{\omega(t)} \rho(x,t) f(x,t)\ dx + \int_{\omega(t)} div(\sigma(x,t))\ dx$$

$\forall\ t \in (T_1, T_2), \quad \forall\ \omega(t) \subset \Omega(t)$. Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung in Abschnitt 2.1.1 auf (3.11) führt nun auf die konservative Form der Bewegungsgleichung (3.3).

3.2.3 Herleitung der konvektiven Form

Ausgangslage für die Herleitung der konvektiven Form der Bewegungsgleichung (3.4) ist die konservative Form (3.3). Anwendung der Produktregel auf die Ausdrücke auf der linken Seite von (3.3) ergibt:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}(x,t) \ + \ div_x(\rho v_i \cdot v)(x,t) = \tag{3.12}$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i \ + \ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} \underbrace{\left[\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_j} v_j \ + \ \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right]}_{(*)}$$

Der Ausdruck $(*)$ lässt sich unter abermaliger Anwendung der Produktregel um schreiben in:

$$(*) \ = \ \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_i v_j \ + \ \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \ + \ \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \tag{3.13}$$

Einsetzen von (3.13) in (3.12) ergibt:

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t}(x,t) \ + \ div_x(\rho v_i . v)(x,t) = \tag{3.14}$$

$$= v_i \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j \ + \ \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right)}_{(**)} \ + \ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \ + \ \sum_{j=1}^{d} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Fasst man den Ausdruck $(**)$ zusammen, ergibt sich:

$$(**) \ = \ v_i \quad \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ div_x(\rho v) \right)}_{= \ 0 \ nach \ der \ Kontinuit\ddot{a}tsgleichung} \tag{3.15}$$

Einsetzen von (3.15) in (3.14) ergibt nun die komponentenweise Bewegungsgleichung in konvektiver Form (3.4):

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \ + \ \rho v \cdot \nabla v_i \ = \ \rho f_i \ + \ \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad \forall \ (x,t) \in Q \ \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, d. \tag{3.16}$$

3.3 Symmetrie des Spannungstensors

In diesem Abschnitt wollen wir uns kurz mit der Symmetrie des Spannungstensors auseinandersetzen. Es lässt sich zeigen, dass unter der Annahme, dass die Impulserhaltung gilt, automatisch folgt, dass der Spannungstensor symmetrisch sein muss. Wir nehmen dazu an, dass $\rho, \ v_i \ und \ \sigma_{i,j} \in C^1(\mathcal{M})$ und $f_i \in C(\mathcal{M})$ liegen, wobei $\mathcal{M}$ definiert ist, wie in Abschnitt 2.3.1. Analog zu den vorherigen Betrachtungen (wie z.B. bei der Massenerhaltung), sei $\omega(t)$ ein Referenzgebiet für $t \in (t_1, t_2)$.

Theorem 3.1. *Das Gesetz der Momentenerhaltung des Impulses ist gültig genau dann, wenn der Spannungstensor T symmetrisch ist, also gilt $\sigma_{i,j} \ = \ \sigma_{j,i}$.*

Proof. vgl. [3] Theorem 1.7.32.
Für den Beweis betrachten wir die Momentenerhaltung des Impulses:

$$\int_{\omega(t)} x \times \rho f(x,t)dx \ + \ \int_{\partial\omega(t)} x \times T(x,t,n)ds_x \ = \ \frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} x \times \rho v(x,t)dx$$

Verwenden wir das Transporttheorem 2.3.3 können wir die Form

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} x \times \rho v \ dx \ = \ \int_{\omega(t)} x \times g \ dx$$

ableiten, wobei $g \ = \ (g_1, g_2, g_3)^T$ durch

$$g_i \ = \ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \ + \ div(\rho v_i v)$$

gegeben ist. Indem wir diese Form in die Momentenerhaltung des Impulses substituieren, die Darstellung für den Spannungstensor

$$T_i(x,t,n) \ = \ \sum_{j=1}^{3} n_j \sigma_{j,i}(x,t)$$

verwenden und auf das Oberflächenintegral den Gauß'schen Satz anwenden, kommen wir zu folgendem komponentenweisen Ergebnis:

$$\begin{aligned}
0 \ &= \ \int_{\omega(t)} [x_i(g_j - \rho f_j) - x_j(g_i - \rho f_i)]\,dx \ - \ \int_{\partial\omega(t)} \left[x_i \sum_{k=1}^{d} \sigma_{kj} n_k - x_j \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ki} n_k \right] ds_x \\
&= \ \int_{\omega(t)} [x_i(g_j - \rho f_j) - x_j(g_i - \rho f_i)]\,dx \ - \ \sum_{k=1}^{d} \int_{\omega(t)} \frac{\partial}{\partial x_k} [x_i \sigma_{kj} - x_j \sigma_{ki}]\,dx \\
&= \int_{\omega(t)} x_i \left(\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial t} + div(\rho v_j \cdot v) - \rho f_j - \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} \right) \\
&\quad - x_j \left(\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + div(\rho v_i \cdot v) - \rho f_i - \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} \right) dx - \int_{\omega(t)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ji})dx
\end{aligned}$$

Aus der Bewegungsgleichung in konservativer Form sehen wir sofort, dass der Integrand des ersten Integrals verschwindet und somit folgt:

$$\int_{\omega(t)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ji})dx \ = \ 0$$

Weil $\omega(t)$ wie immer beliebig war können wir das Fundamentallemma der Variationsrechnung 2.1.1 anwenden und erhalten somit die gewünschte Aussage.
Für die Äquvalenz der Aussagen muss noch die Gegenrichtung bewiesen werden, die völlig analog, aber in umgekehrter Richtung verläuft. □

3.4 Energiegleichung

Wir wollen nun eine weitere Gleichung einführen, die sogenannte Energiegleichung. Sie stellt analog zur Massenerhaltung und zur Impulserhaltung, die durch die Bewegungs- und die Koninuitätsgleichung ausgedrückt werden, die Energieerhaltung dar. Wir bezeichnen mit $\omega(t)$ wieder ein Kontrollvolumen, dass denselben Anspr$\check{c}$hen wie für die Kontinuitätsgleichung gerecht wird. Die Energieerhaltung lässt sich dann folgendermaßen beschreiben vgl. [1] S.26:
Die Änderungsrate der gesamten Energie der Fluidpartikel, die das Gebiet $\omega(t)$ zur Zeit t einnehmen, ist gleich der Summe der Volumenskräfte, die auf $\omega(t)$ und der Oberflächenkräfte, die auf den Rand $\partial\omega(t)$ einwirken und der Menge der an $\omega(t)$ abgegebenen Wärme.
Wenn wir nun mit $Q(\omega(t))$ die an $\omega(t)$ abgegebene Wärme und mit $\epsilon(\omega(t))$ die gesamte Energie der Fluidpartikel in $\omega(t)$ bezeichnen lässt sich diese Aussage auf folgende mathematische Formel bringen:

$$\frac{d\epsilon(\omega(t))}{dt} = \int_{\omega(t)} \rho(x,t)f(x,t)\cdot v(x,t)dx + \int_{\partial\omega(t)} T(x,t,n(x))\cdot v(x,t)ds_x + Q(\omega(t))$$

Weiters werden wir folgende Beziehungen beziehungsweise Darstellungen benutzen:

$$\begin{aligned}
\epsilon(\omega(t)) &= \int_{\omega(t)} \rho(x,t)E(x,t)dx \\
E &= e + \frac{|v|^2}{2} \\
Q(\omega(t)) &= \int_{\omega(t)} \rho(x,t)q(x,t)dx - \int_{\partial\omega(t)} q(x,t)\cdot n(x)ds_x
\end{aligned}$$

E heißt die totale Energie und e bezeichnet man als spezifische innere Energie die vom atomaren und molekularen Verhalten abhängt.
Mit dem Fourierschen Gesetz $q = -k\nabla\Theta$ lässt sich das zweite Integral für den Wärmeterm schreiben als:

$$\int_{\partial\omega(t)} q(x,t)\cdot n(x)ds_x = -\int_{\partial\omega(t)} k(x,t)\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial n}ds_x,$$

wobei $k \geq 0$ der Wärmeleitkoeffizient und Θ die absolute Temperatur ist. Aus dem zweiten Gesetz der Thermodynamik und aus Versuchen lässt sich zeigen, dass $k \geq 0$ eine Funktion der absoluten Temperatur ist $k = k(\Theta)$. Oft wird die Annahme verwendet, dass k eine Konstante ist. Verwenden wir nun die komponentenweise Darstellung von T, sowie die drei Beziehungen von oben, ergibt sich folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} \rho(x,t)E(x,t)dx &= \int_{\omega(t)} \rho(x,t)f(x,t)\cdot v(x,t)dx + \int_{\partial\omega(t)} \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{j,i}(x,t)n_j(x)v_i(x,t)ds_x \\
&+ \int_{\omega(t)} \rho(x,t)\hat{q}(x,t)dx - \int_{\partial\omega(t)} q(x,t)\cdot n(x)ds_x,
\end{aligned}$$

$\hat{q}$ bezeichnet dabei die Wärmequellendichte. Unter hinreichenden Glattheitsvoraussetzungen, z.B. $\rho, u, v_i, \sigma_{i,j}, q_i \in C^1(\mathcal{M})$ und $f_i, \hat{q} \in C(\mathcal{M})$, wobei $\mathcal{M}$ wie im vorbereitenden Lemma 1 aus Abschnitt 2.3.1 definiert ist. Verwenden wir nun das RTT 2.3.3, das Greensche Theorem und das Fundamentallemma der Variationsrechnung 2.1.1 erhalten wir daraus die Energiegleichung in differentieller Form:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + div(Ev) = \rho f \cdot v + div(Tv) + \rho\hat{q} - div(q).$$

3.5 Theoreme von Bernoulli und Lagrange

Es wird die Annahme getroffen, dass die Massendichte von Kräften von einem Potential abgeleitet ist, also dass gilt:

$$-\nabla V = \rho^{-1} f$$

Daher folgt für die Beschleunigung $\gamma = -\nabla(\frac{p}{\rho} + V)$. Definiert man nun H als

$$H := \frac{p}{\rho} + V + \frac{1}{2}|u|^2 \tag{3.17}$$

lässt sich damit die folgende Gleichung herleiten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + curlu \times u + \nabla H = 0$$

Für weitere Einzelheiten sei hier auf [2] verwiesen.

Stationäre Strömung

In diesem Fall sind die bestimmenden Größen der Strömung unabhängig von der Zeit und damit alle Zeitableitungen dieser Größen gleich 0.
Dadurch lässt sich folgende Aussage treffen:

Theorem 3.2. *Für ein inkompressibles, nicht-viskoses Fluid, dessen Massendichte der Kräfte von einem Potential abgeleitet sind und dessen Strömung stationär ist, dann ist das im Abschnitt Theoreme von Bernoulli und Laplace definierte H entlang aller Strömungslinien konstant.*

Diese Theorem wurde aus [2], S.117, Theorem 8.1 entnommen, wo man auch den Beweis dazu findet.

Rotationsfreie Strömung

Man nennt eine Strömung *rotationsfrei*, falls überall im Fluid gilt:

$$curl(v) = 0.$$

Für eine rotationsfreie Strömung lässt sich folgende Aussage zeigen (vgl. [2], S.117, Theorem 8.2)

Theorem 3.3. *Für ein inkompressibles, nicht viskoses Fluid, dass zu einem Zeitpunkt t ein Gebiet Ω_t aussfüllt, gilt, falls die Strömung zusätzlich noch rotationsfrei ist zum Zeitpunkt t, dann existiert ein Geschwindigkeitspotential $\phi(x,t)$, sodass auf jedem einfach-zusammenhängenden Teil von Ω_t, die Gleichung: $\frac{\partial \phi}{\partial t} + H = C(t)$ erfüllt ist, wobei C eine Konstante ist, die nur von der Zeit abhängt.*

Diese Theorem wurde aus [2], S.117, Theorem 8.2 entnommen, wo man auch den Beweis dazu findet.
Diese Aussage bedeutet, dass falls die Aussagen des obigen Theorems über rotationsfreie Flüsse erfüllt sind, und die Strömung obendrein noch stationär ist, dann ist H auf jedem einfach-zusammenhängenden Teil von Ω_t konstant.

Theorem von Bernoulli

Theorem 3.4. *Für die rotationsfreie Strömung eines nicht-viskosen, inkompressiblen Fluids gilt, dass das Geschwindigkeitspotential ϕ eine harmonische Funktion ist, also*

$$\Delta\phi = 0.$$

Das Theorem wurde aus [2], S.118, Theorem 8.3 entnommen, wo man auch den Beweis dazu findet.

Theorem von Lagrange

Theorem 3.5. *Für den Fluss eines nicht-viskosen, inkompressiblen Fluids gilt, dass falls der Fluss zu einem Zeitpunkt rotationsfrei ist, er auch rotationsfrei bleibt.*

Das Theorem wurde aus [2], S.118, Theorem 8.5 entnommen, wo man auch den Beweis dazu findet.

Chapter 4

Spezielle Fluide

4.1 Rheologische Gleichungen

4.1.1 Nicht-Viskose (Ideale) Fluide

Für diese Art von Fluiden vernachläßigt man die innere Reibung des Fluids. Aus dieser Überlegung kann man schließen, dass keine Scherspannungen auftreten, also der Spannungstensor eine Diagonalmatrix ist. Man erhält unter diesen Aspekten die folgende Form für den Spannungstensor, vgl. [4]:

$$T(x,t,n) \;=\; -\,p(x,t)I, \text{ wobei } I \text{ die } 3\times 3 \text{ Einheitsmatirx ist.}$$

Wie üblich bezeichnet $p(x,t)$ den Druck im Fluid im Punkt x zur Zeit t. Aus dieser speziellen Form ergibt sich außerdem die Form: $div(\sigma) \;=\; -grad(p)$. Setzt man diese Formen nun in die Bewegungsgleichung ein, dann ergeben sich für die Bewegungsgleichung folgende Formen:

a) konservative Form: $$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \;+\; div(\rho v_i v) \;=\; -\,\frac{\partial p}{\partial x_i} \;+\; \rho f_i \qquad \text{für } i \;=\; 1,2,3,$$

b) konvektive Form: $$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} \;+\; \rho v\cdot grad(v_i) \;=\; -\,\frac{\partial p}{\partial x_i} \;+\; \rho f_i \qquad \text{für } i \;=\; 1,2,3.$$

Diesen Spezialfall der Bewegungsgleichung nennt man *Euler-Gleichungen*. In diesem Fall haben wir $1\,+\,3$ Gleichungen aus der Kontinuitätsgleichung und einer der beiden Versionen der Bewegungsgleichungen für $3\,+\,1\,+\,1$ Unbekannte $v,\ \rho,\ ,p$. Wir werden also noch zusätzliche Gleichungen benötigen, die bereits vorgestellte Energiegleichung und eine adäquate Zustandsgleichung.

4.1.2 Thermodynamische Beziehungen

Die absolute Temperatur Θ, die Dichte ρ und der Druck p werden als sogenannte Zustandsvariablen bezeichnet. Alle drei sind nicht-negative Funktionen. Weiters bezeichnen wir mit e die innere Energie des Fluids. Ein Gas wird durch die Zustandsgleichung

$p = p(\rho, \Theta)$ und durch die Beziehung $e = e(\rho, \Theta)$ beschrieben. Daher lassen sich p und Θ als Ausdrücke von e und ρ dargestellt werden, also $p = p(e, \rho$ und $\Theta = \Theta(e, \rho)$ Ein *perfektes Gas* beispielsweise wird durch die Zustandsgleichung $p = R\Theta\rho$ charakterisiert, wobei $R > 0$ die sogenannte Gaskonstante ist. Diese Gaskonstante lässt sich durch den Unterschied der spezifischen Wärme bei konstantem Druck c_p und bei konstantem Volumen c_v berechnen. Die Größe $\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$ heißt die Poisson adiabatische Konstante. Für Luft ist dieser Wert beispielsweise bei 1.4. Für ein perfektes Gas ist die innere Energie beispielsweise gegeben durch $e = c_v\Theta$, woraus sich auch folgende Darstellung ergibt: $e = c_p\Theta - \frac{p}{\rho}$ vgl. [1] S.28 ff.

4.1.3 Viskose (Newtonsche) Fluide

Für viskose Fluide lässt sich die innere Reibung nicht mehr vernachlässigen, daher ergibt sich die rheologische Gleichung der Form: $T = -pI + \tau$, wobei τ den viskosen Anteil des Spannungstensors (Scherspannungen) beschreibt. Um diesen viskosen Anteil zu identifizieren können die sogenannten Stokes'schen Postulate verwendet werden (entnommen aus [1] S.24 ff.):

1) τ ist eine stetige Funktion des Verformungs-Geschwindigkeits-Tensors D:

$$D = D(v) = \left[\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\right]_{i,j=1}^{3}$$

und sie ist weiters unabhängig von anderen kinematischen Variablen.

2) Fluide sind isotropische Medien, also alle Eigenschaften verhalten sich in alle Richtungen gleich.

3) Für D $= 0$ ergibt sich $T = -pI$.

4) Die Beziehung zwischen τ und D ist linear.

Führt man diese Postulate nun in eine mathematische Form über, ergeben sich folgende Bedingungen:

1*) $T' = f(D)$ für eine stetigen Funktion f.

2*) $ST'S^{-1} = f(SDS^{-1})$ für beliebige orthogonale Matrizen S. Diese Beziehung bedeutet, dass die Form von f invariant gegenüber Transformationen der karthesischen Koordinaten ist.

3*) $f(0) = 0$

4*) f ist linear.

Diese Postulate führen auf den folgenden Ansatz für T:

$$T = (-p + \lambda\, div(v))I + 2\mu D(v)$$

Die beiden Konstanten μ und λ sind die Viskositätskoeffizienten. Aus Überlegungen über die inneren Kräfte eines Fluids kann gezeigt werden, dass diese beiden Koeffizienten die Bedingungen $\mu \geq 0$ und $3\lambda + 2\mu \geq 0$ erfüllen müssen. Außerdem lässt sich zeigen, dass die beiden Konstanten die Bedingung $\lambda = -2/3\mu$ für einatomare Gase erfüllen. Diese Bedingung wird aber auch für komplexere Gase verwendet. Für einige dieser Überlegungen sei beispielsweise auf [2] S.114 ff. verwiesen.
Zusammen ergibt sich die folgende Form der Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div(\rho v \otimes v) = \rho f - grad(p) + grad(\lambda div(v)) + div(2\mu D(v))$$

4.1.4 Inkompressible Newtonsche Fluide

Wir wollen als nächstes den Fall eines inkompressiblen Fluids betrachten, also beispielsweise Wasser oder die meisten anderen Flüssigkeiten. Diese Fluide werden dadurch charakterisiert, dass das Volumen einer beliebigen Menge des Fluids während einer Bewegung unverändert bleibt, vgl. hierzu [2] S.105 ff. . Wir nehmen außerdem an, dass das Fluid in seinem Anfangszustand homogen ist. Also gilt für ein inkompressibles Fluid folgende Aussage:

$$\rho(x,0) = \rho_0 \rightarrow \rho(x,t) = \rho_0$$

Das heißt natürlich auch dass die Ableitung der Dichte nach der Zeit 0 ergibt, also

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) = 0.$$

Für den Fall einer solchen konstanten Dichte vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung auf die folgende Form:

$$div_x(v(x,t)) = div(v) = 0 \tag{4.1}$$

Die Bewegungsgleichung in konservativer Form wird zu:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + div_x(v_i \cdot v)(x,t) = f_i(x,t) + \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}(x,t)$$

für $i = 1, 2, \cdots, d$ und $(x,t) \in Q$, wobei

$$\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \Delta v_i.$$

Damit erhalten wir für inkompressible, Newtonsche Fluide die Bewegungsgleichung in

a) konservative Form

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} \;+\; \rho div(v \otimes v) \;=\; -\nabla p \;+\; \mu\Delta v \;+\; \rho f \tag{4.2}$$

b) konvektive Form

$$\frac{\partial v}{\partial t} \;+\; v \cdot \nabla v \;=\; -\frac{1}{\rho}\nabla p \;+\; \nu\Delta v \;+\; f, \tag{4.3}$$

wobei $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ist.

Verwenden wir nun (4.1) mit (4.2) bzw. mit (4.3) und geben geeignete Rand- bzw. Anfangsbedingungen an, erhalten wir aus den inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen ein vollständiges System aus partiellen Differentialgleichungen. Für einige Beispiele für Rand- und Anfangsbedingungen sei hier auf Kapitel 5 verwiesen. Es besteht natürlich auch die Möglichkeit, die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen im Rahmen eines Cauchy-Problems zu betrachten. Aussagen über die Existenz und Glattheit zu diesem Problem sind nach wie vor ungeklärt (siehe die Millenium-Problem in [7]).

4.2 Adiabatische Strömung

Diese Strömungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie keine Wärmeleitungsphänomene auftreten. Dies bedeutet, dass weder Wärmeleitung auftritt, noch ein Wärmeaustausch innerhalb des Fluids.
Dies führt auf die speziellen Formen von $q = 0$ und $k = 0$, da sowohl die Wärmequellen als auch der Wärmefluss nicht vorhanden sein können in diesen Fluiden. Für weiterführende Informationen sei auf [1] S.32 ff. verweisen.

4.3 Barotropische Strömung

Falls der Druck in einer Strömung als Funktion der Dichte auffassen lässt, bezeichnet man die entsprechende Strömung als barotropische Strömung. In diesem Fall gilt also $p = p(\rho)$ oder anders ausgedrückt $p = p \circ \rho$. Wir treffen die Annahmen, dass $p : (0, \infty) \to (0, \infty)$ abbildet und eine stetige, positive Ableitung auf $(0, +\infty)$ besitzt, vgl. [1] S.33 ff.
Betrachten wir nun den Spezialfall einer adiabatischen, barotropischen Strömung eines nicht-viskosen, perfekten Gases ergibt sich die Beziehung: $p = \kappa\rho^{\gamma}$, wobei κ eine Konstante für das gesamte Strr̈omungsfeld ist. Eine solche Strömung nennt man homoentropisch. Die beiden Konstanten κ und γ lasen sich aus Versuchen ermitteln.
Verwenden wir nun die bisherigen Erkenntnisse auf den Fall einer viskosen, kompressiblen, barotropischen Strömung in einem Gebiet Ω und einem Zeitintervall $(0, T)$, erhalten wir folgendes beschreibende System von partiellen Differentialgleichungen:

a) Kontinuitätsgleichung : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0$

b) Bewegungsgleichung: $\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div(\rho v \otimes v) + \nabla p(\rho) - \mu \Delta v - (\mu + \lambda)\nabla(div(v)) = \rho f$

c) $p = p(\rho)$

Wie vorher sind μ und λ die Viskositätskoeffizienten und erfüllen die Bedingungen $\mu,\ \mu + \lambda > 0$. f bezeichnet die Volumskraftdichte. Für den Spezialfall, dass $\mu = \lambda = 0$ gilt erhalten wir damit ein Modell für eine nicht-viskose, barotropische Strömung.

4.4 Vollständiges beschreibendes System

Wir wollen nun zum Abschluss ein wohlgestelltes System von Differentialglecihungen anschreiben, dass die Strömung eines wärmeleitenden Gases, also ein kompressibles Fluid, beschreiben soll. In den letzten Abschnitten haben wir bereits die zugrundeliegenden Gleichungen für dieses System betrachtet. Allerdings sieht man dass wir ein unterbestimmtes System von partielle Differentialgleichungen vorliegen haben. Um nun daraus ein geschlossenes System zu erhalten, werden wir die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichungen mit der Energiegleichung aus Abschnitt 3.4 und den thermodynamischen Beziehungen aus Abschnitt 4.1.2 koppeln. Es sei dabei erwähnt, dass die im Folgenden betrachteten Divergenz-Terme, alle nur bezüglich der Raumvariablen, also x zu verstehen sind. Wir erhalten das folgende System, vgl. [1] S. 34 ff. :

a) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0$

b) $\dfrac{\partial \rho v}{\partial t} + div(\rho v \otimes v) = \rho f - \nabla p + \nabla(\lambda div(v)) + div(2\mu \mathbb{D}(v))$

c) $\dfrac{\partial E}{\partial t} + div(Ev) = \rho f \cdot v - div(pv) + div(\lambda v div(v)) + div(2\mu \mathbb{D}(v)v) + \rho q + div(k \nabla \Theta)$

d) $e = \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}|v|^2$

e) $p = p(e, \rho)$

f) $\Theta = \Theta(e, \rho)$

wobei $[\mathbb{D}]^3_{i,j=1} = \left[\frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]^3_{i,j=1}$ der Geschwindigkeits-Deformationstensor. Dieses System bezecihnet mana als Navier-Stokes-Gleichungen für ein wärmeleitendes, kompressibles Gas. Für ein perfektes Gas, das die thermodynamischen Beziehungen aus Abschnitt 4.1.2 erfüllt lassen sich die Bedingungen d),e) und f) aus dem obigen System zu den beiden Bedingungen :

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{\rho}{2}|v|^2)$$
$$\Theta = (\frac{E}{\rho} - \frac{|v|^2}{2})/c_v$$

Man erkennt hier, dass ein vollständiges System für die drei Komponenten der Geschwindigkeit, die Dichte und die Energie vorliegt. Wieder ergibt sich für den Fall $\mu = \lambda = k = 0$ den Fall einer nicht-viskosen, kompressiblen Strömung, bestehend aus Bewegungsgleichung, Kontinuitätsgleichung, Energiegleichung und thermodynamischen Beziehungen.
Für Gase ist es normalerweise möglich Volumenkräfte zu vernachlässigen. Falls man dann auch noch mögliche Wärmequellen vernachlässigt ergeben sich die sogenannten kompressiblen Euler-Gleichungen:

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0$
- $\frac{\partial \rho v}{\partial t} + div(\rho v \otimes v) + \nabla p = 0$
- $\frac{\partial E}{\partial t} + div((E + p)v) = 0$
- $e = \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}|v|^2$
- $p = p(e, \rho)$

Für ein perfektes Gas lässt sich analog zu vorher p in der Form $p = (\gamma - 1)(E - \frac{\rho}{2}|v|^2)$ angeben.

4.5 Dimensionslose Formulierung

Durch Skalierung der Parameter $x_i, v_i, \rho, p, E, \Theta, q, t, f, \mu, \lambda, k$ lassen sich diese Gleichungen dimensionslos, also durch Verhältnisse ausdrücken. Wir wählen l^*, t^*, v^* *und* p^* als Refernzgrößen für die Länge, die Zeit, die Geschwindigkeit und den Druck. Die mit diese Referenzgrößen skalierten Größen $X_i = x_i(l^*)^{-1}$, $T = t(t^*)^{-1}$, $V_i = v_i(v^*)^{-1}$ und $P = p(p^*)^{-1}$ sind dimensionslos. Sie sind also nur Zahlen beziehungsweise Verhältnisse der ursprünglichen Größen zu den gewählten Referenzgrößen. Mittels einer Variablentransformation können wir diese dimensionslosen Variablen in unsere Gleichung einführen. Die hier verwendeten Schritte stammen aus [4] und werden für den Fall eines inkompressiblen, Newtonschen Fluids durchgeführt. Daher verwenden wir komponentenweise die Gleichungen (4.1) und (4.2) aus Abschnitt 4.1.4. Dies soll nur als Beispiel dienen, um die Vorgangsweise vorzuführen. Der Vorgang zur Herleitung der dimensionslosen Formulierung lässt sich natürlich auch fr die anderen Fälle durchführen.

4.5.1 Dimensionslose Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung (4.2) in konservativer Form für inkompressible Newtonsche Fluide lautet:

$$f_i \;=\; \frac{\partial v_i}{\partial t} \;-\; \nu \Delta v_i \;+\; \sum_{j=1}^{d} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \;+\; \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad i \;=\; 1,2,\ldots,d,\; \nu \;=\; \frac{\mu}{\rho}.$$

Wir transformieren die Größen in die Referenzgrößen und es ergibt sich:

$$f_i \;=\; \frac{\partial V_i}{\partial T}\frac{v^*}{t^*} \;-\; \nu \Delta_X V_i \frac{v^*}{(l^*)^2} \;+\; \frac{(v^*)^2}{l^*}\sum_{j=1}^{d} V_j \frac{\partial V_i}{\partial X_j} \;+\; \frac{p^*}{\rho l^*}\frac{\partial P}{\partial X_i}$$

Wir erweitern nun diese Gleichung mit $l^*((v^*)^{-2})$ und erhalten die dimensionslose Formulierung für die ursprüngliche Gleichung.

$$\underbrace{\frac{l^* f_i}{(v^*)^2}}_{=:F_i} \;=\; \underbrace{\frac{l^*}{v^* t^*}}_{k}\frac{\partial V_i}{\partial T} \;-\; \underbrace{\frac{\nu}{v^* l^*}}_{\frac{1}{Re}}\Delta_X V_i \;+\; \sum_{j=1}^{d} V_j \frac{\partial V_i}{\partial X_j} \;+\; \underbrace{\frac{p^*}{\rho (v^*)^2}}_{h}\frac{\partial P}{\partial X_i} \tag{4.4}$$

Da wir uns nun zwei unserer Referenzgrößen vorgeben können, wählen wir die Referenzzeit $t^* \;=\; l^*(v^*)^{-1}$ und den Referenzdruck $p^* \;=\; \rho(v^*)^2$ so, dass die Koeffizienten k und h gleich 1 werden. Wir erhalten somit die folgende Gleichung.

$$F_i \;=\; \frac{\partial V_i}{\partial T} \;-\; \frac{1}{Re}\Delta_X V_i \;+\; \sum_{j=1}^{d} V_j \frac{\partial V_i}{\partial X_j} \;+\; \frac{\partial P}{\partial X_i} \tag{4.5}$$

mit $t^* \;=\; \frac{l^*}{v^*}$, $p^* \;=\; \rho(v^*)^2$, $F_i \;=\; \frac{l^* f_i}{(v^*)^2}$ und $Re \;=\; \frac{l^* v^*}{\nu}$. Re bezeichnet man als die sogenannte Reynolds-Zahl. Sie ist eine dimensionslose Größe (also eine Zahl) und beschreibt, wie zähflüssig eine Strömung ist. Eine sehr kleine Reynolds-Zahl ($Re \ll 1$) tritt bei sehr zähflüssigen Strömungen auf.

4.5.2 Dimensionslose Koninuitätsgleichung

Analog zur Bewegungsgleichung kann man auch die Kontinuitätsgleichung (4.1) auf eine dimensionslose Form bringen. Wie eingangs erwähnt betrachten wir ein inkompressibles, Newtonsches Fluid:

$$div(v) \;=\; \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \;=\; 0$$

Wieder durch Transformation der Größen erhalten wir daraus:

$$\frac{v^*}{l^*}\underbrace{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial V_j}{\partial X_j}}_{div_X(V)} \;=\; 0$$

und daraus folgt

$$div_X(V) = 0$$

4.5.3 Anwendungen der dimensionslose Formulierung

Besonders erfolgreich wurde und wird die dimensionslose Formulierung verwendet um Berechnung von Ereignissen in einem gewissen Maßstab im Modell durchzuführen. Beispielsweise im Bau- und Ingenieurswesen kann damit an maßstabsgetreuen Modellen überprüft werden, ob geplante Flugzeugdesigns den Belastungen eines Fluges standhalten können. Es müssen in diesem Fall nicht die finanziellen Mittel verwendet werden, um das eigentliche Flugzeug zu bauen, nur um im schlimmsten Fall festzustellen, dass das Design untauglich ist und es wieder zu verschrotten, vgl. [6].
Diese sogenannte *Ähnlichkeitstheorie* wird vor allem auch im Schiffbau angewandt, um an maßstabgetreuen Modellen das Strömungsverhalten von Schiffen im Strömungskanal zu testen. Ebenso kann diese Technik verwendet werden, um naturwissenschaftliche Phänomene im Modell nachzubauen und zu untersuchen, weil das wirkliche Phänomen unzugänglich ist.

Chapter 5

Anfangs- und Randbedingungen

Um ein möglichst wohlgestelltes System von Differentialgleichungen zu erhalten ist es notwendig, entsprechend viele und sinnvolle Anfangs- und Randbedingungen zu stellen. Natürlich gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten, sinnvolle Bedingungen zu stellen und daher werden hier nur ein paar vorgestellt. Um eine Lösung, die bis zum Rand regulär ist, überhaupt möglich zu machen, ist es notwendig, dass die Anfangs- und Randbedingungen kompatibel sind. Das bedeutet, dass Folgendes gelten muss :

$$lim_{t\to 0}u(x,t) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \partial\Omega$$

5.1 Anfangsbedingungen

Die Anzahl der notwendigen Anfangsbedingungen, hängen dabei, wie von der Theorie über Differentialgleichungen, z.B. aus der Vorlesung über partielle Differentialgleichungen, her bekannt ist, von der Ordnung der in der Gleichung auftretenden Zeitableitungen ab. In diesem Abschnitt werden einige Beispiele für Anfangsbedingungen vorgestellt, die typischerweise bei Gleichungen mit Zeitableitungen erster Ordnung auftreten.

- Anfangsgeschwindigkeit: Dabei wird die Strömung mit einer bekannten Anfangsgeschwindigkeit in der Form: $v(x,0) \;=\; v_0(x)$ vorgegeben.
- Anfangsdichte: $\rho(x,0) \;=\; \rho_0(x)$ ist eine Forderung an die Anfangsdichte die im Fluid herrscht.
- Anfangstemperatur: Falls wir wissen, mit welcher Temperatur das Fluid in das System eindringt, kann es sinnvoll sein eine Forderung der Form: $\Theta(x,0) \;=\; \Theta_0(x)$ zu stellen.

5.2 Randbedingungen

Neben Anfangsbedingungen sind auch Randbedingungen für ein System von Differentialgleichungen entscheidend für die eindeutige Lösbarkeit. Analog zu den Anfangsbedingungen gibt es wieder eine Vielzahl von möglichen Randbedingungen. Je nach Ordnung der räumlichen Ableitung kann es wieder erforderlich sein, Randbedingungen zu fordern. Es sollen abermals einige Beispiele für Randbedingungen vorgestellt werden. Im ersten Fall werden Randbedingungen behandelt, die für ein festes Gebiet Ω auftreten können.

5.2.1 Fester Rand

Randbedinungen für ein viskoses (Newtonsches) Fluid

- Geschwindigkeit: Im ersten Fall sollen Randbedingungen für die Geschwindigkeit betrachtet werden:
  - no-slip Bedingung: Für eine fixierte und undurchdringliche Wand $\Gamma \subset \delta\Omega$ tritt ein Phänomen, das sich in Experimenten sehr leicht beobachten lässt, das Newtonsche Fluid haftet an dieser Wand. Dieser Umstand kann durch eine homogene Dirichlet-Bedingung dargestellt werden:

    $$v\big|_{\Gamma} \;=\; 0$$

    ausgedrückt werden.
  - inhomogene Dirichlet-Bedingungen: Im Allgemeinen hat diese Bedingung die Form:

    $$v\big|_{\partial\Omega} \;=\; v_D,$$

    also man gibt das Strm̈onugsprofil vor. Allerdings ist hier zwischen den Bedingungen an einem Einfluss und an einem Ausfluss zu unterscheiden. An einem Einfluss hat Γ die Form: $\Gamma_I(t) \;=\; \{x \in \partial\Omega | v(x,t) \cdot n(x) \;<\; 0\}$. Im Gegensatz dazu hat ein Ausfluss die Form: $\Gamma_O(t) \;=\; \{x \in \partial\Omega | v(x,t) \cdot n(x) \;>\; 0\}$. In beiden Fällen bezeichnet dabei n(x) die äußere Einheitsnormale auf $\delta\Omega$. Ist der Einfluss $\Gamma_I(t) \neq \emptyset$ muss dort auch die Dichte des einfließenden Fluids vorgeschrieben werden. Dies kann durch Vorschriften der Art:

    $$\rho(x,t) \;=\; \rho_D(x,t) \qquad x \in \Gamma_I(t),\; t \in (0,T)$$

    durchgeführt werden.
  - slip-Bedingung: Sie ist eine Undurchlässigkeits-Bedingung und entspricht der Gleichung:

    $$(v \cdot n)\big|_{\partial\Omega} \;=\; 0$$

- Temperatur: Falls die Temperatur berücksichtigt wird, werden auch Randbedingungen für die Temperatur notwendig, die wir am Ende des Kapitels einführen.

Randbedingungen für ein nicht-viskoses Fluid

In diesem Fall gilt wie immer $\mu = \lambda = \kappa = 0$.

- no-slip Bedingung: Es wird wieder das Verhalten des Fluids an einer undurchdringlichen fixierten Wand Γ beobachtet. Im Gegensatz zum viskosen Fall, muss das Fluid nun aber nicht mehr an der Wand "haften". Die Undurchdringbarkeit der Wand lässt sich aber immer noch durch die Gleichung

  $$(v \cdot n)\big|_{\Gamma} = 0$$

  beschreiben.

- inhomogene no-slip Bedingungen: Die Grundform der Bedingungen ist mit :

  $$(v \cdot n)\big|_{\partial\Omega} = v_{nD}$$

  anlog zum viskosen Fall. Wieder sind der Fall eines Einlasses und eines Auslasses am Rand zu unterscheiden.
  Analog zum viskosen Fall ist an einem Einlass wieder die Einlassdichte vorzuschreiben. Allerdings gibt es für die Randbedingungen am Auslass nun natürlichere Bedingungen, als die Geschwindigkeit dort vorzuschreiben, die sogenannten Auslass-Bedingungen.

5.2.2 Freier Rand

Im Falle eines freien Randes gibt es keinen eigentlichen Rand, wie für ein abgegrenztes Gebiet, stattdessen wird die Normalkomponente des Spannungstensors am Rand vorgeschrieben. Dieser Ansatz ist vergleichbar mit dem für ein Interface am Übergang zwischen zwei Materialien. Für perfekte Fluide zum Beispiel können diese Randbedingungen folgende Formen haben, vgl. [1]:

$$\begin{aligned} &v \cdot n \text{ ist stetig am freien Rand} \\ v \cdot n &= \hat{v} \cdot n \text{ für eine gegebene Randgeschwindigkeit } \hat{v} \end{aligned}$$

Vergleichsweise dazu, würde eine Interfacebedingung typischerweise die Form:

$$v_1 \cdot n = v_2 \cdot n = \hat{v} \cdot n$$

haben.
Für viskose Fluide könnte eine mögliche Bedingung die Stetigkeit der Geschwindigkeit des Fluids, also v ist stetig am freien Rand. Vergleichsweise dazu wäre ein Beispiel für eine Interfacebedingung $v_1 = v_2$.
Die nun folgenden Gleichungen und Formeln sollen einen Eindruck davon geben, wie diese Art von Rand typischerweise in Problemen vorkommt vgl. [1].

$$\tau\big|_{\partial\Omega} \equiv (\tau n)\big|_{\partial\Omega} \equiv ((-p + \lambda div(v))n + 2\mu D(v)n)\big|_{\partial\Omega} = H$$

Dieser Rand wird durch kinematische Bedingungen definiert. Ein Beispiel, entnommen aus [1], dafür ist

$$\begin{aligned} \partial\Omega(t) &= \{x|\eta(x,t) = 0\} \\ \text{mit } \eta \text{ gegeben durch: } \frac{\partial\eta}{\partial t} + (v.\nabla)\eta &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Beispiel für einen freien Rand, beschreibt, dass sich Fluid Partikel nur entlang des freien Randes bewegen.
Gilt $\xi_0 \in \partial\Omega(0)$ und $\frac{\partial\xi}{\partial t} = v(\xi,t), t > 0$, folgt:

$$\frac{d}{dt}\eta(\xi(t),t) = \frac{\partial\eta}{\partial t}(\xi(t),t) + v(\eta(t),t).\nabla\eta(\xi(t),t) = 0$$

mit $\eta(\xi(t),t) = \eta(\xi_0) = 0 \quad t > 0$

5.2.3 Randbedingungen für die Temperatur

Falls auch Wärmeleitung miteinbezogen wird, sind natürlich auch dafür Randbedingungen notwendig, z.B.

- Robin-Randbedingung: $-(k\frac{\partial\Theta}{\partial n})\big|_{\partial\Omega} = \alpha(\Theta - \Theta_a)\big|_{\partial\Omega}$, wobei k der spezifische Wärmeleitkoeffizient, α die Wärmeübergangszahl und Θ_a die Außentemperatur ist.
- Dirichlet-Randbedingung: Vorgabe der Temperatur am Rand: $\Theta\big|_{\partial\Omega} = \Theta_i$.
- Neumann-Randbedingung: Vorgabe des Wärmeflusses am Rand: $(-k\frac{\partial\Theta}{\partial n})\big|_{\partial\Omega} = q$.

Diese Randbedingungen können auch gemischt auf verschiedenen Randstücken vorkommen.

Chapter 6

Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir die Navier-Stokes Gleichungen, die in vielen Anwendungen die Basis für Computersimulationen sind, betrachtet. Die Navier-Stokes-Gleichungen werden verwendet, um Strömungen von Fluiden zu beschreiben. Wir haben dabei damit begonnen, die mathematischen Grundlagen zu erläutern, die für die Untersuchungen in den restlichen Kapiteln erforderlich sind. Dazu haben wir das Fundamentallemma der Variationsrechnung und das Reynold'sche Transporttheorem betrachtet und bewiesen. Wir haben als nächsten Schritt, die grundlegenden Gleichungen für die Navier-Stokes Gleichungen, die Bewegungsgleichung und die Kontinuitätsgleichung, mithilfe dieser beiden Werkzeuge hergeleitet. Dafür haben wir die Prinzipien der Massen- und der Impulserhaltung verwendet.
Danach betrachteten wir beispielhaft die Energiegleichung und die Theoreme von Bernoulli und Lagrange um eine Idee zu bekommen, welche zusätzlichen Bedingungen in gekoppelten Problemen auftauchen können und wie die einfachsten Arten von Strömungen, stationäre und rotationsfreie Strömungen, aussehen, beziehungsweise welche Eigenschaften sie haben.
Danach sind wir näher auf die Möglichkeiten eingegangen, um Fluide zu unterscheiden und welchen Einfluss diese Unterscheidungen auf die Navier-Stokes Gleichungen haben. Dabei galt unser besonderer Augenmerk der Kompressibilität, der Viskosität und dem Auftauchen von Wärmeleitphänomenen. Wir führten die dimensionslose Formulierung für die Navier-Stokes Gleichungen ein. Diese Formulierung ist unabhängig von physikalischen Größen (Maßeinheiten) und basiert rein auf Verhältnissen. In diesem Zusammenhang ist auch die Reynolds-Zahl eines Fluids aufgetaucht. Zum Abschluss haben wir Möglichkeiten betrachtet, Anfangs- und Randbedingungen zu den Navier-Stokes Gleichungen zu stellen, um im besten Fall ein wohl-gestelltes Problem zu erhalten. Diese Ansammlung stellt dabei keineswegs einen Anspruch auf Vollständigkeit. Den interessierten Leser verweisen wir auf die Monographen [1] und [3], sowie auf das Milleniumproblem zur Lösbarkeit und Glattheit des Cauchy-Problems der Navier-Stokes Gleichungen in [7].

Bibliography

[1] M. Feistauer , J. Felcman and I. Straškraba. *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Clarendon Press, Oxford, 2003.

[2] R. Temam and A. Miranville. *Mathematical Modelling in Continuum Mechanics*. Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[3] M. Feistauer. *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longman Scientific Thechnical, Harlow, 1993.

[4] U. Langer. *Lectures and Seminars for Mathematical Models in Engineering*. Johannes Kepler Universität Linz, 2015.

[5] S. Kindermann. *An introduction to mathematical methods for continuum mechanics*. Lecture script from the course Mathematical Methods in Continuum Mechanics. Industrial Mathematics Institute, Johannes Keppler Universität Linz, 2016.

[6] https://de.wikipedia.org/wiki/Ähnlichkeitstheorie

[7] http://www.claymath.org/millennium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation

Eidesstattliche Erklärung

Ich, Alexander Blumenschein, erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Linz, Juni 2016

Alexander Blumenschein

Curriculum Vitae

Name: Alexander Blumenschein

Nationality: Austria

Date of Birth: 14 September, 1993

Place of Birth: Linz, Austria

Education:

2000–2004	Volksschule (elementary school) VS30 Korefschule Linz
2004–2012	Bundesrealgymnasium (secondary comprehensive school) Hamerling
2012–2013	Zivildienst Nervenheilanstalt Wagner-Jauregg
2013–2016	Studies in Technical Mathematics, Johannes Kepler University Linz