



Technisch-Naturwissenschaftliche
Fakultät

Modellierung, numerische Simulation und Sensitivitätsanalyse eines hydraulischen Schaltkreislaufes

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplomingenieurin

im Masterstudium

Mathematik in den Naturwissenschaften

Eingereicht von:

Petra Neudorfer

Angefertigt am:

Institut für Numerische Mathematik

Beurteilung:

A. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Walter Zulehner

Linz, Juni 2011

Abstract

Hydraulics is of great importance to engine-development. In order to be able to improve an existing circuit or to see the significant response of the circuit to parameter changes, it is unavoidable to simulate. The aim of this master thesis is to build up a model of a given hydraulic circuit, do numerical simulation and perform sensitivity analysis. This practice-oriented topic was given by BRP Powertrain & Co KG.

In an abstract way, a hydraulic circuit can be seen as graph. To each node and connection state variables are assigned. These are described by various equations. For modelling the specific case the balance of forces, different flow principles, the equation of pressurisation and simple algebraic equations for constant and variable volumes are used.

The model of the particular circuit containing a gerotor pump, a valve, various orifices and lines, is derived in two steps.

At the beginning a subsystem without a moving plunger is considered. The main work here is modelling the gerotor pump. This problem leads to a system of differential equations, which could also be solved by standard tools, which use e.g. embedded Runge-Kutta-methods.

Modelling the given circuit is a bit more specific as the plunger of the valve is either freely moveable or sticks to a valve stop. One way of covering this effect leads mathematically to a sequence of systems of differential equations, which cannot be solved with standard routines as one neither knows the changeover points nor the number of system changes. The implemented numerical method uses an embedded Runge-Kutta-method to solve the system of differential equations. If there is a change of systems the method is restarted. Force and position monitoring decide the changeover points. At the end some exemplary sensitivity analyses are discussed.

Zusammenfassung

Hydraulik spielt unter anderem in der Motorenentwicklung eine wichtige Rolle. Um einen hydraulischen Kreislauf zu verbessern oder um auf sein wesentliches Verhalten bezüglich Parameteränderungen schließen zu können, ist es unumgänglich ihn zu simulieren. Das Ziel dieser Arbeit ist es ein Modell für einen gegebenen Hydraulikkreislauf aufzubauen, numerisch zu simulieren und eine Sensitivitätsanalyse durchzuführen. Diese praxisorientierte Aufgabenstellung wurde von der Firma BRP Powertrain GmbH & Co KG gestellt.

Abstrakt kann man einen hydraulischen Kreislauf als Graph betrachten. Jedem Knoten und jeder Kante werden Zustandsvariablen zugeordnet, die durch bestimmte Gleichungen beschrieben werden. Zur Modellierung des gegebenen Kreislaufes werden sämtliche Durchflussgesetze, das dynamische Kräftegleichgewicht sowie Gleichungen für den Druckaufbau und die Zustandsvariable Volumen benötigt.

Dem eigentlichen Problem, der Modellierung eines Hydraulikkreislaufes mit Gerotorpumpe, einem Ventil, sämtlichen Blenden und Leitungen nähert man sich in zwei Schritten.

Zunächst wird ein Submodell ohne beweglichen Steuerkolben, also ohne Ventil, diskutiert. Hier steckt die meiste Arbeit in der Modellierung der Gerotorpumpe. Dieses Problem führt auf ein System von Differentialgleichungen, welches durchaus mit Standardroutinen, die beispielsweise eingebettete Runge-Kutta-Methoden verwenden, gelöst werden kann.

Die Modellierung des gesamten Hydraulikkreislaufes ist etwas spezieller, da man sich Gedanken darüber machen muss, wie man die Bewegung des Ventilsteuerkolbens modelliert. Dieser ist nämlich entweder frei beweglich oder wird gegen den Ventilanschlag gedrückt. Diese Fallunterscheidung führt mathematisch betrachtet auf eine Sequenz von Systemen von Differentialgleichungen. Dabei ist weder der Umschaltzeitpunkt zwischen den Systemen noch die Anzahl dieser Systemwechsel bekannt. Zur Lösung dieses Problems können keine Standardtools herangezogen werden. Die umgesetzte numerische Methode verwendet im Wesentlichen innerhalb der Systeme eine eingebettete Runge-Kutta-Methode, welche im Fall eines Systemwechsels neu gestartet wird. Durch Kräfte- und Positionsmonitoring werden die Umschaltzeitpunkte bestimmt.

Am Ende der Arbeit werden einige beispielhafte Sensitivitätsanalysen diskutiert.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit zur Seite gestanden sind, aber auch bei all jenen, die mich durch meine Studienzeit begleitet haben.

Zu Beginn möchte ich mich bei Prof. Dr. Walter Zulehner bedanken, der sich sofort bereit erklärt hat, die Betreuung meiner Arbeit zu übernehmen und sich auch immer Zeit für die Betreuung genommen hat. Seine Ideen, Vorschläge und Anmerkungen waren sehr hilfreich und ich habe im Laufe dieser Arbeit viel dazugelernt.

Prof. Dr. Bernhard Manhartsgruber, der mir die Hydraulik näher gebracht hat und sich stets Zeit genommen hat, meine Fragen zu beantworten, möchte ich ebenfalls auf diesem Weg danken.

Seitens der Firma BRP Powertrain möchte ich mich bei meinen Arbeitskollegen für das angenehme Klima und ihre Hilfsbereitschaft bedanken. Mein Dank gilt vor allem Dipl.Ing. Karl Glinsner, der mir bereits im Laufe meines Studiums die Chance gegeben hat, das Unternehmen als Ferialpraktikantin kennenzulernen und ohne dessen Einsatz die Diplomarbeit nicht möglich gewesen wäre. Dipl.Ing. Johann Wilffinger möchte ich ebenfalls für seine Unterstützung und sein Engagement danken. Auch für die finanzielle Unterstützung möchte ich mich hiermit bedanken.

Mein größter Dank gilt meiner Familie und meinem Freund, die mich durch meine Ausbildung begleitet haben und mir stets Mut zugesprochen haben, den für mich richtigen Weg zu gehen. Vor allem meine Eltern waren für mich all die Jahre nicht nur eine mentale Stütze. Ohne ihre finanzielle Hilfe wäre weder meine schulische Ausbildung, noch das Studium in dieser Form möglich gewesen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Modellierungsgrundlagen	3
2.1	Idee der Modellbildung	3
2.2	Kennlinien physikalischer Größen	4
2.2.1	Dichte	4
2.2.2	Viskosität	5
2.2.3	Kompressionsmodul	6
2.3	Gleichungen für die Zustandsvariable Volumenstrom	8
2.3.1	Blende	9
2.3.2	Steuerkante eines Ventils	9
2.3.3	Leckage	10
2.4	Herleitung der Druckaufbaugleichung	11
2.5	Verschiebung des Ventilsteuerkolbens	13
2.5.1	Das dynamische Kräftegleichgewicht	14
2.6	Modellierung von Reib- und Strömungskräften am Ventil	15
2.6.1	Reibkraftmodell	15
2.6.2	Strömungskräfte an einem Ventil	17
2.7	Die Gerotorpumpe	18
3	Modellierung: Modell 1	23
3.1	Leckage der Pumpe	23
3.2	Prüfstandaufbau	24
3.3	Das mathematische Modell	25
3.4	Existenz und Eindeutigkeit	28
4	Modellierung: Modell 2	31
4.1	Aufbau des hydraulischen Kreislaufes	31
4.2	Das mathematische Problem	32
4.3	Existenz und Eindeutigkeit	37
5	Lösungsmethoden	39
5.1	Euler-Methode	39
5.2	Runge-Kutta-Methoden	41

5.2.1	Lokaler und globaler Fehler von Runge-Kutta-Methoden	43
6	Schrittweitensteuerung	55
6.1	Richardson Extrapolation	55
6.2	Eingebettete Runge-Kutta-Methoden	57
6.3	Automatische Schrittweitensteuerung	59
7	Sequenz von Differentialgleichungssystemen	61
8	Numerische Resultate	65
9	Sensitivitätsanalyse	69
9.1	Änderung des Vorsteuerdruckes am Ventil	69
9.2	Luft im Öl	71
9.3	Änderung der Blendengröße	72
	Abbildungsverzeichnis	80
	Tabellenverzeichnis	81
	Literaturverzeichnis	83

Kapitel 1

Einleitung

Hydraulik spielt eine wichtige Rolle in der Fahrzeugindustrie. Simulationsmodelle von hydraulischen Kreisläufen dienen vor allem zur Auslegung verschiedener Hydraulikkomponenten, aber auch dazu, das wesentliche Systemverhalten abzubilden.

In dieser Arbeit geht es grundsätzlich darum, einen gegebenen hydraulischen Kreislauf zu simulieren und ihn auf seine Sensitivität zu testen. Von besonderem Interesse ist die Reaktion des Ventilsteuerkolbens auf Parameteränderungen, wie beispielsweise Änderungen des Kontrolldruckes oder des Volumenstromes der Pumpe. Auch das Leitungsvolumen nach der Pumpe soll untersucht werden, da es einerseits groß genug sein sollte, um den ungleichförmigen Volumenstrom der Pumpe zu dämpfen, und andererseits sollte es die Reaktionszeit des Ventils nicht unnötig erhöhen.

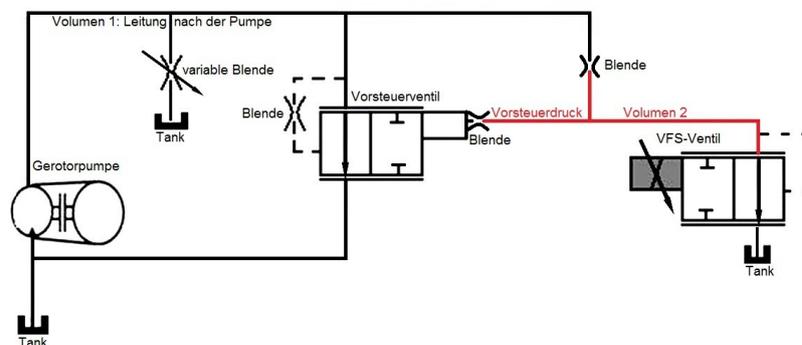


Abbildung 1.1: Schaltskizze des Modellproblems.

Diese Arbeit gliedert sich in folgende Kapitel:

- In Kapitel 2 wird die Basis der verwendeten Modellierungstechnik, nämlich den hydraulischen Kreislauf als Knotendiagramm zu betrachten, erläutert. Die dafür nötigen physikalischen und hydraulischen Grundlagen sowie die beschreibenden Gleichungen für die Zustandsvariablen werden ebenfalls in diesem Abschnitt gebracht.

- Ein Submodell des gesamten Kreislaufes ohne Ventilbewegung wird in Kapitel 3 betrachtet. Es dient dazu, die unbekanntes Leckageparameter für die Modellierung der Pumpe an Messdaten anzupassen.
- Schließlich werden in Kapitel 4 die beschreibenden Gleichungen für den tatsächlichen Hydraulikkreislauf aus Abbildung 1.1 aufgestellt.
- Die beiden Modelle führen auf zeitabhängige Differentialgleichungssysteme. In Kapitel 5 werden die expliziten Runge-Kutta-Methoden zur Lösung dieser Probleme besprochen.
- Um eine ausreichend genaue Lösung zu erhalten ist eine extrem kleine Schrittweite bei der Berechnung notwendig. Vor allem bei Simulationen mit schnellen Änderungen des Vorsteuerdruckes muss die Schrittweite sehr klein sein, um die Antwort des Ventils möglichst genau abzubilden. Die Drehzahl der Pumpe, welche über 1000 Umdrehungen pro Minute liegt, führt zu raschen Druckwechsel, die ebenfalls nur mit einer extrem kleinen Schrittweite zufriedenstellend approximiert werden können. Nicht zuletzt wegen des Anwendungsgebietes dieses Simulationstools wird eine automatische Schrittweitensteuerung einer fixen Schrittweite vorgezogen. In Kapitel 6 werden dazu die Richardson Methode und die eingebetteten Runge-Kutta-Methoden behandelt.
- Die Modellierung des, in Kapitel 4 betrachteten hydraulischen Kreislaufes führt auf eine Sequenz von Differentialgleichungsproblemen. Ein Lösungsweg dafür wird in Kapitel 7 aufgezeigt.
- Numerische Resultate werden in Kapitel 8 gebracht.
- Bemerkungen bezüglich der Sensitivität des hydraulischen Kreislaufes finden sich in Kapitel 9 wieder. Betrachtet wurden vor allem die Antwort des Ventils auf Änderungen des Vorsteuerdruckes und der Drehzahl der Pumpe sowie der Einfluss von Luft im Öl.

Kapitel 2

Grundlagen zur Modellierung eines hydraulischen Schaltkreislaufes

2.1 Idee der Modellbildung

Ein hydraulischer Schaltkreislauf kann abstrakt als Graph aufgefasst werden. Zu Beginn muss festgelegt werden, welche Komponente des Hydraulikkreislaufes einem Knoten und welche einer Verbindung entspricht. Tabelle 2.1 zeigt die Zuordnung, welche in dieser Arbeit verwendet wird.

Knoten	Verbindung
Leitungen	Blende
Tank	Steuerkante des Ventils
Kammervolumen der Pumpe	Einlass und Auslass der Pumpe
	Leckageströme

Tabelle 2.1: Zuordnung der verschiedenen Hydraulikkomponenten

Anschließend werden den Knoten und ihren Verbindungen entsprechende Zustandsvariablen zugewiesen, wie Abbildung 2.1 zeigt. Die Zustandsvariablen sind in diesem Fall Volumen, Druck und Volumenstrom, wobei die beiden Zustandsgrößen Druck p und Volumen V einem Knoten und die Zustandsgröße Volumenstrom Q einer Verbindung zugeordnet werden.

Bemerkung 2.1. *Der Volumenstrom ist richtungsabhängig, d.h. die Verbindungen sind als Pfeile zu verstehen. Die Richtung ist dabei immer vom höheren zum niedrigeren Druckniveau.*

Bemerkung 2.2. *Der Volumenstrom über die Steuerekante eines Ventils ist abhängig von der Verschiebung des Steuerkolbens. In diesem Fall wird einer Verbindung eine weitere Zustandsvariable, die Verschiebung, zugeordnet.*

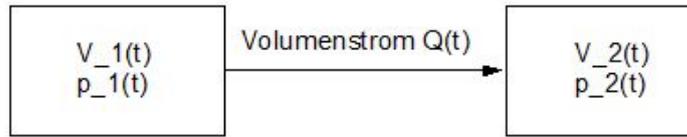


Abbildung 2.1: Eine Verbindung verbindet genau zwei Knoten ($p_1 > p_2$).

Von einem Knoten können beliebig viele Verbindungen ausgehen. Eine Verbindung verbindet genau zwei Knoten.

Die Anzahl der benötigten Gleichungen zur Beschreibung des Hydraulikkreislaufes ist gleich der Anzahl der Zustandsgrößen.

2.2 Kennlinien physikalischer Größen

Das Verhalten eines hydraulischen Kreislaufes wird von verschiedenen voneinander abhängigen Größen, wie beispielsweise der Öltemperatur, dem Anteil an gelöster und ungelöster Luft im Öl, dem Kompressionsmodul von Öl, der Ölviskosität und der Öldichte, beeinflusst. Der Zusammenhang dieser Größen folgt oft sehr komplizierten Gesetzen.

Um das Modell nicht unnötig zu erschweren, ist es wesentlich, sich Gedanken darüber zu machen, wie diese Größen in das Modell einfließen sollen. Jene, welche stark vom Druck oder vom Luftanteil im Öl abhängen, wie beispielsweise der Kompressionsmodul, werden als Funktion abgebildet. Größen, welche geringe Abhängigkeiten aufweisen, werden, wenn möglich, konstant angenommen.

2.2.1 Dichte

Die Beschreibung der Dichte stammt aus [7], [13] und [14].

Die Dichte ρ eines Fluides ist eine temperatur- und druckabhängige Größe, es gilt:

$$\rho(T, p) = \frac{m}{V}$$

wobei m die Masse ist und V das Volumen.

Der Zusammenhang zwischen Temperatur und Dichte wird durch die temperaturabhängige Volumenänderung ΔV

$$\Delta V = \bar{\alpha}_V V \Delta \vartheta$$

beschrieben. Dabei ist $\bar{\alpha}_V$ der mittlere Volumenausdehnungskoeffizient, V das Volumen und $\Delta \vartheta = \vartheta - \vartheta_0$ die Temperaturdifferenz mit $\vartheta_0 = 15^\circ\text{C}$.

Die Dichte-Temperaturbeziehung kann aber auch aus Tabellenblättern abgelesen werden, siehe [16]. Der Wert der Dichte bei Mineralölen liegt in etwa um $0,9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ und damit unter jenem von Wasser mit $1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

Den Zusammenhang zwischen Dichte und Druck beschreibt der Kompressionsmodul, siehe Abschnitt 2.2.3.

2.2.2 Viskosität

Die folgende Darstellung der Viskosität stammt aus [7], [10], [13] und [14].

Eine wichtige Eigenschaft von Druckflüssigkeiten ist ihre Zähigkeit η . Sie wirkt sich vor allem bei Spaltströmungen wie z.B. Leckageströme an Ventilen aus.

Bewegt man zwei Platten, deren Zwischenraum mit der Druckflüssigkeit (in diesem Fall Öl) gefüllt ist, gegeneinander, so entsteht innere Reibung. Die Viskosität, oder auch Zähigkeit genannt, ist damit ein Maß für die innere Reibung eines Fluides, oder anders ausgedrückt, sie ist die Eigenschaft des Fluides, durch Schubverformung eine Schubspannung aufzunehmen.

Für Newtonsche Fluide gilt folgendes Reibungsgesetz, das als definierende Gleichung für die dynamische Viskosität gesehen werden kann,

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

dabei ist τ die Schubspannung in x-Richtung und $\frac{dv_x}{dy}$ das Geschwindigkeitsgefälle, vgl. Abbildung 2.2.

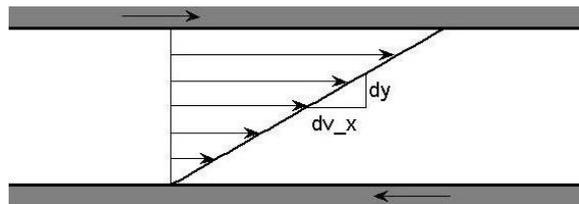


Abbildung 2.2: Erklärung zu obiger Formel

Manchmal ist es sinnvoller, die kinematische Viskosität ν zu verwenden, d.h. die dynamische Viskosität η auf die Dichte ρ zu beziehen.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Die Viskosität ist im Vergleich zur Dichte wesentlich stärker von der Temperatur abhängig. Dieser nichtlineare Zusammenhang zwischen Temperatur und Viskosität wurde experimentell untersucht und ist in Abbildung 2.3¹ dargestellt.

Da die Viskosität im späteren Modell nur bei der viskosen Reibung am Ventil auftritt, weil Leckageströme über das Ventil vernachlässigt werden, ist ihr Einfluss im Modell eher gering, weshalb die Druckabhängigkeit vernachlässigt wird.

¹Abbildung 2.3: Daten BRP Powertrain

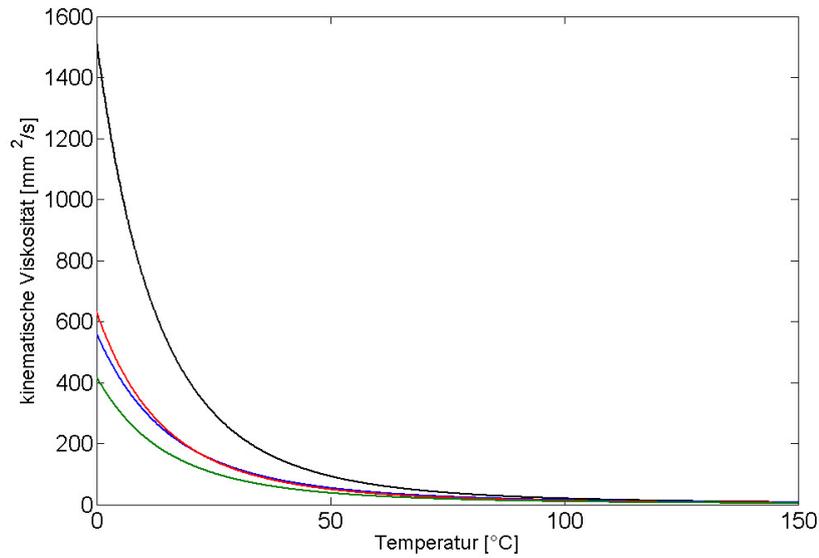


Abbildung 2.3: Viskosität-Temperatur Beziehung von verschiedenen Ölen

2.2.3 Kompressionsmodul

Dieser Abschnitt stammt aus [17], [7] und [14].

Der Kompressionsmodul eines Fluides beschreibt das Dichte-Druck-Verhalten und kann auch als Elastizitätsmodul des Fluides aufgefasst werden.

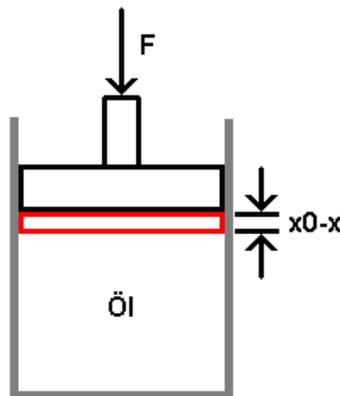


Abbildung 2.4: Öl ist komprimierbar

Angenommen Öl wäre inkompressibel, dann würde sich der Kolben nicht bewegen, wenn man die äußere Kraft F in Abbildung 2.4 erhöht. Dies entspricht jedoch nicht der Realität. Öl ist kompressibel, d.h. wenn man die äußere Kraft F erhöht, dann verringert sich das Volumen. Dieser Zusammenhang wird durch den Kompressionsmodul E beschrieben und es gilt:

$$\Delta V = \frac{V}{E} \Delta p ,$$

wobei Δp die Druckdifferenz, ΔV die Volumenänderung und V das Volumen ist. Der Kompressionsmodul von Öl ist stark vom Druck, der Öltemperatur, der Ölsorte als auch vom Anteil an gelöster und ungelöster Luft im Öl abhängig. Außerdem dehnen sich auch die, das Öl umgebende Bauteile aus. Aus diesem Grund verwendet man für die Simulation meist einen Ersatzkompressionsmodul, [17]:

$$E_{isen}(p(t)) = E_{oil} \frac{1 + pro}{1 + \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{pro E_{oil}}{\gamma p}}$$

E_{isen}	...	Kompressionsmodul bei isentroper Zustandsänderung
E_{oil}	...	Kompressionsmodul von reinem Öl
$pro = \frac{V_L}{V_{oil}}$...	Anteil an Luft im Öl
	V_L	Volumen der ungelösten Luft bei Atmosphärendruck
	V_{oil}	Volumen des fremdluftfreien Öls bei Atmosphärendruck
p_0	...	Atmosphärendruck
p	...	Druck im Öl
γ	...	Isentropenexponent

Durch den Ersatzkompressionsmodul wird somit der Einfluss von gelöster und ungelöster Luft im Öl bis zu einem bestimmten Grad berücksichtigt, ohne zweiphasig zu rechnen. Der Ersatzkompressionsmodul unterschiedlicher Luftgehalte ist in Abbildung 2.5 dargestellt.

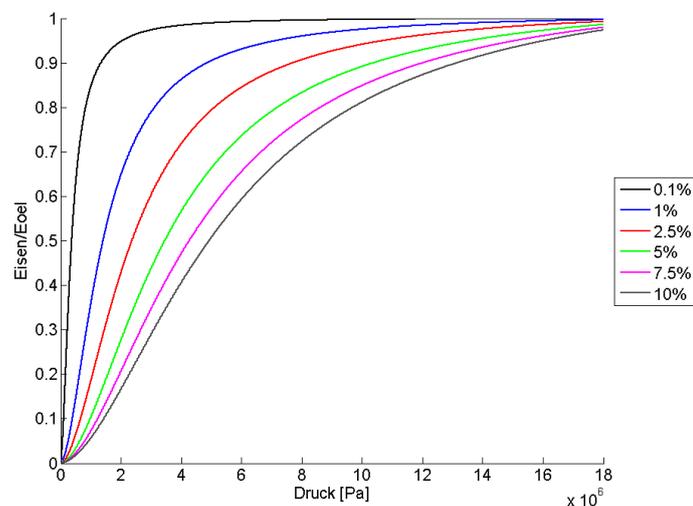


Abbildung 2.5: Einfluss von Luft im Öl - Ersatzkompressionsmodul

Dass der Kompressionsmodul von Öl zwischen 0 und 70 bar stark variiert, zeigt Abbildung 2.6. In diesem Druckbereich arbeitet auch der zu betrachtende hydraulische Schaltkreis. Deshalb ist es wichtig, den hier stark druckabhängigen Kompressionsmodul in die Berechnung einfließen zu lassen. Für die Simulation von Kreisläufen im Hochdruckbereich kann man ihn hingegen konstant annehmen.

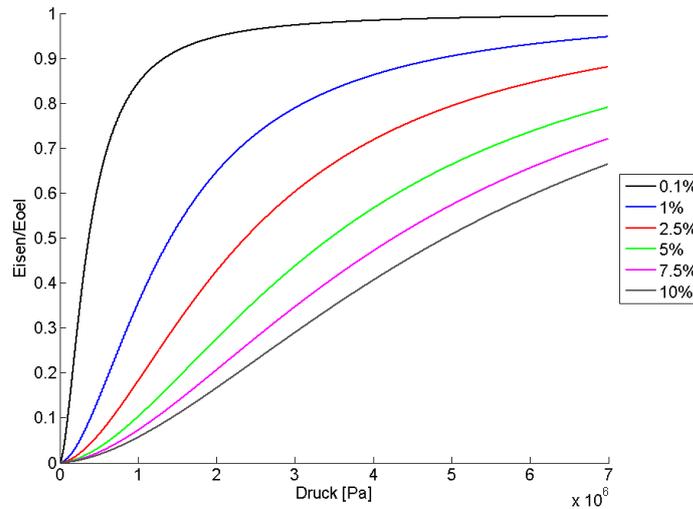


Abbildung 2.6: Einfluss von Luft im Öl - Ersatzkompressionsmodul; Der, für diese Anwendung, interessante Druckbereich liegt zwischen 0.1 und 70 bar

2.3 Gleichungen für die Zustandsvariable Volumenstrom: Verdränger und Widerstände

In diesem Abschnitt verwende ich [3], [2], [7] und [10].

Das einzige Bauteil, welches in jedem hydraulischen Kreislauf vorhanden sein muss, ist eine Verdrängerkomponente. Sie muss einmal als Motor und ein weiteres Mal als Pumpe auftreten. In diesem Fall betreibt der Motor über einen Antriebsstrang eine Gerotorpumpe, welche Öl aus dem Tank in den hydraulischen Kreislauf einspeist. Hydraulische Widerstände wie Ventile und Blenden haben die Aufgabe, die Drücke in den durch sie getrennten Volumina zu regeln.

Neben rein hydraulisch gesteuerten Komponenten kommt auch ein elektrisch gesteuertes Hydraulikbauteil zum Einsatz. Dieses PI-Regelventil hat die Aufgabe, den Vorsteuerdruck am Ventil einzustellen. Im Modell wird angenommen, dass es einwandfrei funktioniert. Deshalb wird der durch dieses Ventil eingestellte Druck als Eingangsgröße genommen.

Damit die Hydraulikflüssigkeit durch ein Rohr, ein Ventil, eine Blende oder etwaige andere hydraulische Widerstände strömt, ist eine Druckdifferenz Δp zwischen anströmender und abströmender Seite nötig. Das Fluid fließt dabei immer vom höheren Druckniveau zum niedrigeren.

Die Strömung ist nicht nur vom Fluid und der Druckdifferenz abhängig, sondern auch von der Geometrie des Widerstandes. Eine Berücksichtigung der genauen Geometrie ist enorm aufwendig und nimmt extrem hohe Rechenzeiten in Anspruch. Es ist nicht das Ziel dieser Arbeit, das Strömungsverhalten eines Widerstandes exakt abzubilden, viel eher möchte man eine rasche Aussage über das Verhalten des gesamten Kreislaufes. Deshalb werden hydraulische Widerstände rein zeitabhängig modelliert. Im Folgenden

werden diverse Durchflussgesetze, also Volumenstrom-Druckdifferenz Beziehungen, beschrieben.

2.3.1 Blende

Beim Durchströmen einer Blende können zwei Fälle auftreten, wie Abbildung 2.7 zeigt.

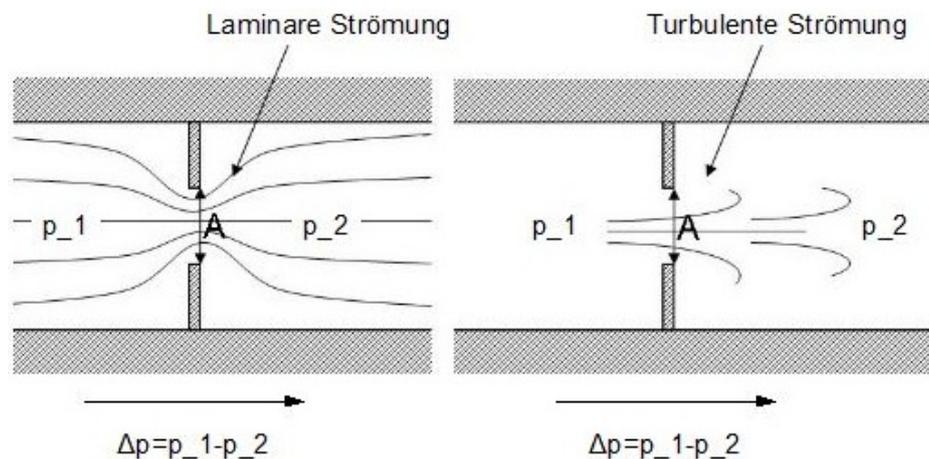


Abbildung 2.7: Im Gegensatz zur laminaren Strömung bilden sich bei der turbulenten Strömung Wirbel hinter der Blende

Bei der laminaren Strömung überwiegt der Einfluss der viskosen Scherkräfte. Sie tritt bei Strömungen durch eine gerade Rohrleitung mit Blende auf, wenn die Reynoldszahl klein ist. In diesem Fall ist der Zusammenhang zwischen Volumenstrom und Druckdifferenz linear.

Eine turbulente Strömung durch eine Blende zeichnet sich bei großen Reynoldszahlen oder gekrümmten Leitungen ab. Hier überwiegen die Trägheitskräfte und es kommt zu Verwirbelungen hinter der Blende. Der Zusammenhang zwischen Volumenstrom Q und anliegender Druckdifferenz Δp wird im turbulenten Fall durch folgende Gleichung beschrieben

$$Q = \alpha A \operatorname{sgn}(\Delta p) \sqrt{\frac{2|\Delta p|}{\rho}} \quad (2.1)$$

wobei $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ gilt und A die durchströmte Querschnittsfläche ist.

2.3.2 Steuerkante eines Ventils

Das Durchflussgesetz durch eine geöffnete Steuerkante gleicht dem einer Blende im turbulenten Fall

$$Q = \begin{cases} \alpha d \pi |x - x_0| \operatorname{sgn}(\Delta p) \sqrt{\frac{2|\Delta p|}{\rho}} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

mit $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. Dabei ist d der Gehäusedurchmesser und $s = x - x_0$ der Öffnungsweg der Steuerkante, wie Abbildung 2.8 zeigt. Die Annahme, dass das Ventil perfekt ins Gehäuse eingepasst ist, es also keinen Spalt zwischen Steuerschieber und Bohrung gibt, ist praktisch falsch. Damit das Ventil funktioniert, muss ein Schmierfilmspalt existieren, dessen Höhe unter anderem von Fertigungstoleranzen beeinflusst wird.

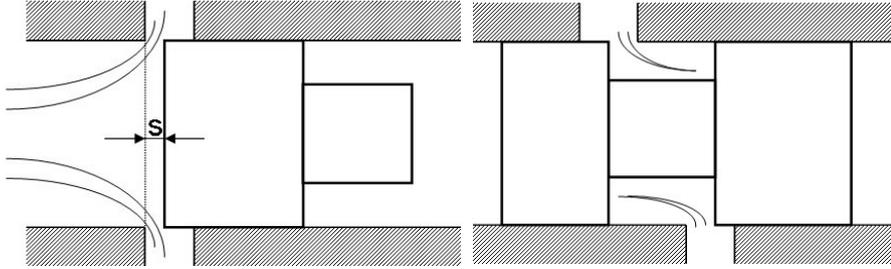


Abbildung 2.8: Volumenstrom durch die Steuerkante eines Ventils. s ist der Öffnungsweg der Steuerkante

Es gibt somit auch bei geschlossener Steuerkante einen Volumenstrom über den Kolben, den sogenannten Leckagestrom. Darauf wird in Absatz 2.3.3 eingegangen. Sobald das Ventil eine große Öffnung gegenüber dem radialen Spalt hat, ist (2.2) eine gute Näherung für den Durchsatz des Ventils.

Bemerkung 2.3. Sowohl beim Durchflussgesetz für eine Blende im turbulenten Fall, als auch beim Durchflussgesetz für eine Steuerkante tritt der Durchflusskoeffizient α auf. Er ist ein experimentell bestimmter Wert, der abhängig von der Geometrie des durchströmten Widerstandes ist und welcher theoretisch zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt. Ein guter Schätzwert für α bei scharfkantigen Blenden ist 0.6. Prinzipiell gilt: Je stumpfer bzw. breiter die Blende, desto größer der Durchflusskoeffizient.

2.3.3 Leckage

Leckageströme tauchen an den verschiedensten Stellen im Kreislauf auf und entstehen dadurch, dass eine Druckdifferenz an einem Leck anliegt. Dieser Spalt kann gewollt sein, um die Funktionalität einer Hydraulikkomponente zu gewährleisten, oder ungewollt sein. Der erste Fall tritt hauptsächlich bei zueinander bewegten Teilen auf, zum Beispiel als Schmierpalt an Ventilen.

Es ist im Allgemeinen schwer, diese Verlustströme sinnvoll in das Modell einzubauen. Am Ventil kann man sie als laminare Spaltströmung berücksichtigen,

$$Q = \frac{D \pi h^3 \Delta p}{12 \nu \rho L}$$

wobei D der Gehäusedurchmesser, h die Spalthöhe zwischen Zylinder und Gehäuse und L die Länge des Zylinders ist.

Bei der Pumpe treten einerseits die Leckageströme zwischen den einzelnen Kammern auf, weil die Pumpe nicht perfekt abdichtet, und andererseits die Volumenströme durch

den Spalt zwischen Innenrotor und Gehäusewand. Hier empfiehlt es sich, den Leckagestrom mit Messungen abzugleichen. Dabei ist es sinnvoll, nicht zwischen den einzelnen Leckageströmen zu differenzieren, und die Summe dieser Volumenströme wie folgt im Modell zu berücksichtigen:

$$Q = l_1 \Delta p + \operatorname{sgn}(\Delta p) l_2 \Delta p^2$$

wobei die Parameter l_1 und l_2 mit Messungen abzugleichen sind.

2.4 Herleitung der Druckaufbaugleichung

Die Herleitung stammt aus [2].

Die Druckaufbaugleichung lässt sich aus der Massenbilanz unter folgender Annahme herleiten:

Annahme 1. Zu jedem Zeitpunkt sei die Masse des Fluides im gesamten Volumen gleichverteilt.

Bemerkung 2.4. *Annahme 1 widerspricht der Tatsache, dass thermodynamische Zustandsänderungen sich in endlicher Zeit ausbreiten. Laufen diese Änderungen jedoch langsam genug ab, so kann man die tatsächliche Massenverteilung gut mit einer im gesamten Gebiet gleichverteilten Masse annähern.*

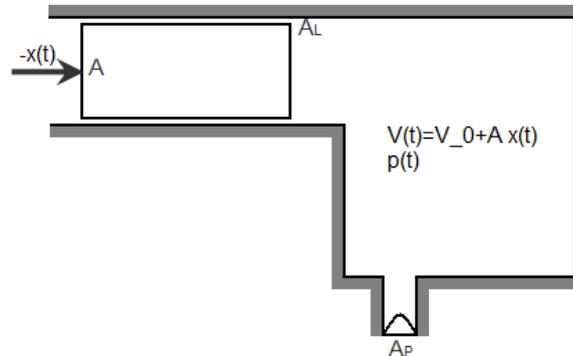


Abbildung 2.9: Der Massenstrom kann nur über die beiden Flächen A_L und A_P in das Kontrollvolumen zu- und abfließen. Durch den beweglichen Kolben kann das Kontrollvolumen verändert werden, d.h. es ist zeitabhängig.

Im Folgenden gelte somit Annahme 1, d.h. die Dichte ρ ist eine rein zeitabhängige Funktion. Die Masse des Fluides $m(t)$ ergibt sich aus:

$$m(t) = \rho(t) V(t) \tag{2.3}$$

wobei $V(t)$, das in Abbildung 2.9 dargestellte Kontrollvolumen ist, dessen Größe durch die Position des Kolbens $x(t)$ bestimmt ist. Es gilt:

$$V(t) = V_0 + A x(t)$$

mit $V_0 = \text{konstant}$ und Kolbenquerschnittsfläche A . Differenziert man Gleichung (2.3) nach der Zeit, so ergibt sich folgende Massenbilanzgleichung.

$$\dot{m}(t) = \dot{\rho}(t) V(t) + \rho(t) \dot{V}(t) \quad (2.4)$$

Die Massenerhaltung besagt, dass Masse nicht erzeugt oder vernichtet werden kann. Der Massenstrom $\dot{m}(t)$ ist jene Masse, die in das Kontrollvolumen pro Zeiteinheit einströmt.

Nachdem die Dichte im ganzen Gebiet zu jedem Zeitpunkt gleichverteilt angenommen wurde, kann man den Massenstrom durch den Volumenstrom ausdrücken,

$$\dot{m}(t) = \rho(t) \sum Q_i(t) \quad (2.5)$$

wobei $Q_i(t)$ die in das Kontrollvolumen zu- bzw. abfließenden Volumenströme sind. Im Fall des, in Abbildung 2.9 dargestellten, Kontrollvolumens gibt es nur zwei Flächen, über die der Volumenstrom in das Kontrollvolumen strömen kann. Diese sind die Querschnittsfläche zwischen Zylinder und Gehäuse A_L und die Querschnittsfläche des Anschlusses A_P .

Da die Richtung der Volumenströme entscheidend ist, trifft man folgende Vereinbarung.

Annahme 2. Die in das Kontrollvolumen zufließenden Volumenströme haben ein positives, die abfließenden ein negatives Vorzeichen.

Setzt man (2.5) in (2.4) ein, so ergibt sich:

$$\rho(t) \sum Q_i(t) = \dot{\rho}(t) V(t) + \rho(t) A \dot{x}(t) . \quad (2.6)$$

Aus dem Stoffgesetz, welches den Zusammenhang zwischen Dichte ρ und Druck p beschreibt,

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{E_{isen}}$$

erhält man durch Differentiation:

$$\dot{\rho}(t) = \frac{d}{dt}\rho = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dt} = \frac{\rho}{E_{isen}} \dot{p}(t)$$

wobei E_{isen} der Kompressionsmodul ist, siehe 2.2.3. Mit Hilfe dieser Beziehung kann man obige gewöhnliche Differentialgleichung (2.6) der Dichte $\rho(t)$ als Differentialgleichung des Druckes $p(t)$ schreiben.

$$\rho(t) \sum Q_i(t) = \rho(t) \frac{\dot{p}(t)}{E_{isen}(p(t))} V(t) + \rho(t) A \dot{x}(t)$$

Division durch die Dichte $\rho(t)$ ergibt:

$$\sum Q_i(t) = \frac{\dot{p}(t)}{E_{isen}(p(t))} V(t) + A \dot{x}(t) .$$

Durch Subtraktion von $A \dot{x}(t)$ erhält man:

$$\sum Q_i(t) - A \dot{x}(t) = \frac{\dot{p}(t)}{E_{isen}(p(t))} (V_0 + A x(t)) .$$

Auflösen nach $\dot{p}(t)$ ergibt:

$$\dot{p}(t) = \frac{E_{isen}(p(t))}{V_0 + A x(t)} \left(\sum Q_i(t) - A \dot{x}(t) \right) . \quad (2.7)$$

Die Druckaufbaugleichung (2.7) beschreibt somit die zeitliche Änderung des Druckes in einem Kontrollvolumen mit beweglichem Kolben. Ist das Volumen konstant, so gilt:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \dot{p}(t) = \frac{E_{isen}(p(t))}{V} \sum Q_i(t) .$$

2.5 Verschiebung des Ventilsteuerkolbens

Der Ventilsteuerkolben ist nur beschränkt frei beweglich, d.h. er kann sich nur zwischen den beiden Ventilansschlägen bewegen. Vernachlässigt man die Tatsache, dass es beim Auftreffen des Kolbens am Anschlag zu einem geringen Rückstoß kommen kann und dass der Kolben kurz vor Aufprall extrem abgebremst wird, so kann man die Verschiebung des Steuerkolbens durch folgende Fallunterscheidung, welche in Abbildung 2.10 dargestellt ist, modellieren:

1. Fall: Der Kolben ist frei beweglich. Dieser Zustand ist dadurch gekennzeichnet, dass sich der Steuerkolben entweder echt zwischen den beiden Ventilansschlägen x_{max} und x_{01} befindet,

$$x(t) \in (x_{max}, x_{01})$$

oder seine Position gleich einem der beiden Anschläge ist und die rüctreibende Kraft größer gleich jener Kraft ist, welche den Kolben gegen den Anschlag drückt. Befindet sich also der Kolben im linken Anschlag $x(t) = x_{max}$, und ist die rüctreibende Kraft F_{left} größer gleich der Gegenkraft F_{right} , so ist der Kolben frei beweglich.

$$x(t) = x_{max} \quad \text{und} \quad F_{left} \geq F_{right}$$

Wenn sich der Kolben im rechten Anschlag $x(t) = x_{01}$ befindet, so ist in diesem Fall die rüctreibende Kraft F_{right} . Ist diese Kraft größer gleich ihrer Gegenkraft F_{left} , so ist der Kolben frei beweglich.

$$x(t) = x_{01} \quad \text{und} \quad F_{right} \geq F_{left}$$

Im frei beweglichen Fall kann die Bewegung des Steuerkolbens über das dynamische Kräftegleichgewicht beschrieben werden.

2. Fall: Der Kolben wird gegen einen der beiden Ventilansläge gedrückt. Hier befindet sich der Steuerkolben in einem der beiden Ventilansläge und die rücktreibende Kraft ist kleiner als ihre Gegenkraft, die den Kolben gegen den Anschlag drückt. Wird der Kolben gegen den rechten Ventilanschlag gedrückt, so gilt:

$$x(t) = x_{01} \quad \text{und} \quad F_{left} > F_{right} .$$

Analog gilt für den linken Ventilanschlag:

$$x(t) = x_{max} \quad \text{und} \quad F_{left} < F_{right} .$$

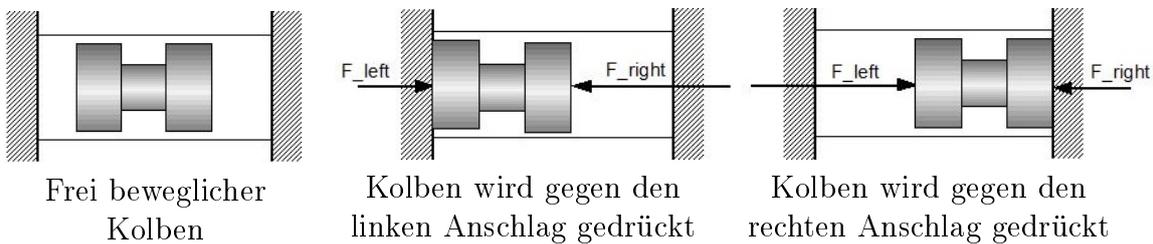


Abbildung 2.10: Fallunterscheidung bei der Modellierung der Verschiebung des Ventilsteuerkolbens

2.5.1 Das dynamische Kräftegleichgewicht

Zur Beschreibung des Ventilsteuerkolbens im frei beweglichen Fall wird das dynamische Kräftegleichgewicht verwendet. Hier verwende ich [23].

Um den Steuerkolben des Ventils zu beschleunigen, muss eine Kraft auf diesen einwirken. Zwischen den äußeren Kräften und den Trägheitskräften stellt sich ein Gleichgewicht ein. Die hier auftretenden äußeren Kräfte sind Druckwirkungen auf den Kolben, Strömungs- und Reibkräfte, sowie die Kraft der Feder, welche den Kolben bei Stillstand des Systems in seiner Ausgangsposition halten soll. Die Schwerkraft wird in diesem Modell nicht berücksichtigt. Weiters werden nur axial wirkende äußeren Kräfte beachtet, d.h. es wird angenommen, dass sich die radialen Kräfte aufheben.

Das dynamische Kräftegleichgewicht wird durch die Newton-Gleichung beschrieben:

$$m a = \sum F_i$$

dabei ist m die Masse des zu bewegenden Volumenelements, a die Beschleunigung und F_i sind die (richtungsabhängigen) Kräfte am Kolben.

Die Federkraft im Modell wird über folgenden linearen Zusammenhang berücksichtigt:

$$F = \Delta L c_{Feder}$$

wobei $\Delta L = L_{max} - L_{ist}$ die Differenz zwischen eigentlicher Länge der Feder und tatsächlicher Länge der Feder und c_{Feder} die Federkonstante ist.

Jene Kräfte, welche die Druckwirkung am Steuerkolben beschreiben, wirken immer in Richtung des Inneren des Volumenelements:

$$F = p A$$

dabei ist A die Fläche, auf welche der Druck p wirkt.

Weitere im Modell auftretende Kräfte werden in Abschnitt 2.6 behandelt.

2.6 Modellierung von Reib- und Strömungskräften am Ventil

2.6.1 Reibkraftmodell

Im Folgenden werden sowohl statische als auch dynamische Reibkraftmodelle diskutiert. Dieser Abschnitt stammt aus [1], [13], [10], [7] und [20].

Reibung ist die tangentielle Reaktion von sich berührenden Flächen oder Teilchen und tritt in jedem hydraulischen Kreislauf auf. Sie wirkt hemmend, also stets in die entgegengesetzte Richtung der Geschwindigkeit und hat vor allem auf die Bewegung von Steuerkolben und Zylindern einen bemerkenswerten Einfluss.

Würde man Leitungen modellieren, so müsste man auch dort auf die Reibung achten, da bei der Durchströmung eines Rohres die Fluidpartikel am Rand haften bleiben und zusätzlich Reibung innerhalb des Fluides, also zwischen verschiedenen Flüssigkeitsschichten, auftritt. Die poröse Oberfläche des Rohres hat zur Folge, dass die Geschwindigkeit der Fluidpartikel von der Mitte des Rohres in Richtung Rand auf Null abnimmt.

Im späteren Modell wird rein die Reibkraft am Ventil berücksichtigt. Dabei tritt Haftreibung und viskose Reibung aufgrund des Schmierfilms zwischen Steuerkolben und Gehäuse auf.

Der statische Fall

Statische Modelle bauen auf der Tatsache auf, dass Reibung eine Bewegung hemmt. Das Coulombsche Reibkraftmodell ist das wohl einfachste Modell zur Beschreibung der trockenen Reibung F_C . Es nimmt an, dass die Normalkraft F_N proportional zur Reibkraft ist und dass die Reibkraft F_R von Geschwindigkeit v und Kontaktfläche unabhängig ist.

$$F_C = \mu F_N$$

$$F_R = \operatorname{sgn}(v) F_C$$

Dabei ist μ die Haftreibungszahl, welche unter anderem von der Oberflächenbeschaffenheit der Berührflächen und deren Material abhängig ist und in den meisten Fällen zwischen 0.1 und 0.6 liegt.

Dieses Modell ist ein idealisiertes Verschiebungsmodell, d.h. möchte man eine Masse in Bewegung versetzen, so muss man nach dem Coulombschen Reibkraftmodell die Kraft F_C aufbringen. Unabhängig von der Geschwindigkeit wirkt dann auf eine bewegte Masse stets eine konstante Reibkraft.

Im Gegensatz zum Coulombschen Reibkraftmodell berücksichtigt das Newtonsche Reibkraftmodell die viskose Reibung F_v , also jene Reibung, welche auftritt, wenn sich Flüssigkeitsschichten gegeneinander bewegen.

$$F_v = \frac{\eta D l \pi}{h}$$

$$F_R = F_v v$$

Dabei ist η die kinematische Viskosität, h die Höhe des Fluidspaltes, D der Durchmesser und l die Länge des Kolbens.

Bei einem Ventil treten sowohl Haft- als auch Gleitreibung auf. Eine Möglichkeit diese beiden Aspekte zu behandeln ist, sie linear zu kombinieren:

$$F_R = \operatorname{sgn}(v) F_C + F_v v$$

Es wird auch des Öfteren ein nichtlineares Reibkraftmodell folgender Form verwendet, das den Stribeck Effekt näherungsweise beschreibt:

$$F_R = F_C + F_v v + (F_S - F_C) \exp(-|v/v_S|^{\delta_S})$$

wobei F_S das Extremum der Stribeck Kurve ist, v_S die Stribeck-Geschwindigkeit und δ_S ein geometrieabhängiger Parameter.

Die Stribeck Kurve:

Diese Erläuterung stammt aus [22].

Stellt man die experimentell bestimmte Reibungszahl in Abhängigkeit der Geschwindigkeit dar, so erhält man die Stribeck Kurve. Sie beschreibt den Effekt, dass sich die Reibung als Kombination von Haft- und Gleitreibung ergibt. In einer Umgebung von $v = 0$ wirkt die Haftreibung, ehe die Reibung in eine Mischreibung übergeht. In diesem Bereich fällt die Stribeck Kurve steil ab, bis sie das Reibungsminimum erreicht. Die zu diesem Extremum gehörige Geschwindigkeit v_S wird als Stribeck-Geschwindigkeit bezeichnet. In einer Umgebung dieses Minimums liegt der sogenannte Ausklinkpunkt. Das ist jener Punkt, ab dem die beiden Reibflächen keinen direkten Kontakt mehr haben. Von da an wirkt nur mehr die viskose Reibung. Im Bereich der viskosen Reibung steigt die Kurve mit zunehmender Geschwindigkeit an, wobei der Gradient hier wesentlich kleiner ist als jener im Bereich der Mischreibung. Abhängig von Druck und Viskosität ändern sich die Steigungen der Stribeck Kurve, der Wert des Minimums bleibt jedoch in etwa gleich.

Bemerkung 2.5. *Alle diese statischen Modelle haben den Nachteil, dass sie im Nullpunkt ($v = 0$) unstetig sind und den Reibungseffekt in jenem Punkt unzureichend abbilden.*

Ein dynamisches Modell

Hier halte ich mich außerdem sehr stark an [21].

Betrachtet man zwei sich berührende Flächen als Bürsten, was sich dadurch rechtfertigen lässt, dass die Oberflächen rau sind und somit ineinander greifen, so sieht man, dass sich bei Krafteinwirkung zuerst die Borsten verformen ehe die Haftreibung eintritt. Dieser Effekt tritt auch auf, wenn an einem Steuerkolben eine Dichtung eingepresst ist.

Das LuGre Modell

Die Grundidee des LuGre Modells ist es, die beiden Oberflächen als Bürsten aufzufassen. Reibung wird in diesem Modell als mittlere Auslenkkraft einer elastischen Feder dargestellt. Wirkt eine tangentielle Kraft, so verformen sich die Borsten wie eine Feder bis die maximale Verformung erreicht ist und der Slip-Effekt eintritt. Außerdem wird die mittlere Deformation geschwindigkeitsabhängig modelliert, weil sich Verformungen „den Verlauf merken“. Je höher die Geschwindigkeit, desto geringer die Deformation. Im LuGre Modell wird die Reibkraftverzögerung aufgrund der Verformung der Borsten einer Bürste mit dem Stribeck Effekt kombiniert.

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) - \frac{|\dot{x}(t)|}{r(\dot{x}(t))} u(t) \quad (2.8)$$

$$F_R(t) = \sigma_0 u(t) + \sigma_1 \dot{u}(t) + \sigma_2 \dot{x}(t) \quad (2.9)$$

mit

$$r(\dot{x}(t)) = \frac{F_C}{\sigma_0} + \frac{F_S - F_C}{\sigma_0} \exp(-(\dot{x}(t)/v_S)^2) \quad (2.10)$$

wobei $F_C > 0$ die Coulombsche Reibkraft, F_S die Haftreibung und v_S die Stribeck Geschwindigkeit, also jene Geschwindigkeit bei welcher die stationäre Haftreibung (Beharrungszustand) abnimmt, sind. Die mittlere Verformung der Bürste ist u , x ist die relative Verschiebung des Steuerkolbens in Bezug auf das Gehäuse, F_R ist die Reibkraft und $\sigma_0, \sigma_1 > 0$ sind Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten. Der Koeffizient für die viskose (newtonsche) Reibkraft ist σ_2 , es gilt $\sigma_2 > 0$.

Bemerkung 2.6. *Durch Gleichung (2.10) wird der Stribeck Effekt im Modell berücksichtigt. Der geschwindigkeitsabhängige Term in (2.9) entspricht der viskosen Reibkraft. Des Weiteren können auch geschwindigkeitsabhängige Phänomene berücksichtigt werden, indem man entsprechende Funktionen für die Koeffizienten vorgibt. Solche Effekte sind beispielsweise variierende Losbrechkräfte oder Verzögerungen der Reibkraft.*

2.6.2 Strömungskräfte an einem Ventil

Dieser Abschnitt stammt aus [7], [17] und [2].

Strömungskräfte haben einen wesentlichen Einfluss auf das Ventilverhalten. Sie sind abhängig vom Durchfluss und der Geometrie des Ventils und wirken je nach Richtung entweder öffnend oder schließend.

Als erste Näherung können die statischen Strömungskräfte über folgende Beziehung, die sich aus dem Impulserhaltungssatz ableitet, berücksichtigt werden:

$$\vec{I} = m\vec{v} = \rho V\vec{v}$$

Die vektorielle Kraft erhält man durch Differentiation nach der Zeit:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \rho Q\vec{v}$$

Bei der Modellierung werden nur die axialen Kräfte am Steuerkolben berücksichtigt. Diese sind

$$F_{ax} = \rho Q v \cos \Theta \quad \text{mit} \quad v = \|\vec{v}\|_2 .$$

Einsetzen von $v = \frac{Q}{\alpha A}$ ergibt:

$$F_{ax} = \frac{\rho Q^2}{\alpha A} \cos \Theta ,$$

wobei der Ausströmwinkel Θ zwischen 21° und 69° je nach Ventilöffnung variiert. Er ist auch vom radialen Übermaß, d.h. die Höhe zwischen Steuerkolben und Gehäuse, abhängig.

Will man nur den wesentlichen Effekt der Strömungskräfte berücksichtigen, so kann man diese Kräfte proportional zum Volumenstrom annehmen,

$$F_{ax} = k Q \sqrt{|\Delta p|}$$

wobei k Ventil abhängig ist. Für Einkantenventile ist $k = 0.077$ eine gute Näherung. Bei Zweikantenventilen kann man $k = 0.054$ setzen.

Um die Dynamik des Ventils genau zu beschreiben reicht diese Näherung meist nicht aus, da die Axialkräfte am Ventil stark von seiner Geometrie abhängen. Möchte man Strömungskräfte möglichst genau abbilden, so empfiehlt es sich Messdaten zu hinterlegen oder sie mittels CFD² zu berechnen.

2.7 Die Gerotorpumpe

Im Folgenden verwende ich [24] und [7]. Dort werden vor allem die Geometrie der Pumpe, sowie ihre Funktionsweise beschrieben.

Bei der hier verwendeten Pumpe handelt es sich um eine Gerotorpumpe, eine Art Innenzahnradpumpe.

Funktionsweise

Der Innenrotor ist über einen Antriebsstrang mit dem Motor verbunden, wodurch dieser Rotor in Bewegung versetzt wird und den äußeren Rotor mit dreht. Die Pumpe erzeugt auf der Einlassseite einen Unterdruck, weil sich das Volumen zwischen den

²CFD: Computational Fluid Dynamics

beiden Rotoren (=Pumpenvolumen) in diesem Bereich vergrößert, wodurch Öl aus dem Tank angesaugt wird. Anschließend wird das Öl in der Pumpe komprimiert, weil Ein- und Auslass geschlossen sind und sich das Pumpenvolumen verkleinert. Auf der Auslassseite verringert sich das Pumpenvolumen kontinuierlich und das Öl wird aus der Pumpe gedrängt.

Aufgrund ihrer Bauart erzeugt die Pumpe einen ungleichförmigen Volumenstrom, der sich auf die Drücke im gesamten Hydraulikkreislauf auswirkt.

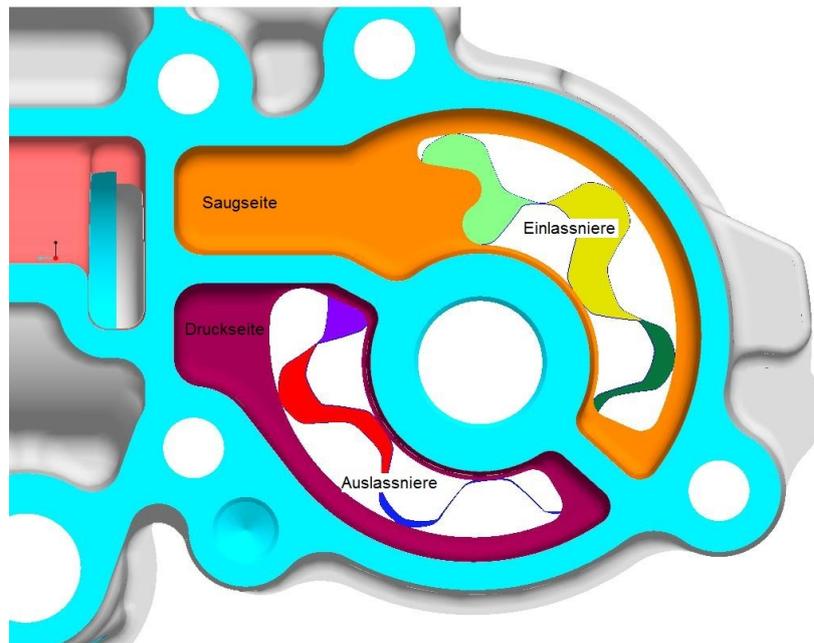


Abbildung 2.11: Gerotorpumpe mit Saug- und Druckkanalanschluss. Das Pumpenvolumen kann in 6 Kammervolumen unterteilt werden.

Geometrie

Die Gerotorpumpe basiert im Allgemeinen auf einer Trochoidenverzahnung, das bedeutet: der Innen- und der Außenrotor haben die Gestalt einer einfach geschlossenen Trochoide³. In der Praxis weichen sie allerdings von dieser geometrisch optimalen Form aufgrund von Fertigungstoleranzen minimal ab. Außerdem sind beispielsweise die Spitzen leicht gekappt, um die Funktionalität der Pumpe zu gewährleisten. Nichts desto trotz müssen die Zähne der Pumpe mit hoher Präzision gefertigt werden, um interne Leckageverluste gering zu halten.

Es gilt stets, dass der Außenrotor einen Zahn mehr als der Innenrotor besitzt. Die Mittelpunkte der beiden Trochoiden sind exzentrisch versetzt, so dass der Innenrotor den Außenrotor mit dreht. Die Rotoren sind von einem Gehäuse mit zwei Öffnungen, dem

³Trochoide: Joachim Erven, Dietrich Schwägerl: Mathematik für Ingenieure; 3. Auflage, 2008, Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH

Ein- und Auslass, umgeben. Diese beiden Öffnungen kann man als Blenden zwischen Leitung und Pumpenvolumen auffassen.

Die hier verwendete Pumpe hat eine 6:7 Verzahnung. Das bedeutet, während der Innenrotor eine vollständige Umdrehung macht, macht der Außenrotor eine $6/7$ Umdrehung. Geht man nun von zwei Trochoiden aus, deren Mittelpunkte um den vorgegebenen Abstand versetzt sind, so gibt es sechs Berührungspunkte von Innen- und Außenrotor, das heißt im optimalen Fall wird das Volumen zwischen den beiden Rotoren in sechs Teile unterteilt, wie Abbildung 2.11 zeigt.

Damit innerhalb der Pumpe Unterdruck an der Einlassseite und Überdruck an der Auslassseite erzeugt werden kann, muss das Pumpenvolumen durch die Zähne der Rotoren in sechs Teilvolumina unterteilt werden. Diese Tatsache kann man auch bei der Modellierung nicht vernachlässigen, d.h. man muss jedes der sechs Teilvolumen als eigenständiges Volumen sehen.

Nun betrachtet man eines dieser sechs Volumen (=Kammervolumen) während einer Drehung des Innenrotors, wobei die Ausgangsstellung der beiden Rotoren so gewählt wird, dass das zu betrachtende Volumen minimal ist. Zum besseren Verständnis der Arbeitsweise der Pumpe kann man sich die Pumpe als sechs zeitlich versetzte Kolbenpumpen vorstellen. Die Arbeitsweise einer Kolbenpumpe entspricht dabei der eines Kammervolumens, was in Abbildung 2.12 veranschaulicht werden soll.

Zu Beginn der Drehung vergrößert sich das Volumen und es hat stets eine Überschneidung mit der Einlassseite (Ansaugen), (a)-(d). Im maximalen Punkt (d) des Volumens schließt sich der Einlass. Das Volumen hat kurzzeitig keine Überschneidung mit der Saug- oder Druckseite, verringert sich jedoch (d)-(e), wodurch das Öl komprimiert wird und der Druck im Kammervolumen steigt (Druckaufbau). Während sich das Volumen weiter verkleinert (f), wird die Auslassseite überstrichen und Öl aus dem Kammervolumen gedrückt (Auslassen). In jenem Bereich, in dem das Volumen minimal wird, gibt es sogar eine Überschneidung des Kammervolumens mit Ein- und Auslass (a).

Für jeden der sechs Kammerdrücke gilt die Druckaufbaugleichung für ein veränderliches Volumen (2.7):

$$\dot{p}(t) = \frac{E_{isen}(p(t))}{V(t)} \left(\sum Q_i(t) - \dot{V}(t) \right)$$

Die Ein- und Auslassvolumenströme $Q_i(t)$ werden als Volumenströme über eine scharfkantige, variable Blende im turbulenten Fall (2.1) modelliert.

$$Q(t) = \alpha A(t) \operatorname{sgn}(\Delta p(t)) \sqrt{\frac{2|\Delta p(t)|}{\rho}}$$

Die Fläche $A(t)$ entspricht der Überschneidung der jeweiligen Kammer mit der Einlass- bzw. Auslassseite. Die Überschneidungsflächen sowie die Kammerfläche der Pumpe sind gemeinsam mit dem Kammervolumenstrom in Abbildung 2.13 dargestellt.

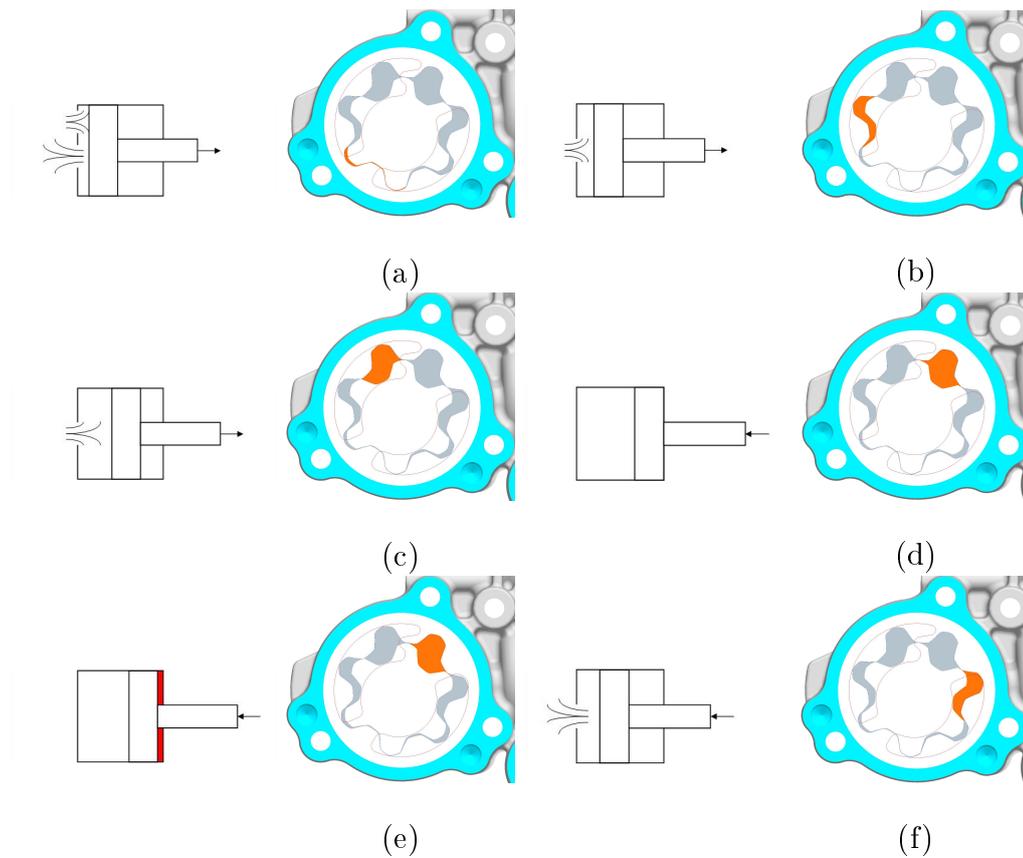


Abbildung 2.12: Intuitiv kann man sich die Gerotorpumpe als Kolbenpumpe mit sechs versetzten Kolben und veränderlichen Ein- und Auslassflächen vorstellen

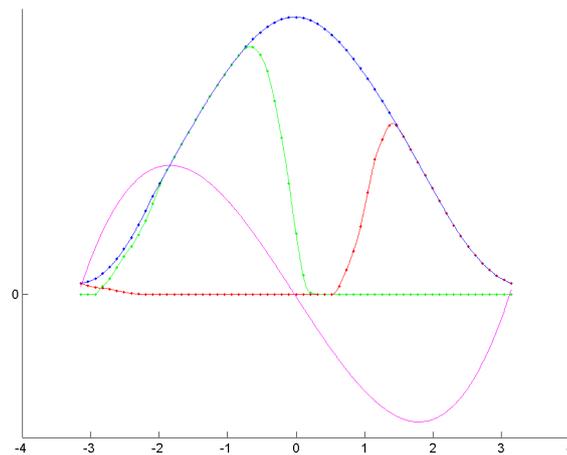


Abbildung 2.13: Abmessungen der Pumpe: Kammerfläche zwischen den beiden Rotoren (blau), Überschneidung mit der Einlassniete (grün), Überschneidung mit der Auslassniete (rot), Kammervolumenstrom (magenta)

Kapitel 3

Modellierung der Pumpe: Modell 1

Bevor der gegebene Kreislauf modelliert wird, wird ein Subproblem betrachtet. Es soll unter anderem dazu dienen, die Leckageparameter der Pumpe zu schätzen, beziehungsweise sie auf Messdaten abzustimmen.

3.1 Leckage der Pumpe

In der Pumpe gibt es zwei Stellen, an denen Leckage auftreten kann, wie Abbildung 3.1 zeigt. Es gibt einen Volumenstrom zwischen den Kammern und einen über die Rotorfläche von den Kammern retour zum Tank. Diese beiden Leckageströme können anhand der Messdaten nicht differenziert werden. Deshalb wird ein Gesamtvolumenstrom in Richtung Tank ins Modell eingebaut.

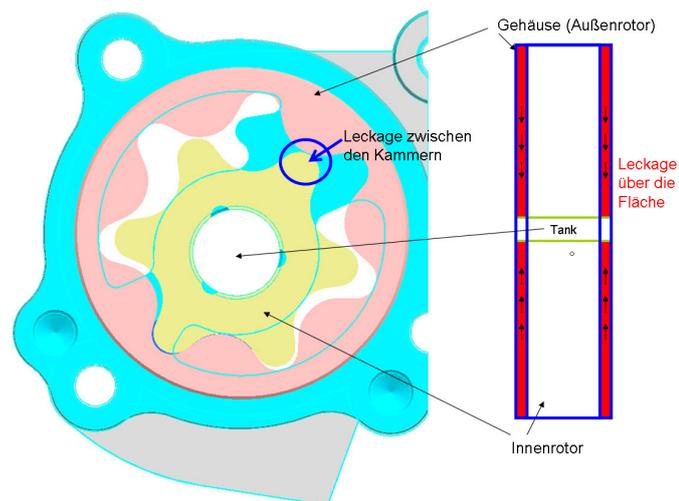


Abbildung 3.1: links: Leckage zwischen den Kammern, rechts: „Seitenansicht“, Leckage über den axialen Spalt zwischen Gehäuse und Innenrotor.

3.2 Prüfstandaufbau

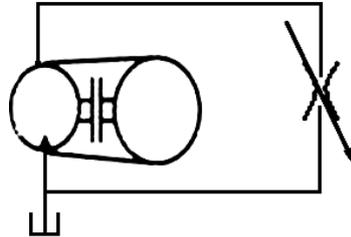


Abbildung 3.2: Schaltskizze des Prüfstandaufbaus ohne die Messgeräte. Dieser Kreislauf wird im mathematischen Modell abgebildet.

Die Gerotorpumpe saugt Öl aus dem Tank an und fördert es in eine Leitung. Diese ist durch eine verstellbare Blende vom Tank getrennt.

Der erste Schritt beim Aufbau eines mathematischen Modells ist es, den gegebenen hydraulischen Schaltkreislauf als Knotendiagramm darzustellen. Dabei gilt wie in Abschnitt 2.1 folgende Zuordnung:

Knoten	Verbindung
Leitungen	Blende
Kammervolumen der Pumpe	Ein- und Auslass der Pumpe
Tank	

Die Zustandsvariablen Volumen und Druck werden den Knoten zugeordnet und die Zustandsgröße Volumenstrom wird ihren Verbindungen zugeordnet. Abbildung 3.3 zeigt den entsprechenden Graphen zu obiger Schaltskizze 3.2.

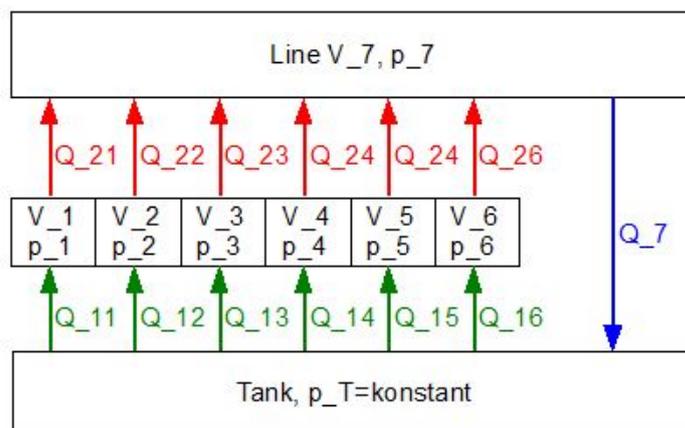


Abbildung 3.3: Knotendiagramm: Volumenstrom-Druck-Diagramm.

3.3 Das mathematische Modell

Für jeden Knoten in Abbildung 3.3 benötigt man zwei Gleichungen, eine für das Volumen und eine weitere für den Druck.

Der Zustand Druck wird mittels der Druckaufbaugleichung (2.7) beschrieben:

$$\dot{p}(t) = \frac{E_{isen}(p(t))}{V_0 + A x(t)} \left(\sum Q_i(t) - A \dot{x}(t) \right) .$$

Im Fall des ersten Knotens gibt es genau vier Volumenströme. Einen durch den Einlass der Pumpe in das Volumen und einen durch den Auslass der Pumpe aus dem Volumen. Zusätzlich werden die Leckverluste der Pumpe berücksichtigt. Deshalb treten ein linearer und ein quadratischer Volumenstrom in Richtung Tank auf.

Die in das Volumen zu- und abfließenden Volumenströme Q_{11} und Q_{21} sind Volumenströme durch den Ein- und Auslass der Pumpe. Sie werden als Volumenströme über eine scharfkantige Blende im turbulenten Fall modelliert, d.h. sie sind über folgende algebraische Volumenstrom-Druckdifferenz-Beziehung gegeben:

$$Q_{11}(t, p_T - p_1(t)) = \alpha A_{in}(\phi_1(t)) \operatorname{sgn}(p_T - p_1(t)) \sqrt{\frac{2 |p_T - p_1(t)|}{\rho}} \quad (3.1)$$

$$Q_{21}(t, p_1(t) - p_7(t)) = \alpha A_{out}(\phi_1(t)) \operatorname{sgn}(p_1(t) - p_7(t)) \sqrt{\frac{2 |p_1(t) - p_7(t)|}{\rho}} \quad (3.2)$$

Dabei ist p_T der Tankdruck, $p_7(t)$ der Druck in der Leitung nach der Pumpe, $A_{in}(\phi_1(t))$ die Überschneidungsfläche von Kammervolumen und Einlass, und $A_{out}(\phi_1(t))$ die Überschneidungsfläche von Kammervolumen und Auslass. Der, dem ersten Kammervolumen zugeordnete Druck ist $p_1(t)$. Die Winkelfunktion $\phi(t)$ beschreibt den Zusammenhang zwischen der Drehzahl der Pumpe u und dem vom Innenrotor der Pumpe überstrichenen Winkel.

Notation. Es wird folgende abkürzende Schreibweise verwendet:

$$\phi_i(t) = \phi(t) - (i - 1) \frac{\pi}{3} \text{ für } i = 1, \dots, 6, \text{ mit } \phi(t) = \operatorname{mod} \left(\frac{u\pi}{30} t, 2\pi \right) - \pi.$$

Die Volumenströme $l_1(p_1(t) - p_T)$ und $l_2 \operatorname{sgn}(p_1(t) - p_T)(p_1(t) - p_T)^2$ stellen die Leckageströme der Pumpe dar. Die beiden Faktoren l_1 und l_2 werden mit den Messdaten abgestimmt.

Bei dem Volumen handelt es sich um ein veränderliches Volumen, da der Knoten dem ersten Kammervolumen der Pumpe entspricht. Die Größe des Kammervolumens $V_1(t) = V_c(\phi_1(t))$ ist durch Daten über den Winkel des Innenrotors der Pumpe gegeben, welche in Abbildung 2.13 dargestellt sind.

Für den ersten Knoten gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 Q_i(t) &= Q_{11}(t, p_T - p_1(t)) - Q_{21}(t, p_1(t) - p_7(t)) \\ &\quad - l_1(p_1(t) - p_T) - l_2 \operatorname{sgn}(p_1(t) - p_T)(p_1(t) - p_T)^2 . \end{aligned}$$

Somit hat die Druckaufbaugleichung für den ersten Knoten, welchem die Zustände $p_1(t)$ und $V_1(t) = V_c(\phi_1(t))$ zugeordnet sind, folgende Gestalt:

$$\dot{p}_1(t) = \frac{E_{isen}(p_1(t))}{V_c(\phi_1(t))} \left[-\dot{V}_c(\phi_1(t)) + Q_{11}(t, p_T - p_1(t)) - Q_{21}(t, p_1(t) - p_7(t)) - l_1(p_1(t) - p_T) - l_2 \operatorname{sgn}(p_1(t) - p_T)(p_1(t) - p_T)^2 \right] . \quad (3.3)$$

Analog dazu erhält man die Druckaufbaugleichungen aller weiteren Kammervolumen der Pumpe:

$$\dot{p}_2(t) = \frac{E_{isen}(p_2(t))}{V_c(\phi_2(t))} \left[-\dot{V}_c(\phi_2(t)) + Q_{12}(t, p_T - p_2(t)) - Q_{22}(t, p_2(t) - p_7(t)) - l_1(p_2(t) - p_T) - l_2 \operatorname{sgn}(p_2(t) - p_T)(p_2(t) - p_T)^2 \right] \quad (3.4)$$

$$\dot{p}_3(t) = \frac{E_{isen}(p_3(t))}{V_c(\phi_3(t))} \left[-\dot{V}_c(\phi_3(t)) + Q_{13}(t, p_T - p_3(t)) - Q_{23}(t, p_3(t) - p_7(t)) - l_1(p_3(t) - p_T) - l_2 \operatorname{sgn}(p_3(t) - p_T)(p_3(t) - p_T)^2 \right] \quad (3.5)$$

$$\dot{p}_4(t) = \frac{E_{isen}(p_4(t))}{V_c(\phi_4(t))} \left[-\dot{V}_c(\phi_4(t)) + Q_{14}(t, p_T - p_4(t)) - Q_{24}(t, p_4(t) - p_7(t)) - l_1(p_4(t) - p_T) - l_2 \operatorname{sgn}(p_4(t) - p_T)(p_4(t) - p_T)^2 \right] \quad (3.6)$$

$$\dot{p}_5(t) = \frac{E_{isen}(p_5(t))}{V_c(\phi_5(t))} \left[-\dot{V}_c(\phi_5(t)) + Q_{15}(t, p_T - p_5(t)) - Q_{25}(t, p_5(t) - p_7(t)) - l_1(p_5(t) - p_T) - l_2 \operatorname{sgn}(p_5(t) - p_T)(p_5(t) - p_T)^2 \right] \quad (3.7)$$

$$\dot{p}_6(t) = \frac{E_{isen}(p_6(t))}{V_c(\phi_6(t))} \left[-\dot{V}_c(\phi_6(t)) + Q_{16}(t, p_T - p_6(t)) - Q_{26}(t, p_6(t) - p_7(t)) - l_1(p_6(t) - p_T) - l_2 \operatorname{sgn}(p_6(t) - p_T)(p_6(t) - p_T)^2 \right] \quad (3.8)$$

mit

$$Q_{1i}(t, \Delta p(t)) = \alpha A_{in}(\phi_i(t)) \operatorname{sgn}(\Delta p(t)) \sqrt{\frac{2 |\Delta p(t)|}{\rho}} \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.9)$$

$$Q_{2i}(t, \Delta p(t)) = \alpha A_{out}(\phi_i(t)) \operatorname{sgn}(\Delta p(t)) \sqrt{\frac{2 |\Delta p(t)|}{\rho}} \quad i = 1, \dots, 6 . \quad (3.10)$$

Für den Knoten, welcher dem Leitungsvolumen zwischen Pumpe und Tank zugeordnet ist, hat die Druckaufbaugleichung folgende Gestalt:

$$\dot{p}_7(t) = \frac{E_{isen}(p_7(t))}{V_{konstant}} \left[-Q_7(t, p_7(t) - p_T) + \sum_{i=1}^6 Q_{2i}(t, p_i(t) - p_7(t)) \right] \quad (3.11)$$

mit

$$Q_7(t, \Delta p(t)) = \alpha A_l \operatorname{sgn}(\Delta p(t)) \sqrt{\frac{2 |\Delta p(t)|}{\rho}}. \quad (3.12)$$

Da das Leitungsvolumen konstant ist, tritt hier keine Ableitung des Volumens auf.

Bemerkung 3.1. Die Messdaten enthalten nur Informationen über den Systemdruck und den entsprechenden Volumenstrom der Pumpe nicht aber über die Größe der Blende zwischen Systemdruck und Tankdruck. Um nun das Modell auf diese Daten abstimmen zu können, modelliert man die Blende als P-Regler, d.h. die Blendengröße $A_l(t)$ variiert und soll so eingestellt werden, dass der Systemdruck $p_7(t)$ gleich dem Sollwert p_{soll} ist. Das kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$\dot{A}_l(t) = k_p (p_7(t) - p_{\text{soll}})$$

Dabei gilt, je größer der Proportionalfaktor k_p , desto stärker die Änderung der Blendengröße. Da der Systemdruck aufgrund des ungleichförmigen Volumenstromes der Pumpe schwankt, darf man den Faktor nicht zu groß wählen, um zusätzliche Schwingungen aufgrund der variierenden Blende zu vermeiden.

Setzt man die explizit gegebenen Gleichungen für die Volumenströme direkt in die entsprechenden Druckaufbaugleichungen ein, so erhält man aus (3.3)-(3.12) folgendes gewöhnliches Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) = & \frac{E_{isen}(p_i(t))}{V_c(\phi_i(t))} \left[-\dot{V}_c(\phi_i(t)) \right. \\ & + \alpha A_{in}(\phi_i(t)) \operatorname{sgn}(p_T - p_i(t)) \sqrt{\frac{2 |p_T - p_i(t)|}{\rho}} \\ & - \alpha A_{out}(\phi_i(t)) \operatorname{sgn}(p_i(t) - p_7(t)) \sqrt{\frac{2 |p_i(t) - p_7(t)|}{\rho}} \\ & \left. - l_1(p_i(t) - p_T) - l_2 \operatorname{sgn}(p_i(t) - p_T)(p_i(t) - p_T)^2 \right] \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_7(t) = & \frac{E_{isen}(p_7(t))}{V_{konstant}} \left[-\alpha A_l \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_T) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_T|}{\rho}} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^6 \alpha A_{out}(\phi_j(t)) \operatorname{sgn}(p_j(t) - p_7(t)) \sqrt{\frac{2 |p_{j+4}(t) - p_7(t)|}{\rho}} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Anfangsbedingungen

Als Anfangswerte für die Drücke verwendet man den Atmosphärendruck, das bedeutet, man nimmt an, dass alle Druckniveaus zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgeglichen sind.

$$p_i(0) = p_T \quad i = 1, \dots, 7 \quad (3.15)$$

Setzt man

$$\begin{aligned} U(t) &:= (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t), p_5(t), p_6(t), p_7(t))^T \\ U(0) &:= U_0 := (p_T, p_T, p_T, p_T, p_T, p_T, p_T)^T \end{aligned}$$

so kann man das System abstrakt als

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= F(t, U(t)) \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

schreiben.

3.4 Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt verwende ich [5] und [15].

Der Satz von Peano liefert die Existenz einer Lösung zu obigem Anfangswertproblem eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Umgebung des Anfangswertes.

Satz 3.2 (Peano). $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei in einer Umgebung des Anfangswertes $U(0) = U_0$ stetig. Dann existiert um $U(0) = U_0$ eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= F(t, U(t)) & t \in (0, T) \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

Die stärkeren Bedingungen des Satzes von Picard-Lindelöf liefern die Existenz einer eindeutigen Lösung.

Satz 3.3 (Picard-Lindelöf). $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und stetig differenzierbar, oder schwächer, erfülle die Lipschitz-Bedingung mit $L > 0$:

$$\|F(t, w) - F(t, v)\| \leq L \|w - v\| \quad \forall t \in [0, T]; w, v \in \mathbb{R}^n$$

Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= F(t, U(t)) & t \in (0, T) \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $U(t) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 3.4. Falls für die Druckdifferenzen in den Druckaufbaugleichungen

$$\Delta p(t) \neq 0 \quad \forall t \tag{3.16}$$

gilt, so folgt lokal die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, da das System bis auf diese „Nulldurchläufe“ stetig differenzierbar ist.

Dass man (3.16) nicht garantieren kann, wird bereits aus der Funktionsweise der Pumpe intuitiv ersichtlich: Die Pumpe erzeugt in den Kammern auf der Einlassseite Unterdruck um anzusaugen. Auf der Auslassseite wird Überdruck erzeugt, um das Öl in das Volumen nach der Pumpe zu fördern. Somit kommt es stets zu diesen „Nulldurchläufen“ (Druckausgleich).

Es sei darauf hingewiesen, dass es Probleme ähnlicher Gestalt gibt, welche unendlich viele Lösungen besitzen. Eines dieser Beispiele ist folgendes Anfangswertproblem, welches aus [19] entnommen wurde:

$$y'(t) = 2\operatorname{sgn}(y(t))\sqrt{|y(t)|} \quad y(0) = 0 \quad (3.17)$$

Dieses Problem besitzt neben der trivialen Lösung

$$y(t) \equiv 0$$

unendlich viele weitere Lösungen der Form

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < c \\ (t - c)^2 & \text{falls } t \geq c \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < c \\ -(t - c)^2 & \text{falls } t \geq c \end{cases}$$

mit $c \geq 0$.

An dieser Stelle möchte ich bemerken, dass ich während der numerischen Experimente dies nicht beobachten konnte.

Kapitel 4

Modellierung des eigentlichen Problems: Modell 2

Mit Hilfe dieses Modells möchte man unter anderem abschätzen, wie ein Ventil auf Veränderungen reagiert.

4.1 Aufbau des hydraulischen Kreislaufes

Dieser Hydraulikkreislauf ist eine Erweiterung des zuvor diskutierten Problems. Der wesentliche Unterschied liegt darin, dass hier auch ein Ventil zum Einsatz kommt, weshalb ein beweglicher Steuerkolben auftritt.

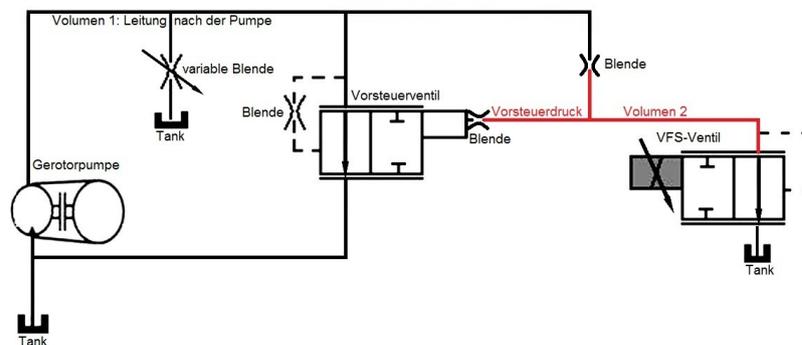


Abbildung 4.1: Schaltskizze des gegebenen Kreislaufes

Die Gerotorpumpe saugt Öl aus dem Tank an und fördert es in eine Leitung. Der Druck in dieser Leitung wird über ein Druckregelventil eingestellt. Das Öl kann außerdem noch über drei weitere Blenden abfließen. Eine trennt den Druck in der Leitung (Volumen 1) vom Vorsteuerdruck am Ventil (Volumen 2). Die variable Blende gegen Tank soll dazu dienen, das System bewusst zu stören. Die dritte Blende ist eine Rückkoppelung am Ventil, d.h. der Druck am Steuerkolben ist der über diese Blende rückgeführte Systemdruck.

Mittels eines „VFS“-Ventils¹ wird der Vorsteuerdruck eingestellt. Eine Blende trennt diesen Kontrolldruck vom tatsächlichen Druck am Ventil.

Bei dem hier verwendeten Druckregelventil handelt es sich um ein sogenanntes „normally closed“ Ventil, d.h. die Steuerkante des Ventils ist im Ruhezustand geschlossen. In diesem Fall drückt eine vorgespannte Feder das Ventil zu. Erst wenn sich genügend Druck in der Leitung aufgebaut hat, wird die Steuerkante geöffnet und das Öl gegen Tank abgelassen.

4.2 Das mathematische Problem

Mathematisch ist das Problem eine Erweiterung von Modell 1. Die Gleichungen der Pumpe bleiben unverändert, da die Pumpe nach wie vor vom Tank ansaugt und in eine Leitung mit Druck $p_7(t)$ fördert. Diese hat jetzt mehrere Anschlüsse, d.h. es gibt mehr Stellen, an denen ein Volumenstrom auftritt.

Außerdem werden noch zwei weitere Druckaufbaugleichungen für die Drücke p_8 und p_9 am Steuerkolben benötigt. Wenn der Steuerkolben des Ventils frei beweglich ist, kommen noch zwei weitere Differentialgleichungen hinzu. Diese sind das dynamische Kräftegleichgewicht am Steuerkolben und die Differentialgleichung für die mittlere Verformung der Dichtung, welche im Reibkraftmodell (LuGre Modell) auftritt.

Abbildung 4.2 zeigt das entsprechende Knotendiagramm.

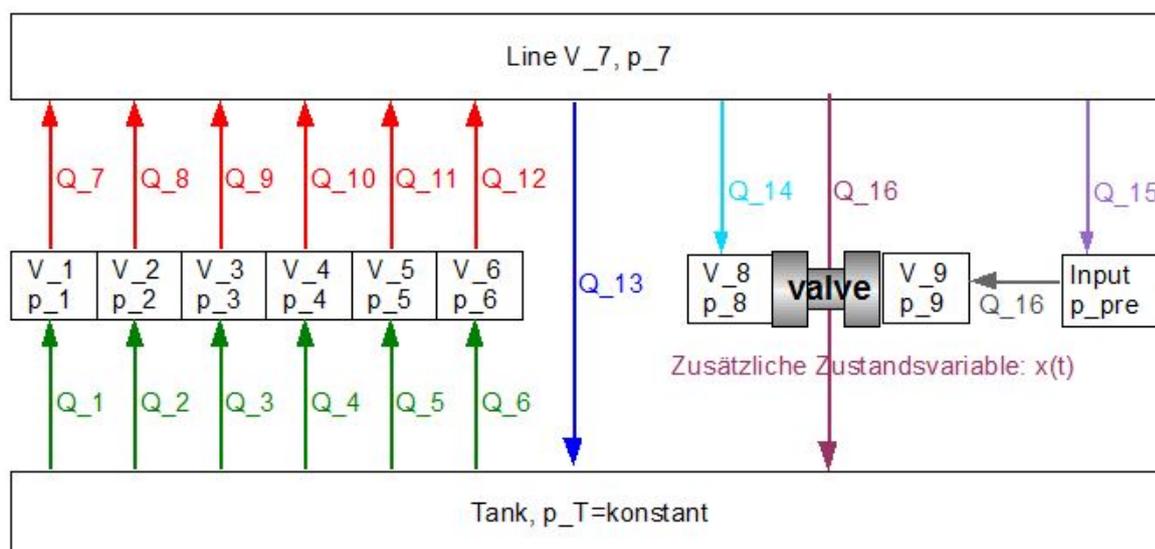


Abbildung 4.2: Knotendiagramm

¹VFS: Variable Force Solenoid

Bemerkung 4.1. *Im Folgenden wurden die algebraischen Gleichungen für die Zustände Volumen und Volumenstrom gleich in die Druckaufbaugleichungen eingesetzt.*

Die Form der Gleichungen, welche die Pumpe beschreiben, bleibt unverändert. Die Druckaufbaugleichungen der Kammerdrücke der Pumpe haben folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) = & \frac{E_{isen}(p_i(t))}{V_c(\phi_i(t))} \left[-\dot{V}_c(\phi_i(t)) \right. \\ & + \alpha A_{in}(\phi_i(t)) \operatorname{sgn}(p_T - p_i(t)) \sqrt{\frac{2 |p_T - p_i(t)|}{\rho}} \\ & \left. - \alpha A_{out}(\phi_i(t)) \operatorname{sgn}(p_i(t) - p_7(t)) \sqrt{\frac{2 |p_i(t) - p_7(t)|}{\rho}} - l(p_i(t), p_T) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

mit $i = 1, \dots, 6$. Dabei ist $l(p_i(t), p_T) = l_1(p_i(t) - p_T) + l_2 \operatorname{sgn}(p_i(t) - p_T)(p_i(t) - p_T)^2$ der Gesamtleckagestrom der Pumpe. Es wird erneut die Notation für die Winkelfunktion von Seite 25 verwendet.

Die Druckaufbaugleichung für den Systemdruck, also jenen Druck in der Leitung nach der Pumpe, ist durch

$$\begin{aligned} \dot{p}_7(t) = & \frac{E_{isen}(p_7(t))}{V_{m0}} \left[-\alpha A_T(t) \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_T) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_T|}{\rho}} \right. \\ & - \alpha A_{pre} \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_{pre}(t)) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_{pre}(t)|}{\rho}} \\ & - \alpha A_{ps} \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_8(t)) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_8(t)|}{\rho}} \\ & - \begin{cases} \alpha d_1 \pi (x_{open} - x(t)) \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_T) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_T|}{\rho}} & x_{max} \leq x(t) \leq x_{open} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ & \left. + \sum_{i=1}^6 \alpha A_{out}(\phi_i(t)) \operatorname{sgn}(p_i(t) - p_7(t)) \sqrt{\frac{2 |p_i(t) - p_7(t)|}{\rho}} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

gegeben.

Auch für die beiden Knoten (links und rechts) am Steuerkolben benötigt man eine Druckaufbaugleichung. Dabei handelt es sich um variable Volumen, welche sich mit der Verschiebung des Steuerkolbens ändern. In diesem Fall tritt in der Druckaufbau-

gleichung auch die Ableitung des Volumens auf.

$$\begin{aligned} \dot{p}_8(t) = & \frac{E_{isen}(p_8(t))}{V_8 + A_8(x_{01} - x(t))} [A_8\dot{x}(t) \\ & + \alpha A_{p_8} \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_8(t)) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_8(t)|}{\rho}}] \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_9(t) = & \frac{E_{isen}(p_9(t))}{V_9 - A_9(x_{01} - x(t))} [-A_9\dot{x}(t) \\ & - \alpha A_{p_9} \operatorname{sgn}(p_9(t) - p_{pre}(t)) \sqrt{\frac{2 |p_9(t) - p_{pre}(t)|}{\rho}}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Zusätzlich zu den Druckaufbaugleichungen kommt im Fall eines frei beweglichen Kolbens (siehe Abschnitt 2.5 Fall 1) das dynamische Kräftegleichgewicht, also eine weitere Differentialgleichung, hinzu:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m_1} [F_{left} - F_{right} - F_{friction}] \quad (4.5)$$

mit

$$\begin{aligned} F_{left} &= A_9 p_9(t) + (l_{max} - x(t)) c_{11} + F_{ax}(p_7(t), p_T) \\ F_{right} &= A_8 p_8(t) + A_{p_T, v} p_T \\ F_{friction} &= \sigma_2 \dot{x}(t) . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Wenn als Reibkraftmodell das LuGre Modell (vgl. Abschnitt 2.6.1) verwendet wird, gilt im Fall eines frei beweglichen Kolbens außerdem noch folgende Differentialgleichung:

$$\dot{u}(t) = x(t) - \frac{|x(t)|}{r(x(t))} u(t) \quad (4.7)$$

mit

$$r(x(t)) = \frac{F_C}{\sigma_0} + \frac{F_S - F_C}{\sigma_0} \exp(-(x(t)/v_S)^2) .$$

An Stelle einer rein viskosen Reibkraft (4.6) wird im LuGre Modell eine Mischreibung (4.8) angenommen.

$$F_{friction} = \sigma_0 u(t) + \sigma_1 \left[x(t) - \frac{|x(t)|}{r(x(t))} u(t) \right] + \sigma_2 x(t) \quad (4.8)$$

Wird der Kolben gegen einen der beiden Ventilansläge gedrückt (siehe Abschnitt 2.5 Fall 2), so ist seine Position konstant. Es gilt:

$$x(t) = x_{max}$$

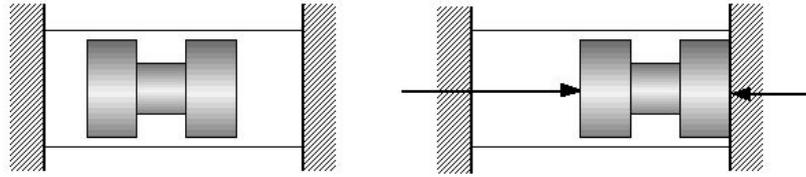


Abbildung 4.3: links: frei beweglicher Steuerkolben, rechts: Steuerkolben wird gegen den Ventilanschlag gedrückt

wenn der Kolben gegen den rechten Anschlag gedrückt wird und analog gilt

$$x(t) = x_{01}$$

für den linken Anschlag.

Abbildung 4.3 soll diese Fallunterscheidung veranschaulichen.

Die Fallunterscheidung bei der Modellierung des Steuerkolbens führt mathematisch auf zwei unterschiedliche Differentialgleichungssysteme:

1. System: Der Kolben ist frei beweglich. In diesem Fall gelten zusätzlich zu den Druckaufbaugleichungen (4.1)-(4.4) noch das dynamische Kräftegleichgewicht (4.5) und ggf. Gleichung (4.7).
2. System: Falls der Kolben gegen einen der beiden Ventilansträge gedrückt wird, gelten nur die Druckaufbaugleichungen (4.1)-(4.4).

Bemerkung 4.2. *Welches dieser beiden Systeme gilt, hängt sowohl von der Position als auch von den Kräften am Kolben ab.*

Das **ersten System** (4.1)-(4.5)(4.7), welches den Fall eines frei beweglichen Kolbens beschreibt, hat Ordnung zwei, da beim dynamischen Kräftegleichgewicht die Beschleunigung auftritt. Substituiert man,

$$\dot{x}(t) = w(t)$$

so erhält man ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) = & \frac{E_{isen}(p_i(t))}{V_c(\phi_i(t))} \left[-\dot{V}_c(\phi_i(t)) \right. \\ & + \alpha A_{in}(\phi_i(t)) \operatorname{sgn}(p_T - p_i(t)) \sqrt{\frac{2|p_T - p_i(t)|}{\rho}} \\ & \left. - \alpha A_{out}(\phi_i(t)) \operatorname{sgn}(p_i(t) - p_\tau(t)) \sqrt{\frac{2|p_i(t) - p_\tau(t)|}{\rho}} - l(p_i(t), p_T) \right] \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_7(t) &= \frac{E_{isen}(p_7(t))}{V_{m0}} \left[-\alpha A_T(t) \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_T) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_T|}{\rho}} \right. \\
&\quad - \alpha A_{pre} \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_{pre}(t)) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_{pre}(t)|}{\rho}} \\
&\quad - \alpha A_{p_8} \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_8(t)) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_8(t)|}{\rho}} \\
&\quad - \begin{cases} \alpha d_1 \pi(x_{open} - x(t)) \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_T) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_T|}{\rho}} & x_{max} \leq x(t) \leq x_{open} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^6 \alpha A_{out}(\phi_i(t)) \operatorname{sgn}(p_i(t) - p_7(t)) \sqrt{\frac{2 |p_i(t) - p_7(t)|}{\rho}} \right] \\
\dot{p}_8(t) &= \frac{E_{isen}(p_8(t))}{V_8 + A_8(x_{01} - x(t))} \left[A_8 w(t) + \alpha A_{p_8} \operatorname{sgn}(p_7(t) - p_8(t)) \sqrt{\frac{2 |p_7(t) - p_8(t)|}{\rho}} \right] \\
\dot{p}_9(t) &= \frac{E_{isen}(p_9(t))}{V_9 - A_9(x_{01} - x(t))} \left[-A_9 w(t) - \alpha A_{p_9} \operatorname{sgn}(p_9(t) - p_{pre}(t)) \sqrt{\frac{2 |p_9(t) - p_{pre}(t)|}{\rho}} \right] \\
\dot{x}(t) &= w(t) \\
\dot{w}(t) &= \frac{1}{m_1} [F_{left} - F_{right} - F_{friction}]
\end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned}
F_{left} &= A_9 p_9(t) + (l_{max} - x(t)) c_{11} + F_{ax}(p_7(t), p_T) \\
F_{right} &= A_8 p_8(t) + A_{p_T, v} p_T \\
F_{friction} &= \sigma_2 w(t)
\end{aligned}$$

bzw. alternativ unter Verwendung des LuGre Reibkraftmodelles an Stelle des Newtonschen Reibkraftmodelles:

$$\dot{u}(t) = x(t) - \frac{|x(t)|}{r(x(t))} u(t)$$

mit

$$\begin{aligned}
r(x(t)) &= \frac{F_C}{\sigma_0} + \frac{F_S - F_C}{\sigma_0} \exp(-(x(t)/v_S)^2) \\
F_{friction} &= \sigma_0 u(t) + \sigma_1 \left[x(t) - \frac{|x(t)|}{r(x(t))} u(t) \right] + \sigma_2 x(t)
\end{aligned}$$

Anfangsbedingungen

Zum Zeitpunkt $t = 0$ nimmt man an, dass alle Druckniveaus ausgeglichen sind. Deshalb werden die Drücke gleich dem Tankdruck, also dem Umgebungsdruck gesetzt. Bei dem Ventil handelt es sich um ein „normally closed“ Ventil. Das Ventil wird durch eine Feder gegen jenen Anschlag gedrückt, bei welchem seine Steuerkante geschlossen ist. Diese Position wird als Anfangsposition für den Ventilsteuerkolben angenommen. Der Systemzustand wird mathematisch durch System 1 beschrieben.

$$\begin{array}{lll} p_1(0) = p_T & p_2(0) = p_T & p_3(0) = p_T \\ p_4(0) = p_T & p_5(0) = p_T & p_6(0) = p_T \\ p_7(0) = p_T & p_8(0) = p_T & p_9(0) = p_T \end{array}$$

Bemerkung 4.3. *Die Umschaltzeitpunkte zwischen den einzelnen Systemen sowie die Anzahl der Systemwechsel sind nicht bekannt. Sie ergeben sich im Laufe der Simulation und werden durch die Kräfte am Kolben sowie seine Position bestimmt. Die entsprechenden Anfangsbedingungen bei einem Systemwechsel werden ebenfalls während der Simulation gesetzt, vgl. Abschnitt 7.*

Mit

$$\begin{aligned} U(t) &:= (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t), p_5(t), p_6(t), p_7(t), p_8(t), p_9(t))^T \\ U(0) = U_0 &:= (p_1(t_0), p_2(t_0), p_3(t_0), p_4(t_0), p_5(t_0), p_6(t_0), p_7(t_0), p_8(t_0), p_9(t_0))^T \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} U(t) &:= (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t), p_5(t), p_6(t), p_7(t), p_8(t), p_9(t), x(t), w(t))^T \\ U(0) = U_0 &:= (p_1(t_0), p_2(t_0), p_3(t_0), p_4(t_0), p_5(t_0), p_6(t_0), p_7(t_0), p_8(t_0), p_9(t_0), x(t_0), w(t_0))^T \end{aligned}$$

kann man beide Differentialgleichungssysteme kompakt schreiben als:

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= F(t, U(t)) \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

4.3 Existenz und Eindeutigkeit

Die Modellierung des eigentlichen Problems führt auf eine Sequenz von Differentialgleichungssystemen. Für jedes dieser Differentialgleichungssysteme gilt der Satz von Peano, also die Existenz einer Lösung ist gesichert. Bezüglich der Eindeutigkeit sei wieder auf Gleichung (3.17) hingewiesen.

Kapitel 5

Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Bei der Darstellung dieses Kapitels verwende ich [5], [6] und [15]. Sämtliche Definitionen, Sätze und Beweise stammen aus [5], [6], [15], [4] und [18].

Angenommen die Umschaltzeitpunkte zwischen den Systemen, welche sich bei der Modellierung des hydraulischen Schaltkreislaufes ergeben, sind bekannt. Dann ist jedes dieser Systeme ein Anfangswertproblem der Form:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f(t, u(t)) & t \in (0, T) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

5.1 Euler-Methode

Das Euler Verfahren geht zurück auf den Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783). Es ist das einfachste Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems der Form (5.1) und gehört zur Familie der Runge-Kutta Verfahren. Sei

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = T$$

eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ in eine Sequenz von Gitterpunkten.

Notation. :

- $\tau_j = t_{j+1} - t_j$ bezeichne die Schrittweite zwischen den Stützstellen t_j und t_{j+1} , d.h. $t_{j+1} = t_j + \tau_j$
- Der Vektor $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_{m-1})$ enthält alle Schrittweiten des Intervalls $[0, T]$
- $|\tau| = \max_{j=0,1,\dots,m-1} \tau_j$ bezeichne die maximale Schrittweite
- $I_\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ sei die Menge aller Gitterpunkte

Für $t \in [t_0, t_1]$ kann man den Funktionswert $u(t)$ wie folgt mittels Taylorentwicklung approximieren:

$$u(t) \approx u(t_0) + (t - t_0)u'(t_0) = u_0 + (t - t_0)f(t_0, u_0) = u_\tau(t)$$

Speziell gilt für die Approximation von $u(t_1)$:

$$u(t_1) \approx u(t_0) + (t_1 - t_0)u'(t_0) = u_0 + \tau_0 f(t_0, u_0) = u_\tau(t_1)$$

Analog kann man diese Approximation für $t \in [t_1, t_2]$ fortsetzen:

$$u(t) \approx u(t_1) + (t - t_1)u'(t_1) = u_1 + (t - t_1)f(t_1, u_1) = u_\tau(t)$$

Speziell gilt für die Approximation von $u(t_2)$:

$$u(t_2) \approx u(t_1) + (t_2 - t_1)u'(t_1) = u_1 + \tau_1 f(t_1, u_1) = u_\tau(t_2)$$

Führt man das für alle weiteren Teilintervalle fort, so erhält man eine Approximation $u_\tau(t)$ von $u(t)$. Diese Näherung wird auch als das Eulerpolygon bezeichnet. Es verbindet die Punkte (t_j, u_j) , welche durch folgenden Algorithmus, die Euler-Methode,

$$u_{j+1} = u_j + \tau_j f(t_j, u_j) \quad j = 0, 1, \dots, m - 1$$

gegeben sind.

Bemerkung 5.1. Hier wurde die Euler-Methode durch die Taylorentwicklung motiviert. Wenn man die Ableitung $\dot{u}(t_j)$ zum Zeitpunkt t_j mit dem Vorwärtsdifferenzenquotient ersetzt:

$$\dot{u}(t_j) \approx \frac{1}{\tau_j}(u(t_{j+1}) - u(t_j))$$

so erhält man die Euler-Methode als Finite Differenzen Methode (FDM):

$$\frac{1}{\tau_j}(u_{j+1} - u_j) = f(t_j, u_j) \quad j = 0, 1, \dots, m - 1$$

Man kann sie allerdings auch durch eine Quadraturformel motivieren. Integriert man die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))$$

über das Intervall $[t_j, t_j + \tau_j]$ und approximiert anschließend das Integral über die rechte Seite mit einer linksseitigen Rechtecksformel, so ergibt sich als Näherung von $u(t_j + \tau_j)$,

$$u(t_j + \tau_j) = u(t_j) + \int_{t_j}^{t_j + \tau_j} f(s, u(s)) ds \approx u(t_j) + \tau f(t_j, u(t_j))$$

was auf folgende Form der Euler-Methode führt:

$$u_{j+1} = u_j + \tau f(t_j, u_j) \quad j = 0, 1, \dots, m - 1$$

5.2 Runge-Kutta-Methoden

Wesentlich effizienter als das Euler Verfahren zum Lösen eines Anfangswertproblems der Form (5.1) sind Runge-Kutta-Methoden. Sie gehen zurück auf C. Runge (1856-1927) und M.W. Kutta (1867-1944).

Verwendet man anstelle der linksseitigen Rechtecksformel zur Approximation des Integrals eine genauere Quadraturformel, wie beispielsweise die Trapezregel, so erhält man:

$$u(t_{j+1}) = u(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, u(s)) ds$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, u(s)) ds \approx \frac{\tau_j}{2} [f(t_j, u(t_j)) + f(t_j + \tau_j, u(t_j + \tau_j))] \quad (5.2)$$

wobei der Wert von u an der Stelle $t_{j+1} = t_j + \tau_j$ nicht bekannt ist. Nähert man diesen anschließend durch eine linksseitige Rechtecksformel an,

$$u(t_{j+1}) = u(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, u(s)) ds$$

$$u(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, u(s)) ds \approx u(t_j) + \tau_j f(t_j, u(t_j))$$

so erhält man gemeinsam mit (5.2) eine zweistufige explizite Runge-Kutta-Methode:

$$g_1 = u_j$$

$$g_2 = u_j + \tau_j f(t_j, g_1)$$

$$u_{j+1} = u_j + \frac{\tau_j}{2} (f(t_j, g_1) + f(t_j + \tau_j, g_2))$$

An Stelle der Trapezregel können auch aufwendigere Quadraturformeln herangezogen werden, wie beispielsweise die Simpsonregel. Abhängig von der verwendeten Quadraturformel müssen unterschiedlich viele Zwischenschritte berechnet werden, weshalb man auch von einer „s-stufiger“ Runge-Kutta-Methode spricht. Dabei ist s die Anzahl der Zwischenschritte.

Definition 5.2. Sei s eine natürliche Zahl und seien $a_{i,j}$, b_i , c_i mit $i, j = 1, \dots, s$ reelle Koeffizienten. Dann bezeichnet man die Methode:

$$g_1 = u_j \tau [a_{s,1} f(t_0 + c_1 \tau, g_1) + a_{s,2} f(t_0 + c_2 \tau, g_2) + \dots + a_{s,s} f(t_0 + c_s \tau, g_s)]$$

$$g_2 = u_j + \tau [a_{s,1} f(t_0 + c_1 \tau, g_1) + a_{s,2} f(t_0 + c_2 \tau, g_2) + \dots + a_{s,s} f(t_0 + c_s \tau, g_s)]$$

$$g_3 = u_j + \tau [a_{s,1} f(t_0 + c_1 \tau, g_1) + a_{s,2} f(t_0 + c_2 \tau, g_2) + \dots + a_{s,s} f(t_0 + c_s \tau, g_s)]$$

$$\vdots$$

$$g_s = u_j + \tau [a_{s,1} f(t_0 + c_1 \tau, g_1) + a_{s,2} f(t_0 + c_2 \tau, g_2) + \dots + a_{s,s} f(t_0 + c_s \tau, g_s)]$$

$$u_{j+1} = u_j + \tau [b_1 f(t_0, g_1) + b_2 f(t_0 + c_2 \tau, g_2) + \dots + b_s f(t_0 + c_s \tau, g_s)]$$

als s -stufige Runge-Kutta-Methode.

Gilt: $c_1 = 0$ und $a_{i,j} = 0$ für $j \geq i$, so nennt man die Methode:

$$\begin{aligned} g_1 &= u_j \\ g_2 &= u_j + \tau a_{2,1} f(t_0, g_1) \\ g_3 &= u_j + \tau [a_{3,1} f(t_0, g_1) + a_{3,2} f(t_0 + c_2 \tau, g_2)] \\ &\vdots \\ g_s &= u_j + \tau [a_{s,1} f(t_0, g_1) + a_{s,2} f(t_0 + c_2 \tau, g_2) + \dots + a_{s,s-1} f(t_0 + c_{s-1} \tau, g_{s-1})] \\ u_{j+1} &= u_j + \tau [b_1 f(t_0, g_1) + b_2 f(t_0 + c_2 \tau, g_2) + \dots + b_s f(t_0 + c_s \tau, g_s)] \end{aligned}$$

s -stufige explizite Runge-Kutta-Methode.

Zur Lösung der in dieser Arbeit auftretenden Systeme wurden ausschließlich explizite Methoden verwendet, weil diese Methoden einfacher in der Durchführung sind.

Definition 5.3. Jene Tabelle, welche die Koeffizienten der s -stufigen Runge-Kutta-Methode $a_{i,j}$, b_i und c_i enthält, heißt Butcher Tabelle.

c_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	\dots	$a_{1,s-1}$	$a_{1,s}$	Kurz:	c	A
c_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	\dots	$a_{2,s-1}$	$a_{2,s}$			
\vdots	\vdots				\vdots			b^T
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	\dots	$a_{s,s-1}$	$a_{s,s}$			
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s			

Tabelle 5.1: Butcher Tabelle

Bemerkung 5.4. Bei expliziten Methoden setzt man meist zusätzlich $c_1 = 0$.

Bemerkung 5.5. Implizite Methoden haben bei steifen Differentialgleichungen ihre Vorteile gegenüber expliziten Methoden. Sie erfordern allerdings, im Allgemeinen, zur Berechnung der nächsten Näherung u_{j+1} das Lösen eines Gleichungssystems in Fixpunktform.

$$g = \Phi(g : t_j, u_j, \tau)$$

Bemerkung 5.6. Die Butcher Tabelle für die oben hergeleitete 2-stufige explizite Runge-Kutta-Methode unter Verwendung der Trapezregel ist in Tabelle 5.2 dargestellt. Tabelle 5.3 enthält die klassische 4-stufige explizite Runge-Kutta-Methode.

Sowohl bei expliziten als auch bei impliziten Runge-Kutta-Methoden ist zur Berechnung der nächsten Näherung u_{j+1} nur die letzte Approximation u_j notwendig.

0	0	0
1	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 5.2: Butcher Tabelle: 2-stufige RK-Methode mit Trapezregel

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
1	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{6}$		

Tabelle 5.3: Butcher Tabelle: 4-stufige RK-Methode

Definition 5.7. Eine Methode zum Lösen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) & t \in (t_0, T) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

heißt *Einschrittverfahren*, wenn es in folgender Form dargestellt werden kann:

$$u_{j+1} = u_j + \tau_j \phi(t_j, u_j, \tau_j) \quad (5.3)$$

Die Funktion $\phi(t_j, u_j, \tau_j)$ bezeichnet man als *Inkrement- (oder Verfahrens-) Funktion*.

Bemerkung 5.8. Runge-Kutta-Methoden sind Einschrittverfahren.

5.2.1 Lokaler und globaler Fehler von Runge-Kutta-Methoden

Das Ziel aller Näherungsverfahren ist es, bei klein genug gewählter Schrittweite einen möglichst kleinen Fehler zur exakten Lösung zu produzieren. Das bedeutet man möchte für den globalen Fehler,

$$e_\tau(t) = u(t) - u_\tau(t)$$

dass

$$\|e_\tau(t)\| \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.4)$$

für eine entsprechende Norm gilt.

Notation. Das zu betrachtende Intervall sei $I = [t_0, T]$. Die Approximation an der Stützstelle t_j wird mit u_j bezeichnet. $I_\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ sei die Menge aller Stützstellen. $X_\tau = \{v_\tau : I_\tau \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ sei in weiterer Folge die Menge aller Gitterfunktionen einer Zerlegung τ . Mit $u_\tau : I_\tau \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird jene Gitterfunktion bezeichnet, welche durch die Approximationen u_j bestimmt ist, d.h. es gilt $u_\tau(t_j) = u_j$.

Durch die Einführung der Gitterfunktionen kann man nun folgendermaßen eine Norm auf X_τ definieren:

Definition 5.9. Die Norm auf der Menge der Gitterfunktionen $\|\cdot\|_{X_\tau}$ ist definiert durch:

$$\|v_\tau\|_{X_\tau} = \max_{j=0,1,\dots,m} \|v_j\|$$

Der Diskretisierungsfehler $e_\tau(t)$ entsteht durch Fortpflanzung der einzelnen lokalen Fehler $d_\tau(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, m$ der verwendeten Methode, oder kurz gesprochen:

$$\text{Konvergenz} = \text{Konsistenz} + \text{Stabilität}$$

Konsistenzanalyse von Runge-Kutta-Methoden

Definition 5.10. Der lokale Fehler zum Zeitpunkt t_{j+1} ist,

$$d_\tau(t_{j+1}) = u(t_{j+1}) - [u(t_j) + \tau_j \phi(t_j, u(t_j), \tau_j)]$$

dabei ist ϕ die Inkrementfunktion aus (5.3).

Bemerkung 5.11. Es wird $d_\tau(t_0) = 0$ gesetzt. Im ersten Schritt ist der lokale Fehler gleich dem globalen Fehler.

Betrachtet man eine Runge-Kutta-Methode als Finite Differenzen Methode, so erhält man den Konsistenzfehler:

Definition 5.12. Der Konsistenzfehler zum Zeitpunkt t_{j+1} ist,

$$\Psi_\tau(t_{j+1}) = \frac{1}{\tau_j} (u(t_{j+1}) - u(t_j)) - \phi(t_j, u(t_j), \tau_j)$$

Bemerkung 5.13. Es wird $\Psi_\tau(t_0) = 0$ gesetzt.

Bemerkung 5.14. Für den lokalen Fehler und den Konsistenzfehler gilt folgender Zusammenhang:

$$\frac{1}{\tau_j} d_\tau(t_{j+1}) = \Psi_\tau(t_{j+1})$$

Definition 5.15. Ein Verfahren heißt konsistent, wenn

$$\|\Psi_\tau\|_{X_\tau} \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0$$

gilt.

Mittels Taylorreihenentwicklung kann man für die verschiedenen Runge-Kutta-Methoden ihre Konsistenzordnung herleiten.

Definition 5.16. Eine Methode wird konsistent mit Konsistenzordnung p ($p > 0$) genannt, wenn es eine Konstante $K > 0$ gibt, sodass

$$\|d_\tau\|_{X_\tau} \leq K\tau^{p+1} \quad \text{bzw.} \quad \|\Psi_\tau\|_{X_\tau} \leq K\tau^p$$

gilt.

Beispiel. Die Euler-Methode hat Konsistenzordnung 1.

Angenommen die Lösung sei genügend oft differenzierbar. Durch Taylorreihenentwicklung erhält man für den lokalen Fehler im j -ten Schritt:

$$\begin{aligned} d_\tau(t_{j+1}) &= u(t_{j+1}) - u(t_j) - \tau_j f(t_j, u(t_j)) \\ &= u(t_j) + u'(t_j)\tau_j + \underbrace{\frac{1}{2}u''(t_j)\tau_j^2}_{\text{führender Fehlerterm}} + R_3(t_j, \tau_j) - u(t_j) - \tau_j f(t_j, u(t_j)) \\ &= \underbrace{[u'(t_j) - f(t_j, u(t_j))]}_{=0} \tau_j + R_2(t_j, \tau_j) = R_2(t_j, \tau_j) = O(\tau^2) \end{aligned}$$

Das bedeutet, der lokale Fehler konvergiert wie τ^2 gegen 0 für $\tau \rightarrow 0$. Somit ist die Euler-Methode konsistent mit Konsistenzordnung 1.

Der folgende Satz liefert eine Minimalbedingung für die Konsistenz eines Einschrittverfahrens.

Satz 5.17. Sei f stetig. Ein Einschrittverfahren ist konsistent, wenn

$$\max_{j=0,1,\dots,m-1} \|\phi(t_j, u(t_j), \tau_j) - f(t_j, u(t_j))\| \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0$$

gilt.

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Darstellung des Konsistenzfehlers.

$$\Psi_\tau(t_{j+1}) = \frac{1}{\tau_j} (u(t_{j+1}) - u(t_j)) - \phi(t_j, u(t_j), \tau_j)$$

Da $u'(t_j) = f(t_j, u(t_j))$ gilt, folgt:

$$\Psi_\tau(t_{j+1}) = \frac{1}{\tau_j} (u(t_{j+1}) - u(t_j)) - u'(t_j) + f(t_j, u(t_j)) - \phi(t_j, u(t_j), \tau_j) .$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung:

$$\|\Psi_\tau(t_{j+1})\| \leq \underbrace{\left\| \frac{1}{\tau_j} (u(t_{j+1}) - u(t_j)) - u'(t_j) \right\|}_{\xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0} + \|f(t_j, u(t_j)) - \phi(t_j, u(t_j), \tau_j)\| .$$

□

Mit Satz 5.18 erhält man speziell die Konsistenz einer expliziten Runge-Kutta-Methode.

Satz 5.18. *Sei f stetig. Die explizite Runge-Kutta-Methode ist konsistent mit dem Anfangswertproblem, wenn*

$$\sum_{j=1}^1 b_j = 1$$

gilt.

Beweis. Zu zeigen ist:

$$\max_{j=0,1,\dots,m-1} \|\phi(t_j, u(t_j), \tau_j) - f(t_j, u(t_j))\| \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0$$

dann folgt die Behauptung aus Satz 5.17.

Für explizite Methoden gilt:

$$g_1 = u(t_j) .$$

Außerdem gilt für alle $1 \leq i \leq s$:

$$g_i = u_j + \tau [a_{i,1}f(t_j, g_1) + a_{i,2}f(t_j + c_2\tau, g_2) + \dots + a_{i,i-1}f(t_j + c_{i-1}\tau, g_{i-1})] \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} u(t_j) .$$

Somit gilt:

$$f(t_j + c_i\tau_j, g_i) \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} f(t_j, u(t_j)) .$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned} & \|\phi(t_j, u(t_j), \tau_j) - f(t_j, u(t_j))\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^s b_i f(t_j + c_i\tau_j, g_i) - f(t_j, u(t_j)) \right\| \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} \left\| \sum_{i=1}^s b_i f(t_j, u(t_j)) - f(t_j, u(t_j)) \right\| \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^s b_i f(t_j, u(t_j)) - f(t_j, u(t_j)) \right\| = \left\| \left(\sum_{i=1}^s b_i - 1 \right) f(t_j, u(t_j)) \right\| \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0$$

genau dann wenn:

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1 .$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 5.17. □

Bemerkung 5.19. *Um die Konsistenz einer impliziten Runge-Kutta-Methode zu erhalten, muss f in Satz 5.18 zusätzlich folgende Lipschitzbedingung mit Konstante L*

$$\|f(t, w) - f(t, v)\| \leq L \|w - v\| \quad \forall t, v, w$$

erfüllen.

Stabilitätsanalyse von Runge-Kutta-Methoden

Die verwendeten Verfahren sollten so sein, dass kleine Störungen in den Daten auch nur einen kleinen Fehler zwischen exakter und Näherungslösung produzieren. Dazu ist es notwendig zu untersuchen, wie sich Fehler y_τ ($y_\tau(t_j) = y_j$) fortpflanzen. Zuerst betrachtet man die Differenz $v_\tau - u_\tau$, wobei die Werte v_τ durch folgendes gestörtes Anfangswertproblem gegeben sind:

$$\frac{1}{\tau_j}(v_{j+1} - v_j) = \phi(t_j, v_j, \tau_j) + y_{j+1} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (5.5)$$

$$v_0 = u_0 + y_0$$

Kurz: $F_\tau(v_\tau) = y_\tau$

wobei die Abbildung $F_\tau : X_\tau \rightarrow X_\tau$ durch

$$F_\tau(v_\tau)(t_{j+1}) = \frac{1}{\tau_j}(v_{j+1} - v_j) - \phi(t_j, v_j, \tau_j) \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, m-1$$

$$F_\tau(v_\tau)(t_0) = v_0 - u_0$$

gegeben ist.

Definition 5.20. Ein Verfahren wird stabil genannt, falls es eine Konstante $C > 0$, die unabhängig von der Schrittweite τ ist, gibt, so dass folgende Abschätzung gilt:

$$\|u_\tau - v_\tau\|_{X_\tau} \leq C \|F_\tau(u_\tau) - F_\tau(v_\tau)\|_{X_\tau} \quad \forall \tau, v_\tau \in X_\tau \quad (5.6)$$

Der folgende Satz liefert die Stabilität allgemein für Einschrittverfahren.

Satz 5.21. Die Inkrementfunktion des Einschrittverfahrens erfülle folgende Lipschitzbedingung mit Konstante L :

$$\|\phi(t, w, \tau) - \phi(t, v, \tau)\| \leq L \|w - v\| \quad \forall t, v, w, \tau$$

Dann ist das Verfahren stabil und es gilt folgende Abschätzung:

$$\|v_j - u_j\| \leq \exp(L(t_j - t_0)) \|y_0\| + \frac{\exp(L(t_j - t_0)) - 1}{L} \max_{i=1,2,\dots,j} \|y_i\|$$

Beweis. Im ersten Schritt betrachtet man die Fortpflanzung eines Fehlers y_0 in den Anfangsdaten bis zu $v_j - u_j$. Man nimmt an, dass für alle $1 \leq i \leq j$ die y_i in Gleichung (5.5) gleich Null sind. Mit $v_j^0 - u_j$ wird die Fortpflanzung dieses Fehlers im „j-ten“ Schritt bezeichnet.

Die beiden Näherungen v_j^0 und u_j erhält man aus:

$$v_j^0 = v_{j-1}^0 + \tau_{j-1} \phi(t_{j-1}, v_{j-1}^0, \tau_{j-1}) \quad (5.7)$$

$$v(0) = u_0 + y_0 \quad (5.8)$$

und

$$u_j = u_{j-1} + \tau_{j-1} \phi(t_{j-1}, u_{j-1}, \tau_{j-1}) \quad (5.9)$$

$$u(0) = u_0 \quad (5.10)$$

Durch Subtraktion ergibt sich für die Störung $v_j^0 - u_j$:

$$\begin{aligned} v_j^0 - u_j &= v_{j-1}^0 - u_{j-1} + \tau_{j-1} [\phi(t_{j-1}, v_{j-1}^0, \tau_{j-1}) - \phi(t_{j-1}, u_{j-1}, \tau_{j-1})] \\ v_0 - u_0 &= y_0 \end{aligned}$$

Nun zeigt man mittels Induktion, dass für die Fortpflanzung des Fehlers y_0

$$\|v_j^0 - u_j\| \leq \exp(L(t_j - t_0)) \|y_0\| \quad (5.11)$$

gilt.

Induktionsannahme: $j = 0$

$$\begin{aligned} \|v_1^0 - u_1\| &= \|v_0^0 - u_0 + \tau_0 [\phi(t_0, v_0^0, \tau_0) - \phi(t_0, u_0, \tau_0)]\| \\ &\stackrel{(a)}{\leq} \|v_0^0 - u_0\| + \tau_0 \|\phi(t_0, v_0^0, \tau_0) - \phi(t_0, u_0, \tau_0)\| \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \|v_0^0 - u_0\| + \tau_0 L \|v_0^0 - u_0\| \\ &= (1 + \tau_0 L) \|v_0^0 - u_0\| \\ &\stackrel{(c)}{\leq} \exp(L\tau_0) \|y_0\| \quad \tau_0 = t_1 - t_0 \\ &= \exp(L(t_1 - t_0)) \|y_0\| \end{aligned}$$

Dabei wurde in (a) die Dreiecksungleichung und in (b) die Lipschitz Stetigkeit der Inkrementfunktion verwendet. In (c) wurde verwendet, dass

$$1 + \tau_0 L \leq \exp(L\tau_0) \quad (5.12)$$

gilt.

Induktionshypothese (I.H.): Für $i \leq j - 1$ gilt:

$$\|v_{j-1}^0 - u_{j-1}\| \leq \exp(L(t_{j-1} - t_0)) \|y_0\|$$

Induktionsschritt: $j - 1 \rightarrow j$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung (a), der Lipschitz Stetigkeit der Inkrementfunktion (b), sowie (5.12) in Schritt (c) und schließlich der Induktionshypothese (I.H.) kann

man die Behauptung zeigen.

$$\begin{aligned}
\|v_j^0 - u_j\| &= \|v_{j-1}^0 - u_{j-1} + \tau_{j-1}[\phi(t_{j-1}, v_{j-1}^0, \tau_{j-1}) - \phi(t_{j-1}, u_{j-1}, \tau_{j-1})]\| \\
&\stackrel{(a)}{\leq} \|v_{j-1}^0 - u_{j-1}\| + \tau_{j-1} \|\phi(t_{j-1}, v_{j-1}^0, \tau_{j-1}) - \phi(t_{j-1}, u_{j-1}, \tau_{j-1})\| \\
&\stackrel{(b)}{\leq} \|v_{j-1}^0 - u_{j-1}\| + \tau_{j-1} L \|v_{j-1}^0 - u_{j-1}\| \\
&= (1 + \tau_{j-1} L) \|v_{j-1}^0 - u_{j-1}\| \\
&\stackrel{(c)}{\leq} \exp(L\tau_{j-1}) \|v_{j-1}^0 - u_{j-1}\| \qquad \tau_{j-1} = t_j - t_{j-1} \\
&\stackrel{\text{I.H.}}{\leq} \exp(L(t_j - t_0)) \|y_0\|
\end{aligned}$$

Analog erhält man die Fortpflanzung des lokalen Fehlers y_1 bis zu $u_j - v_j$. Diese Entwicklung der Störung ist $v_j^1 - v_j^0$, wobei v_j^1 durch die Einschrittmethode

$$\begin{aligned}
v_{j+1}^1 &= v_j^1 + \tau_j \phi(t_j, v_j^1, \tau_j) & j = 1, 2, \dots, m-1 \\
v_1^1 &= v_1
\end{aligned}$$

gegeben ist.

Entsprechend zur Herleitung der Abschätzung (5.11) erhält man mittels Induktion folgende Abschätzung für die Fortpflanzung des lokalen Fehlers y_1 bis zu $u_j - v_j$:

$$\|v_j^1 - v_j^0\| \leq \exp(L(t_j - t_1)) \|v_1^1 - v_1^0\| \leq \exp(L(t_j - t_1)) \tau_0 \|y_1\| .$$

Allgemein erhält man für die Entwicklung eines Fehlers y_i :

$$\|v_j^i - v_j^{i-1}\| \leq \exp(L(t_j - t_i)) \tau_{i-1} \|y_i\|$$

Dabei ist v_j^i durch folgende Einschrittmethode gegeben:

$$\begin{aligned}
v_{j+1}^i &= v_j^i + \tau_j \phi(t_j, v_j^i, \tau_j) & j = i, i+1, \dots, m-1 \\
v_1^i &= v_i
\end{aligned}$$

Der globale Fehler im „j-ten“ Schritt kann wie folgt aufgeteilt werden:

$$v_j - u_j = (v_j^j - v_j^{j-1}) + (v_j^{j-1} - v_j^{j-2}) + \dots + (v_j^1 - v_j^0) + (v_j^0 - u_j)$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der einzelnen Normabschätzungen von oben,

erhält man schließlich folgende Abschätzung für den globalen Fehler:

$$\begin{aligned}
\|v_j - u_j\| &= \|(v_j^j - v_j^{j-1}) + (v_j^{j-1} - v_j^{j-2}) + \dots + (v_j^1 - v_j^0) + (v_j^0 - u_j)\| \\
&\leq \|v_j^j - v_j^{j-1}\| + \|v_j^{j-1} - v_j^{j-2}\| + \dots + \|v_j^1 - v_j^0\| + \|v_j^0 - u_j\| \\
&\leq \tau_{j-1} \|y_j\| + \exp(L(t_j - t_{j-1}))\tau_{j-2} \|y_{j-1}\| + \exp(L(t_j - t_{j-2}))\tau_{j-3} \|y_{j-2}\| \\
&\quad + \dots + \exp(L(t_j - t_1))\tau_0 \|y_1\| + \exp(L(t_j - t_0)) \|y_0\| \\
&\leq [\tau_{j-1} + \exp(L(t_j - t_{j-1}))\tau_{j-2} + \exp(L(t_j - t_{j-2}))\tau_{j-3} + \dots + \exp(L(t_j - t_1))\tau_0] \\
&\quad \max_{i=1,2,\dots,j} \|y_i\| + \exp(L(t_j - t_0)) \|y_0\| \\
&\leq \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \exp(L(t_j - s)) ds + \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} \exp(L(t_j - s)) ds + \dots + \int_{t_0}^{t_1} \exp(L(t_j - s)) ds \right] \\
&\quad \max_{i=1,2,\dots,j} \|y_i\| + \exp(L(t_j - t_0)) \|y_0\| \\
&= \frac{1}{L} [-1 + \exp(L(t_j - t_{j-1})) - \exp(L(t_j - t_{j-1})) + \exp(L(t_j - t_{j-2})) \\
&\quad + \dots - \exp(L(t_j - t_1)) + \exp(L(t_j - t_0))] \max_{i=1,2,\dots,j} \|y_i\| + \exp(L(t_j - t_0)) \|y_0\| \\
&= \frac{1}{L} (\exp(L(t_j - t_0)) - 1) \max_{i=1,2,\dots,j} \|y_i\| + \exp(L(t_j - t_0)) \|y_0\|
\end{aligned}$$

Für die Stabilität des Verfahrens muss man die Abschätzung (5.6) zeigen. Diese folgt sofort indem man $y_\tau = F_\tau(v_\tau)$ setzt:

$$\max_{j=0,1,\dots,m} \|v_j - u_j\| \leq C \max_{j=0,1,\dots,m} \|y_j\| \quad \text{mit } C = \frac{1}{L} (\exp(L(t_j - t_0)) - 1) + \exp(L(t_j - t_0))$$

□

Satz 5.22. Sei f stetig und erfülle die Lipschitzbedingung mit Konstante L

$$\|f(t, w) - f(t, v)\| \leq L \|w - v\| \quad \forall t, v, w$$

Dann sind alle Runge-Kutta-Methoden stabil.

Beweis. Seien v und w fix.

Zu zeigen:

$$\|\phi(t, w, \tau) - \phi(t, v, \tau)\| \leq L \|w - v\| \quad \forall t, v, w \quad \forall \tau \text{ hinreichend klein.}$$

dann folgt die Behauptung mit Theorem 5.21.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|\phi(t, w, \tau) - \phi(t, v, \tau)\| &= \left\| \sum_{i=1}^s b_i f(t + c_i \tau, g_i(t, w, \tau)) - b_i f(t + c_i \tau, g_i(t, v, \tau)) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^s b_i [f(t + c_i \tau, g_i(t, w, \tau)) - f(t + c_i \tau, g_i(t, v, \tau))] \right\|
\end{aligned}$$

Mittels Dreiecksungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^s b_i f(t + c_i \tau, g_i(t, w, \tau)) - b_i f(t + c_i \tau, g_i(t, v, \tau)) \right\| \\ & \leq \sum_{i=1}^s |b_i| \|f(t + c_i \tau, g_i(t, w, \tau)) - f(t + c_i \tau, g_i(t, v, \tau))\| \end{aligned}$$

Da f Lipschitz stetig ist, gilt:

$$\sum_{i=1}^s |b_i| \|f(t + c_i \tau, g_i(t, w, \tau)) - f(t + c_i \tau, g_i(t, v, \tau))\| \leq \sum_{i=1}^s |b_i| L \|g_i(t, w, \tau) - g_i(t, v, \tau)\|$$

Seien b , g^1 und g^2 folgende Vektoren: $b = (b_i)_{i=1}^s$, $g^1 = (g_i(t, v, \tau))_{i=1}^s$ und $g^2 = (g_i(t, w, \tau))_{i=1}^s$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^s |b_i| L \|g_i(t, v, \tau) - g_i(t, w, \tau)\| \leq \|b\|_1 L \|g^1 - g^2\|$$

Mit $\|b\|_1 = \sum_{i=1}^s |b_i|$ wird die Betragssummennorm bezeichnet.

Weil

$$\begin{aligned} g_i(t, v, \tau) - g_i(t, w, \tau) &= w - v \\ &+ \tau [a_{i,1}(f(t + c_0 \tau, g_1(t, v, \tau)) - f(t + c_0 \tau, g_1(t, w, \tau))) \\ &+ a_{i,2}(f(t + c_1 \tau, g_2(t, v, \tau)) - f(t + c_1 \tau, g_2(t, w, \tau))) \\ &+ \dots \\ &+ a_{i,s}(f(t + c_s \tau, g_s(t, v, \tau)) - f(t + c_s \tau, g_s(t, w, \tau)))] \end{aligned}$$

gilt, kann die rechte Seite unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der Lipschitz Stetigkeit von f folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\|g^2 - g^1\| \leq \|w - v\| + \tau L \|A\|_\infty \|g^2 - g^1\|$$

wobei $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^s |a_{ij}|$ die Zeilenbetragssummennorm der Matrix A ist. Umformen nach $\|g^2 - g^1\|$ ergibt:

$$\|g^2 - g^1\| \leq \frac{1}{1 - \tau L \|A\|_\infty} \|w - v\| .$$

Somit erhält man:

$$\|\phi(t, w, \tau) - \phi(t, v, \tau)\| \leq \frac{\|b\|_1 L}{1 - \tau L \|A\|_\infty} \|w - v\| .$$

□

Konvergenz

Definition 5.23. Eine Methode heißt konvergent, falls

$$\|e_\tau\|_{X_\tau} \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0$$

gilt.

Satz 5.24. Wenn ein Einschrittverfahren stabil und konsistent mit Ordnung p ist, dann ist das Verfahren konvergent mit Konvergenzordnung p .

Beweis. Der globale Fehler nach dem j -ten Schritt ist:

$$e_\tau(t_j) = u(t_j) - u_j$$

Im Folgenden bezeichne $R_\tau u$ die Einschränkung der exakten Lösung u auf die Gitterstellen, $R_\tau u = u|_{I_\tau}$. Dann gilt für die Einschränkung

$$F_\tau(R_\tau u) = \Psi_\tau(u)$$

und für die Approximierte u_τ

$$F_\tau(u_\tau) = 0$$

Für den globalen Fehler gilt dann:

$$\|e_\tau\|_{X_\tau} = \|u(t) - u_\tau\|_{X_\tau} = \|R_\tau u - u_\tau\|_{X_\tau} \stackrel{\text{Stabilität}}{\leq} C_S \|\Psi_\tau(u)\|_{X_\tau} \stackrel{\text{Konsistenz}}{\xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0}} 0$$

Aus der Konsistenzordnung folgt die Konvergenzordnung

$$\|e_\tau\|_{X_\tau} \stackrel{\text{Stabilität}}{\leq} C_S \|\Psi_\tau(u)\|_{X_\tau} \stackrel{\text{Konsistenz}}{\leq} C_S C_K |\tau|^p$$

□

Satz 5.25. Sei f stetig und erfülle die Lipschitzbedingung mit Konstante L

$$\|f(t, w) - f(t, v)\| \leq L \|w - v\| \quad \forall t, v, w$$

Wenn für die Koeffizienten b

$$\sum_{j=1} b_j = 1$$

gilt, dann ist die Runge-Kutta-Methode konvergent.

Beweis. Aus Satz 5.18 und 5.22 erhält man Konsistenz und Stabilität. Somit sind die Voraussetzungen von Satz 5.24 erfüllt, wodurch die Aussage folgt. □

Der folgende Satz gibt Bedingungen an, wann eine s -stufigen Runge-Kutta-Methode Ordnung p hat.

Satz 5.26. (*Butcher*)

Wenn folgende Bedingungen

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^s b_i c_i^{k-1} &= \frac{1}{k} & k = 1, \dots, p \\
 \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{k-1} &= \frac{c_i^k}{k} & i = 1, \dots, s \quad k = 1, \dots, q \\
 \sum_{i=1}^s b_i c_i^{k-1} a_{ij} &= \frac{b_j}{k} (1 - c_j^k) & j = 1, \dots, s \quad k = 1, \dots, r \\
 c_i &= \sum_j a_{ij} &
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

erfüllt sind mit $p \leq q + r + 1$, $p \leq 2q + 2$, dann hat die Methode Ordnung p .

Kapitel 6

Schrittweitensteuerung

Diese Kapitel richtet sich nach [6] und [15].

Wenn man mit einer fixen Schrittweite rechnet, wählt man diese so, dass in jedem Schritt die gewünschte Genauigkeit eingehalten wird. In manchen Schritten würde auch eine größere Schrittweite die gewünschte Präzision liefern, d.h. mit einer fixen Schrittweite werden unnötig viele Schritte berechnet, was die Rechenzeit negativ beeinflusst.

Die Wahl einer geeigneten Schrittweite trägt damit wesentlich zur Effizienz eines Einzschrittverfahrens bei. Die Idee der variablen Schrittweitenkontrolle ist es, in jedem Schritt die größtmögliche Schrittweite zu verwenden, welche den lokalen Fehler innerhalb einer vorgegebenen Toleranz hält.

6.1 Richardson Extrapolation

Die Richardson Methode ist eine sehr allgemeine Methode zum Schätzen des lokalen Fehlers im nächsten Schritt.

Ausgehend vom Anfangswert (t_0, u_0) berechnet man zunächst zwei Approximationen u_1 und u_2 mit vorgegebener Schrittweite τ . Anschließend startet man erneut bei (t_0, u_0) und führt einen Schritt derselben Runge-Kutta-Methode mit doppelter Schrittweite 2τ durch. Dadurch erhält man eine weitere Approximation w . Nun betrachtet man die beiden Fehler $u(t_0 + 2\tau) - u_2$ und $u(t_0 + 2\tau) - w$:

Der Fehler $u(t_0 + 2\tau) - u_2$ ergibt sich durch die lokalen Fehler der beiden Approximationen u_1 und u_2 und durch die Fortpflanzung des lokalen Fehlers aus dem ersten Schritt:

- Der lokale Fehler e_1 im ersten Schritt ist:

$$e_1 = u(t_0 + \tau) - u_1 = c(t_0, u_0)\tau^{p+1} + O(\tau^{p+2})$$

wobei p die Ordnung der Runge-Kutta-Methode ist.

- Die Fortpflanzung $u(t_0 + 2\tau) - u^{(1)}(t_0 + 2\tau)$ des lokalen Fehlers e_1 , wobei $u^{(1)}(t)$ die exakte Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert $u^{(1)}(t_0 + \tau) = u_1$

ist, berechnet sich wie folgt:

$$u(t_0 + 2\tau) - u^{(1)}(t_0 + 2\tau) = e_1 + O(\tau \|e_1\|) = C(t_0, u_0)\tau^{p+1} + O(\tau^{p+2})$$

- Den lokale Fehler $u^{(1)}(t_0 + 2\tau) - u_2$ im zweiten Schritt hält man analog zu jenem aus dem ersten Schritt:

$$u^{(1)}(t_0 + 2\tau) - u_2 = C(t_0 + \tau, u_1)\tau^{p+1} + O(\tau^{p+2}) = C(t_0, u_0)\tau^{p+1} + O(\tau^{p+2})$$

Somit gilt für den Fehler nach zwei Schritten:

$$u(t_0 + 2\tau) - u_2 = 2C(t_0, u_0)\tau^{p+1} + O(\tau^{p+2}) \quad (6.1)$$

Die Berechnung der Approximation w führt zu folgendem lokalen Fehler:

$$u(t_0 + 2\tau) - w = C(t_0, u_0)(2\tau)^{p+1} + O(\tau^{p+2}) \quad (6.2)$$

Nun kann man aus (6.1) und (6.2) die Konstante $C(t_0, u_0)$ eliminieren:

$$\begin{aligned} \frac{u(t_0 + 2\tau) - u_2}{2\tau^{p+1}} + O(\tau^{p+2}) &= \frac{u(t_0 + 2\tau) - w}{(2\tau)^{p+1}} \\ (u(t_0 + 2\tau) - u_2)2^p + O(\tau^{p+2}) &= u(t_0 + 2\tau) - w \\ u(t_0 + 2\tau)(2^p - 1) &= 2^p u_2 - w + O(\tau^{p+2}) \\ u(t_0 + 2\tau) &= \frac{2^p u_2 - w}{2^p - 1} + O(\tau^{p+2}) \\ u(t_0 + 2\tau) &= \hat{y} + O(\tau^{p+2}) \quad \hat{y} = u_2 + \frac{u_2 - w}{2^p - 1} \end{aligned}$$

Der extrapolierte Wert \hat{y} ist eine bessere Näherung der Ordnung $p + 1$. Zusammengefasst gilt:

Satz 6.1. *Sei u_2 die Approximation aus zwei Schritten einer Runge-Kutta-Methode mit Ordnung p und Schrittweite τ und sei w das Ergebnis nach einem Schritt mit Schrittweite 2τ . Dann gilt für den Fehler von u_2 :*

$$u(t_0 + 2\tau) - u_2 = \frac{u_2 - w}{2^p - 1} + O(\tau^{p+2}) \quad (6.3)$$

$$\hat{y} = u_2 + \frac{u_2 - w}{2^p - 1} \quad (6.4)$$

und \hat{y} ist eine Näherung der Ordnung $p + 1$ für $u(t_0 + 2\tau)$.

Aus (6.3) erhält man folgenden Schätzwert für den lokalen Fehler,

$$err = \frac{1}{2^p - 1} \max_{i=1, \dots, n} \frac{|u_{2,i} - w_i|}{d_i} \quad (6.5)$$

wobei d_i ein Skalierungsfaktor ist. Abhängig davon ob man den absoluten oder den relativen Fehler schätzen möchte, setzt man $d_i = 1$ oder $d_i = |\hat{y}_{2,i}|$. Man kann aber auch eine gemischte Skalierung verwenden $d_i = \max(|\hat{y}_{2,i}|, |u_{0,i}|, 1)$.

Bemerkung 6.2. *Der Vorteil der Richardson Methode ist, dass sie allgemein angewandt werden kann. Sie ist eine einfache Methode den lokalen Fehler zu schätzen. Allerdings müssen in jedem Schritt drei Approximationen berechnet werden, was ein klarer Nachteil gegenüber anderen Methoden, wie beispielsweise den in Abschnitt 6.2 besprochenen eingebetteten Runge-Kutta-Methoden, ist.*

6.2 Eingebettete Runge-Kutta-Methoden

Ein Schritt einer eingebetteten Runge-Kutta-Methode ist gegenüber der Richardson Methode wesentlich günstiger. Die Grundidee dieser Methode ist es, zwei Runge-Kutta-Methoden unterschiedlicher Ordnung zu verwenden. Berechnet man die erste Näherung u_1 mit einer Methode der Ordnung p , so gilt für den lokalen Fehler:

$$u(t_0 + \tau) - u_1 = O(\tau^{p+1})$$

Für den lokalen Fehler der zweiten Approximation \hat{u}_1 , welche durch Verwendung einer Methode der Ordnung $q > p$ berechnet wird, gilt:

$$u(t_0 + \tau) - \hat{u}_1 = O(\tau^{q+1})$$

Nachdem $q > p$ gilt, folgt

$$u(t_0 + \tau) - u_1 = \hat{u}_1 - u_1 + O(\tau^{q+1})$$

was auf folgenden Schätzer für den lokalen Fehler führt:

$$err = \max_{i=1, \dots, n} \frac{|\hat{u}_{1,i} - u_{1,i}|}{d_i} \quad (6.6)$$

Damit die Berechnungskosten gering gehalten werden, verwendet man zwei Runge-Kutta-Methoden mit gleichen Koeffizienten c und A , die sich nur im Vektor b unterscheiden.

Definition 6.3. *Ein Paar von Runge-Kutta-Methoden, deren Koeffizienten sich nur im Vektor b unterscheiden, nennt man eingebettete Runge-Kutta-Methoden.*

Die beiden approximierten Lösungen u_1 und \hat{u}_1 ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} g_1 &= u_0 \\ g_2 &= u_0 + \tau a_{2,1} f(t_0, g_1) \\ g_3 &= u_0 + \tau [a_{3,1} f(t_0, g_1) + a_{3,2} f(t_0 + c_2 \tau, g_2)] \\ &\vdots \\ g_s &= u_0 + \tau [a_{s,1} f(t_0, g_1) + a_{s,2} f(t_0 + c_2 \tau, g_2) + \dots + a_{s,s-1} f(t_0 + c_{s-1} \tau, g_{s-1})] \\ u_1 &= u_0 + \tau [b_1 f(t_0, g_1) + b_2 f(t_0 + c_2 \tau, g_2) + \dots + b_s f(t_0 + c_s \tau, g_s)] \\ \hat{u}_1 &= u_0 + \tau [\hat{b}_1 f(t_0, g_1) + b_2 f(t_0 + c_2 \tau, g_2) + \dots + \hat{b}_s f(t_0 + c_s \tau, g_s)] \end{aligned}$$

Bemerkung 6.4. Die Butcher Tabelle für eine explizite eingebettete Runge-Kutta-Methode hat folgende Gestalt:

$c_1 = 0$	0	0	0	...	0
c_2	$a_{2,1}$	0	0	...	0
c_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	0	...	0
\vdots	\vdots		\ddots	\ddots	\vdots
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$...	$a_{s,s-1}$	0
	b_1	b_2	...	b_{s-1}	b_s
	\hat{b}_1	\hat{b}_2	...	\hat{b}_{s-1}	\hat{b}_s

Tabelle 6.1: Butcher Tabelle: eingebettete Runge-Kutta-Methode

Bemerkung 6.5. Meist werden Methoden der Ordnung p und $q = p + 1$ verwendet.

Bemerkung 6.6. Der einzige Mehraufwand bei eingebetteten Runge-Kutta-Methoden ist die zusätzliche Berechnung der Approximierten \hat{u}_1 , d.h. die g_i müssen nur einmal berechnet werden.

Notation. Die Abkürzung einer Methode als $p(q)$ bedeutet, dass die Basismethode der eingebetteten Runge-Kutta-Methode Ordnung p hat und die zweite Methode von der Ordnung q ist.

Beispiel. Herleitung der Runge-Kutta-Fehlberg Methode 2(3):

Die Bedingungen für eine Methode der Ordnung 2 sind:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \quad (6.7)$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2} \quad (6.8)$$

und jene für eine Methode dritter Ordnung sind:

$$\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 = 1 \quad (6.9)$$

$$\hat{b}_2 c_2 + \hat{b}_3 c_3 = \frac{1}{2} \quad (6.10)$$

$$\hat{b}_2 c_2^2 + \hat{b}_3 c_3^2 = \frac{1}{3} \quad (6.11)$$

$$\hat{b}_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6} \quad (6.12)$$

Wählt man nun $c_2 = 1$, $c_3 = \frac{1}{2}$ und $b_3 = 0$ so folgt aus (6.8) $b_2 = \frac{1}{2}$ und dadurch aus (6.7) $b_1 = \frac{1}{2}$. Des Weiteren erhält man aus (6.10) und (6.11) $\hat{b}_3 = \frac{4}{6}$ und $\hat{b}_2 = \frac{1}{6}$. Schließlich folgen aus (6.9) und (6.12) $\hat{b}_1 = \frac{1}{6}$ und $a_{32} = \frac{1}{4}$. Die restlichen Koeffizienten der Matrix A ergeben sich aus der Bedingung 5.13:

0	0	0	0	
1	1	0	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	Trapezregel
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	Simpsonregel

Tabelle 6.2: Eingebettete Runge-Kutta-Methode 2(3)

Zur Simulation wurde zusätzlich folgende eingebettete Runge-Kutta-Methode verwendet:

0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	0
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	2	0
	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	2	0
	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Tabelle 6.3: Eingebettete Runge-Kutta-Methode Merson 4(5)

6.3 Automatische Schrittweitensteuerung

Man erhält sowohl durch die eingebettete Runge-Kutta-Methode als auch durch die Richardson Methode einen Schätzwert err für den Fehler im nächsten Schritt. Das Ziel einer Schrittweitensteuerung ist es, eine optimale Schrittweite unter der Bedingung, dass der lokale Fehler einer vorgegebenen Toleranz tol genügt, zu finden.

Angenommen ein Schätzer err des lokalen Fehlers sei gegeben und erfüllt:

$$err = C\tau^{p+1} \quad (6.13)$$

Die Forderung nach einer Schrittweite τ_{neu} , welche einen lokalen Fehler unterhalb der vorgegebenen Toleranzgrenze tol produziert, führt auf folgende Bedingung:

$$tol = C\tau_{neu}^{p+1} \quad (6.14)$$

Eliminiert man aus (6.13) und (6.14) die Konstante C , so erhält man folgende Gleichung zur Berechnung der neuen Schrittweite:

$$\tau_{neu} = \tau \left(\frac{tol}{err} \right)^{\frac{1}{p+1}} \quad (6.15)$$

Motiviert durch Gleichung (6.15) kann man nun folgendermaßen bei der Konstruktion einer automatischen Schrittweitenwahl vorgehen:

- Zuerst wird ein Schritt mit einer vorgegebenen Anfangsschrittweite τ sowie der zugehörige Schätzer err des lokalen Fehlers berechnet.
- Gilt $err \leq tol$, so wird dieser Schritt akzeptiert. Als Lösung verwendet man entweder u_2 oder den lokal extrapolierten Wert \hat{y} (unter Verwendung der Richardson Methode) bzw. u_1 oder \hat{u}_1 (im Falle einer eingebettete Runge-Kutta-Methode). Anschließend wird die Methode mit der neuen Schrittweite τ_{neu} , die sich aus Gleichung (6.15) berechnen lässt, fortgesetzt.
- Ist der Fehler größer als die Toleranz, so wird der Schritt verworfen und mit der neuen Schrittweite τ_{neu} aus (6.15) wiederholt.

Bemerkung 6.7. *Um die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, dass der neue Schritt akzeptiert wird, also der lokale Fehler im nächsten Schritt unterhalb der Toleranzgrenze liegt, reduziert man die neue Schrittweite durch Multiplikation der Gleichung (6.15) mit einem Sicherheitsfaktor fac . Typischer Weise wird $fac = 0.8$ oder $fac = 0.9$ gesetzt. Die modifizierte Formel für die neue Schrittweite hat dann folgende Form:*

$$\tau_{neu} = \tau fac \left(\frac{tol}{err} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

Will man die Robustheit der automatischen Schrittweitenwahl erhöhen, so ist es sinnvoll, dramatische Änderungen der Schrittweite zu verbieten. Das kann man durch Einführung weiterer Sicherheitsfaktoren $facmin$ und $facmax$, welche die maximale Verkleinerung bzw. die maximale Vergrößerung beschränken, erreichen. Die neue optimale Schrittweite berechnet sich dann aus:

$$\tau_{neu} = \tau \min \left(facmax, \max \left(facmin, fac \left(\frac{tol}{err} \right)^{\frac{1}{p+1}} \right) \right)$$

Häufig wird der Faktor $facmax$ zwischen 1.5 und 5 gewählt. Des Weiteren empfiehlt es sich nach einem verworfenen Schritt einmalig $facmax = 1$ zu setzen.

Kapitel 7

Numerische Methode zur Behandlung der Sequenz von Differentialgleichungssystemen

Der gegebene hydraulische Kreislauf wird mathematisch durch zwei unterschiedliche Differentialgleichungssysteme beschrieben:

1. System: Zusätzlich zu den Druckaufbaugleichungen (4.1)-(4.4) gelten das Kräftegleichgewicht (4.5) und ggf. die Differentialgleichung des Reibkraftmodells (4.7).

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f_1(t, u(t)) & t \in (t_0, T) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

2. System: Es gelten nur die Druckaufbaugleichungen (4.1)-(4.4), also die Position des Kolbens ist konstant.

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= f_2(t, v(t)) & t \in (t_0, T) \\ v(t_0) &= v_0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Zu Beginn der Simulation muss eine Ausgangssituation festgelegt werden und die entsprechenden Anfangsbedingungen müssen gesetzt werden. Der Endzeitpunkt des Systems ist nicht bekannt. Darüber entscheiden die Kräfte am Kolben, sowie seine Position. Strategisch kann man dies über entsprechende Monitoringfunktionen realisieren: Startet man beispielsweise mit System 2, d.h. der Kolben wird gegen einen Anschlag gedrückt,

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= f_2(t, v(t)) & t \in (t_0, T) \\ v(t_0) &= v_0 \end{aligned}$$

so gilt dieses System solange, solange $t < T$ ist und für die Monitoringfunktion g_1 gilt:

$$g_1 = F_{\text{gegen}} - F_{\text{rueck}} > 0 .$$

Dabei ist F_{gegen} die Kraft, welche den Kolben gegen den Anschlag drückt und F_{rueck} ist die rücktreibende Kraft, also jene, welche den Kolben vom Anschlag weg drückt. Wenn die Monitoringfunktion zum Zeitpunkt p_1 kleiner gleich Null ist ($g_1 \leq 0$), kommt es zu einem Systemwechsel,

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f_1(t, u(t)) & t \in (p_1, T) \\ u(p_1) &= u_0 \end{aligned}$$

wobei der Anfangsvektor u_0 die adaptierte Approximierte von $v(p_1)$ ist. Erneut ist der Endzeitpunkt des Systems nicht bekannt. Solange für die Monitoringfunktion g_2 gilt:

$$g_2 = (x_{01} - x(t))(x(t) - x_{max}) > 0$$

oder

$$g_2 = 0 \text{ und } g_1 \leq 0$$

ist der Kolben frei beweglich, vgl. Abschnitt 2.5. Dabei sind x_{01} und x_{max} die beiden Ventilansschläge.

Allgemein ergibt sich somit eine Sequenz von Differentialgleichungssystemen,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \text{System(7.1)} & \text{System(7.2)} & \text{System(7.1)} & \text{System(7.2)} & \dots \\ t_0 & p_1 & p_2 & p_3 & T \end{array}$$

von der weder die Anzahl der Systemwechsel noch die Umschaltzeitpunkte p_1, p_2, \dots zu Beginn der Simulation bekannt sind. Darüber entscheiden die Monitoringfunktionen g_1 und g_2 während der Simulation.

Kommt es zu einem Systemwechsel, so muss der Anfangsvektor wie folgt angepasst werden:

- Wechsel von System 2 auf System 1: Hier muss eine Anfangsbedingung für Position und Geschwindigkeit gesetzt werden:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{01} \text{ oder } x(t) = x_{max} \\ w(t) &= 0 \end{aligned}$$

- Wechsel von System 1 auf System 2: Die Komponenten Position und Geschwindigkeit müssen gestrichen werden.

Strategie

Eine Hilfsvariable *system*, die durch Kräfte- und Positionsmonitoring gesetzt wird, bestimmt, welches System aktiv ist. In jedem Schritt unterscheidet man folgende zwei Fälle:

1. Fall (*system* = 1): Der Kolben ist frei beweglich, d.h. System 1 ist aktiv. In diesem Fall wird die Verschiebung der nächste Näherung u_{j+1} durch das dynamische Kräftegleichgewicht berechnet. Anschließend muss überprüft werden, ob die Position des Steuerkolbens zulässig ist. Dabei können folgende Fälle auftreten:

- Fall 1a: Der Kolben nimmt nach wie vor keine Zwangsposition ein. Das dynamische Kräftegleichgewicht bleibt weiter aktiv.
 - Fall 1b: Der Kolben schlägt im Anschlag an oder die approximierte Position befindet sich außerhalb der Grenzen. Sollte dieser Fall eintreten, so wird das dynamische Kräftegleichgewicht deaktiviert, d.h. $system = 2$. Die nächste Näherung \tilde{u}_{j+1} erhält man durch Interpolation zwischen den beiden Approximationen u_j und u_{j+1} .
2. Fall ($system = 2$): Der Kolben wird gegen einen Ventilanschlag gedrückt, d.h. es gilt System 2. Bevor die nächste Näherung berechnet wird, werden die Kräfte am Kolben ermittelt. Erneut müssen zwei Fälle unterschieden werden:
- Fall 2a: Das Kräftemonitoring ergibt, dass der Kolben nach wie vor gegen den Anschlag gedrückt wird. Es findet somit kein Systemwechsel statt.
 - Fall 2b: Ist die Kraft, welche den Kolben gegen den Anschlag drückt kleiner gleich ihrer Gegenkraft, so wird das dynamische Kräftegleichgewicht aktiviert ($system = 1$) und die nächste Näherung berechnet.

Kapitel 8

Numerische Resultate

Zur Lösung von Modell 1, (3.13)-(3.15), kann man sowohl eine fixe als auch eine variable Schrittweite verwenden. Bereits aus der Theorie dieser Methoden ist ersichtlich, dass eine Schrittweitensteuerung mit eingebetteter Runge-Kutta-Methode hier am besten geeignet ist:

Das Problem einer fixen Schrittweite ist, dass eine extrem kleine Schrittweite nötig ist, um ein genaues Ergebnis zu erhalten. Verkleinert man die Schrittweite, so steigt die Rechenzeit extrem stark an. Ein weiterer Nachteil ist, dass bei Verwendung einer fixen Schrittweite der Anwender bereits zu Beginn der Simulation die Schrittweite richtig festlegen muss. Darum wird eine automatische Schrittweitensteuerung einer fixen Schrittweite vorgezogen.

Zum Schätzen des lokalen Fehlers wurden hier die Richardson Methode und die eingebetteten Runge-Kutta-Methoden vorgestellt. Die Richardson Methode ist eine sehr allgemeine Methode, da sie für jede beliebige Runge-Kutta-Methode anwendbar ist. Ein Schritt dieser Schrittweitensteuerung ist allerdings sehr kostspielig, weil zum Schätzen des lokalen Fehlers drei Funktionsauswertungen notwendig sind. Somit beeinflusst auch das Verwerfen eines Schrittes die Rechenzeit stark.

Eingebettete Runge-Kutta Methoden liefern in jedem Schritt eine Schrittweite und einen lokalen Fehler unterhalb der Toleranz und sind gegenüber der Richardson Methode effizienter, weshalb auch diese zur Lösung von Modell 1 verwendet wurden.

Im Folgenden wird die eigenständig implementierte automatische Schrittweitensteuerung mit eingebetteter Runge-Kutta-Methode anhand von Modell 1, (3.13)-(3.15), getestet und mit der Matlab Routine `ode23` verglichen.

Umdrehungen u	3000	Temperatur $Temp$	80
Tank-/Atmosphärendruck $p_T = p_0$	101325	Dichte ρ	836
lin. Leckageparameter l_1	9e-12	qu. Leckageparameter l_2	2e-17
Durchflusskoeffizient α	0.6	Luftanteil im Öl pro	5
Kompressionsmodul reines Öl E_{oel}	1.317e9	Isentropenexponent γ	1.402

Tabelle 8.1: Parametersatz

In Tabelle 8.1 sind sämtliche Eingangsgrößen des Modells aufgelistet. Die Butcher Tabelle der verwendeten eingebetteten Runge-Kutta-Methode 2(3) ist in Tabelle 8.2 dargestellt.

0	0	0	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

Tabelle 8.2: Eingebettete Runge-Kutta-Methode 2(3)

Tabelle 8.3 enthält die Parameter der numerischen Methode.

Eingebettete RK $p(q)$	2(3)	Anfangsschrittweite τ	1e-5
Simulationszeit T	1 sec	Toleranz tol	1e-3
Sicherheitsfaktor (Schrittweite) fac	0.8		

Tabelle 8.3: Parameter: automatische Schrittweitensteuerung, eingebettete Runge-Kutta-Methode

In Tabelle 8.4 wurden die wesentlichen Ergebnisse gegenüber gestellt.

	RK 2(3)	Matlab ode23
Funktionsauswertungen	134 996	341 059
Schritte	108 860	106 384
Verworfenne Schritte	26 136	7 302

Tabelle 8.4: Gegenüberstellung der eingebettete RK 2(3) und Matlab Routine ode 23

Bemerkung 8.1. *Zur Lösung von Modell 1 können in Matlab implementierte Standardtools verwendet werden. Die eigenständig programmierte automatische Schrittweitensteuerung unter Verwendung einer eingebetteten Runge-Kutta-Methode 2(3) ist in Bezug auf Funktionsauswertungen wesentlich effizienter als die Matlab Routine ode23, welche für die Berechnung eines Schrittes drei Funktionsauswertungen benötigt. Dafür müssen bei ode23 weniger Schritte verworfen werden. Alles in allem kann man sagen, dass die eigenständige Implementierung mit der Matlab Routine vergleichbar ist, weshalb auch diese zur Lösung von Problem 2 verwendet wurde.*

Abbildung 8.1 zeigt einen typischen Output für Modell 1. Als Eingangsdaten für das Modell wurden die Werte aus Tabelle 8.1 verwendet.

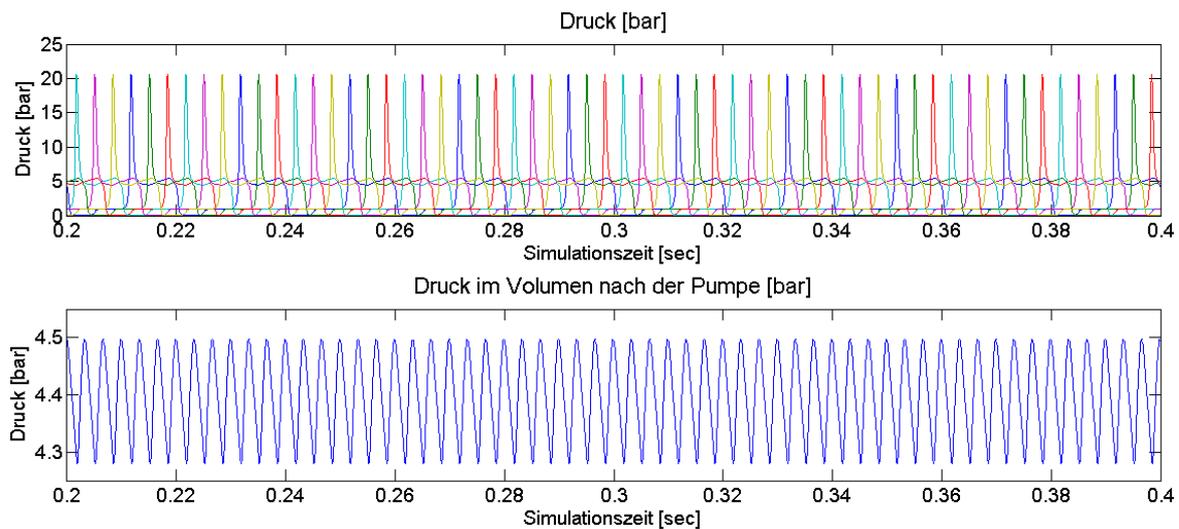


Abbildung 8.1: Typischer Output für Modell 1; Oben: Überlagerung der sechs Drücke in den Kammervolumen, unten: Druck in der Leitung nach der Pumpe

In Abbildung 8.2 ist die entsprechende Schrittweite zum Output aus Abbildung 8.1 dargestellt. Grundsätzlich variiert sie nicht zu stark, wenn das System eingeschwungen ist.

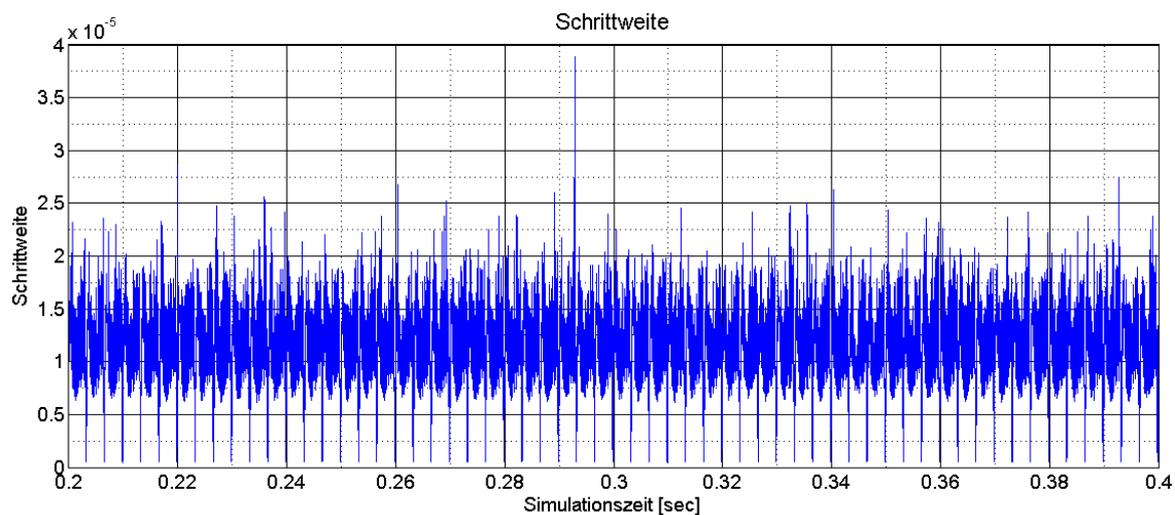


Abbildung 8.2: Schrittweite zu obigem Output

Kapitel 9

Sensitivitätsanalyse

In diesem Kapitel wird das Verhalten des hydraulischen Kreislaufes untersucht. Betrachtet wurden die Reaktion des Steuerkolbens auf Änderungen des Vorsteuerdruckes und ihre Folgen für den gesamten Kreislauf, sowie der Einfluss von Luft im Öl und die Auswirkungen der Größe der beiden Blenden am Ventil.

Die Parameter der verwendeten numerischen Methode sind in Tabelle 9.1 aufgelistet.

Eingebettete RK	2(3)	Anfangsschrittweite	1e-5
Simulationszeit	1.3 sec	Toleranz	1e-2
Sicherheitsfaktor (Schrittweite)	0.8		

Tabelle 9.1: Parameter: automatische Schrittweitensteuerung, eingebettete Runge-Kutta-Methode

9.1 Änderung des Vorsteuerdruckes am Ventil

Da der Systemdruck über das Ventil eingestellt wird, ist es wichtig zu wissen, wie dieses auf Änderungen im Kontrolldruck reagiert. Ziel ist es, das Ventil so auszulegen, dass einerseits seine Reaktionszeit extrem kurz ist und andererseits starke Überschwinger vermieden werden.

Umdrehungen u	3000	Temperatur $Temp$	80
Tank-/Atmosphärendruck $p_T = p_0$	101325	Dichte ρ	836
lin. Leckageparameter l_1	9e-12	qu. Leckageparameter l_2	2e-17
Durchflusskoeffizient α	0.6	Luftanteil im Öl pro	5
Kompressionsmodul reines Öl E_{oel}	1.317e9	Isentropenexponent γ	1.402

Tabelle 9.2: Parametersatz

Tabelle 9.2 beinhaltet eine Auflistung sämtlicher Eingangsdaten für das Modell. Der Kontrolldruck ist in Abbildung 9.1 dargestellt. Abbildung 9.2 zeigt die Reaktion des Steuerkolbens sowie alle Drücke.

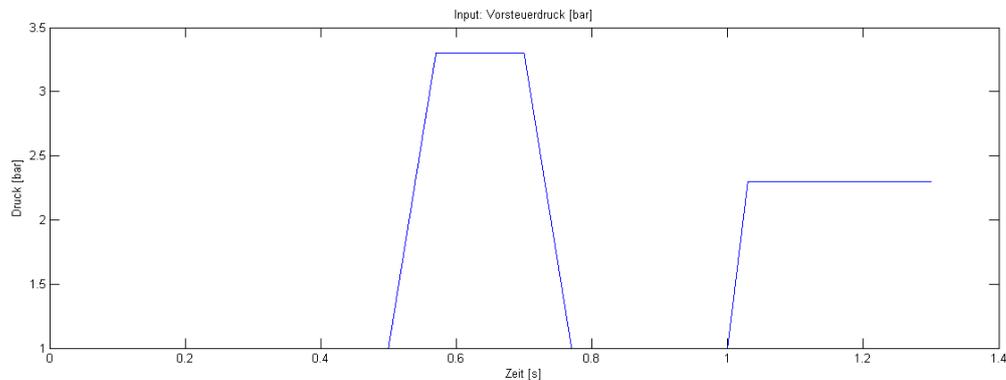


Abbildung 9.1: Input Daten: Änderungen im Kontrolldruck

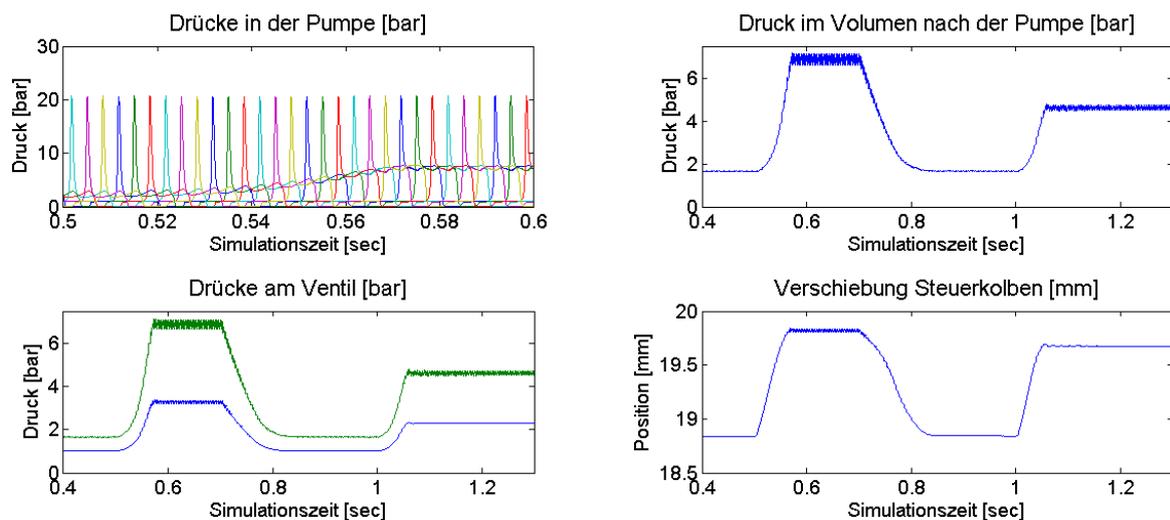


Abbildung 9.2: Typischer Output: Reaktion des Steuerkolbens auf Änderungen des Kontrolldruckes und ihre Auswirkung auf den gesamten Kreislauf

Bemerkung 9.1. Vor allem Simulationen mit Vorsteuerdruckänderungen oder Volumenstromänderungen der Pumpe zeigen, wie wichtig eine variable Schrittweite ist, siehe Abbildung 9.3. Auch wenn die Schrittweite bei einem eingeschwungenen System nicht stark variiert, muss sie bei Parameteränderungen angepasst werden. Würde man eine fixe Schrittweitensteuerung verwenden, so müsste diese während der gesamten Simulation extrem klein sein, um Systemreaktionen bei Parameteränderungen genau abzubilden.

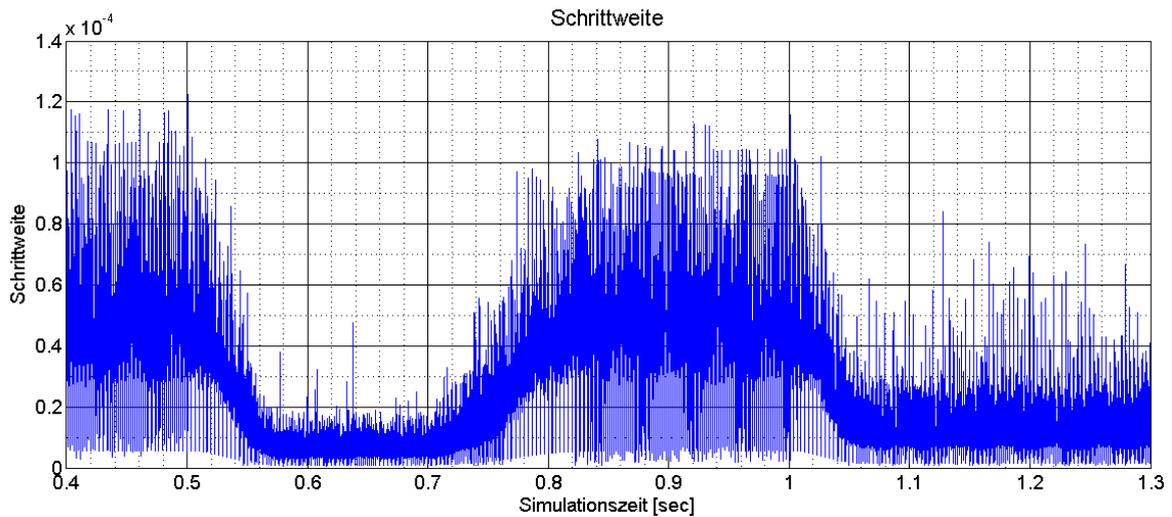


Abbildung 9.3: Schrittweite

9.2 Luft im Öl

Der Luftanteil hat großen Einfluss auf das Systemverhalten, wie beispielsweise auf das Verhalten des Ventilsteuerkolbens. Vor allem die Reaktionszeit verlängert sich mit zunehmendem Luftanteil, wie Abbildung 9.4 zeigt.

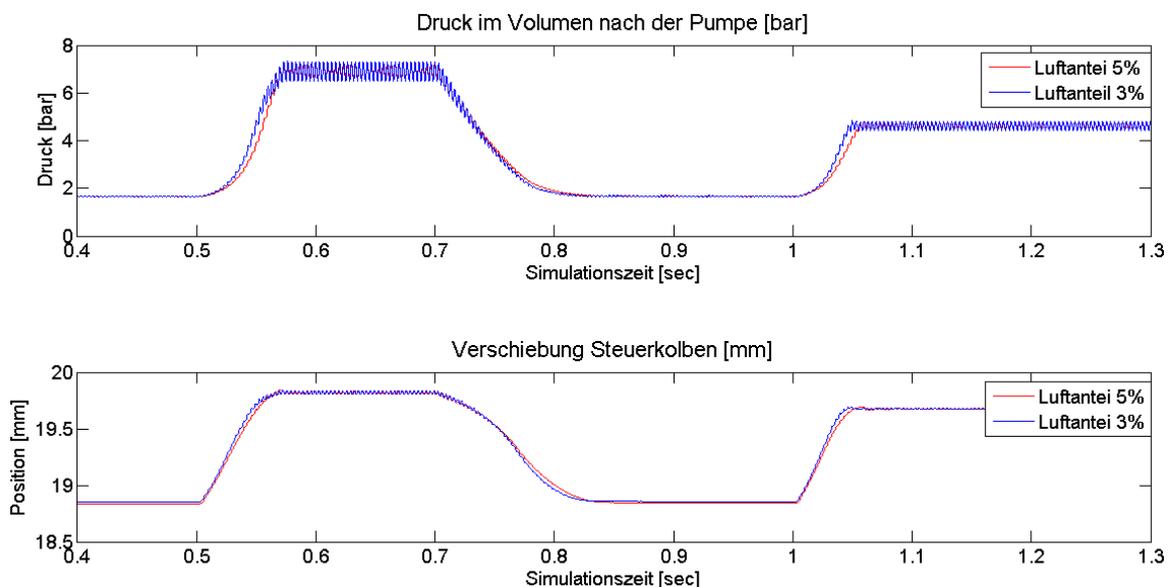


Abbildung 9.4: Oben: Drücke am Ventil, unten: Verschiebung des Steuerkolbens

Aufgrund des ungleichförmigen Volumenstromes der Pumpe, ist es schwer zu sehen, wie stark sich der Luftanteil auswirkt. Will man rein den Einfluss von Luft im Öl auf die Verschiebung des Ventilsteuerkolbens untersuchen, so nimmt man den Volumen-

strom der Pumpe konstant an. In weiterer Folge wurde ein konstanter Volumenstrom von $27 \left[\frac{l}{min} \right]$ angenommen. Der entsprechende Output ist in Abbildung 9.5 und 9.6 dargestellt. Hier kann man auch erkennen, dass der Luftanteil die Reaktionszeit des Steuerkolbens beeinflusst, d.h. je höher der Luftgehalt im Öl, desto langsamer reagiert der Steuerkolben. Dadurch steigt auch der Systemdruck bei höherem Luftanteil langsamer an. Der Grund für diese Reaktionsverminderung ist, dass sich die beiden Drücke am Ventil bei höherem Luftanteil langsamer aufbauen, weil die Druckflüssigkeit stärker komprimierbar ist, siehe Abschnitt 2.2.3.

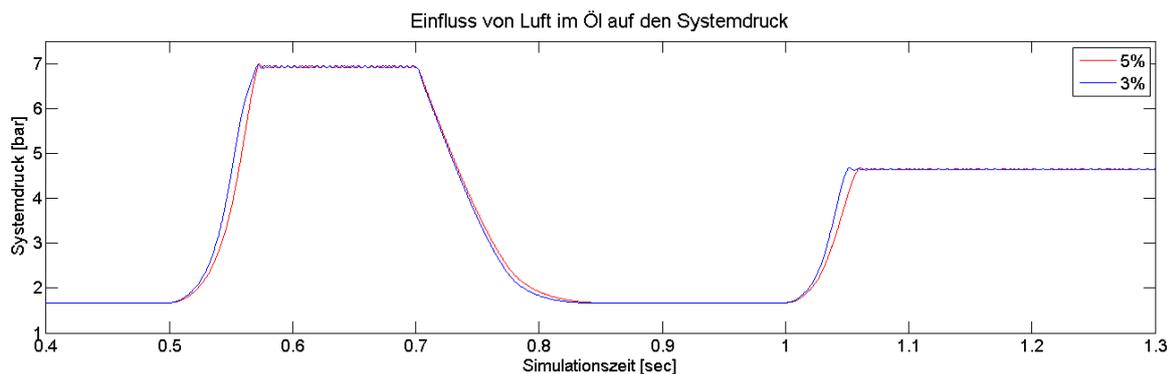


Abbildung 9.5: Druck im Volumen nach der Pumpe (=Systemdruck)

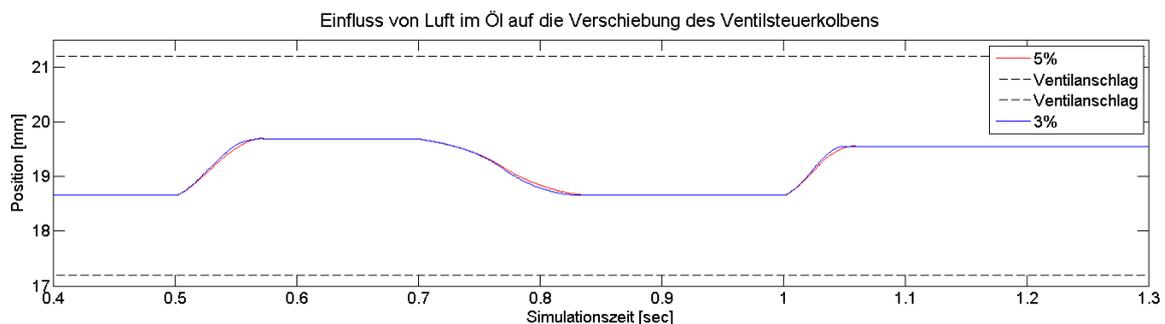


Abbildung 9.6: Einfluss von Luft im Öl bei mittlerer Blendengröße auf die Verschiebung des Steuerkolbens

9.3 Änderung der Blendengröße

Die Reaktionszeit des Ventilsteuerkolbens hängt auch davon ab, wie schnell sich die Drücke am Ventil aufbauen. Der Druckaufbau ist neben der Größe der Volumen vor allem von der Blendengröße abhängig.

Abbildung 9.7 zeigt jene Blenden, deren Größen untersucht wurden. Hier wurde ebenfalls der Volumenstrom der Pumpe konstant angenommen, um rein den Einfluss der

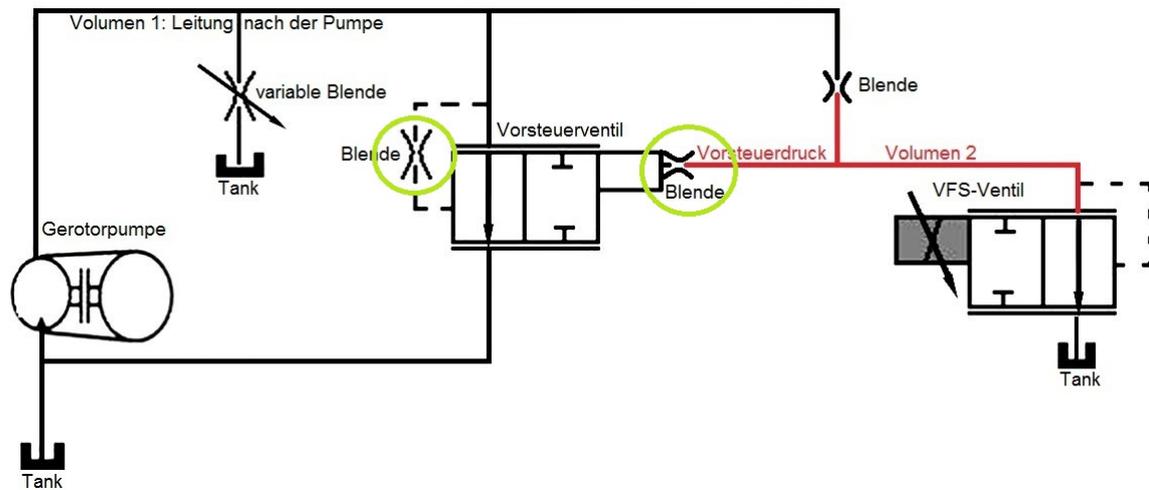


Abbildung 9.7: Blenden, welche untersucht wurden

Blende festzustellen.

Es gilt: Je kleiner die Blende, desto schlechter die Reaktionszeit des Ventilsteuerkolbens, siehe Abbildung 9.10, und je größer die Blende, umso wahrscheinlicher sind Überschwinger und Schwingungen, wie die beiden Abbildungen 9.8 und 9.9 zeigen.

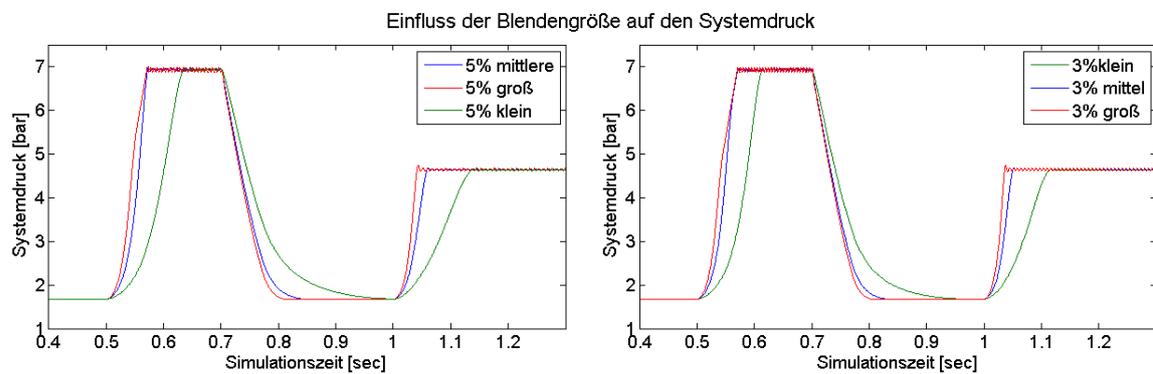


Abbildung 9.8: Einfluss der Blendengröße auf den Systemdruck.

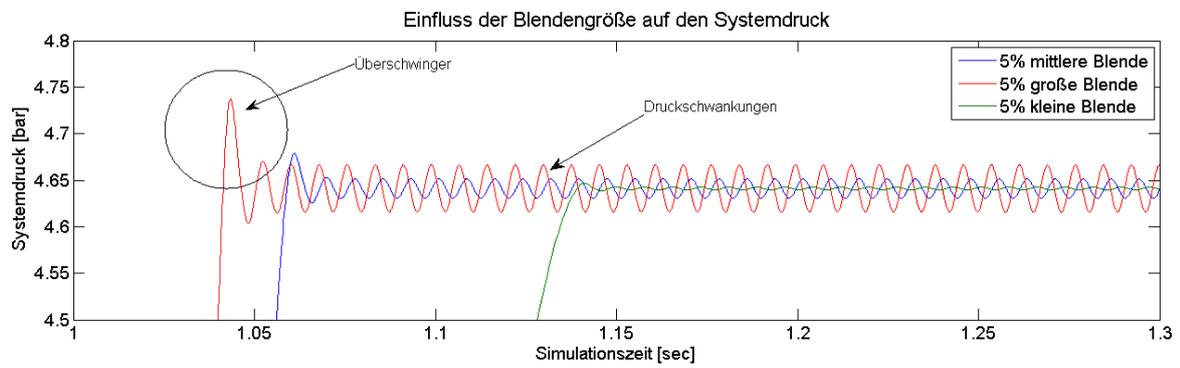


Abbildung 9.9: Zoom: Gefahr von Überschwinger und Druckschwankungen.

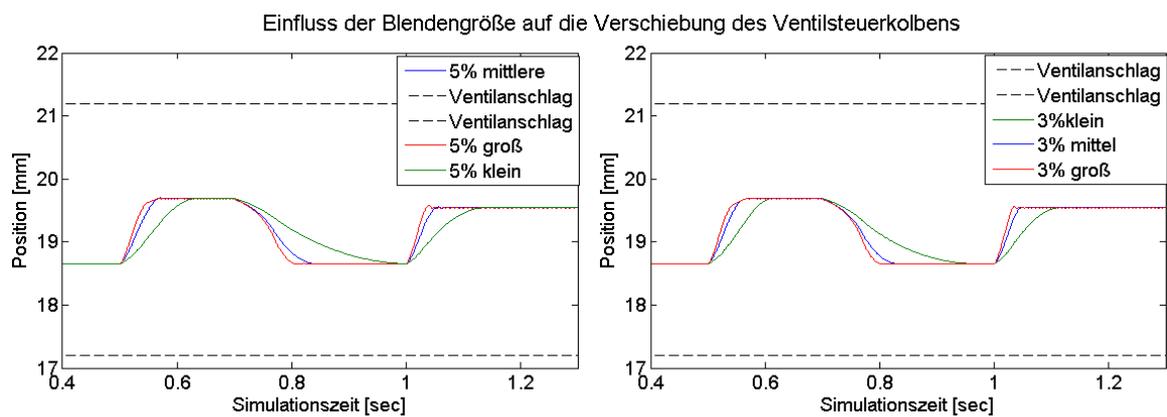


Abbildung 9.10: Einfluss der Blendengröße auf die Reaktionszeit des Steuerkolbens.

Notation

Formelzeichen	Beschreibung	Einheit
ρ	Dichte des Fluides	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
α	Durchflusskoeffizient	[1]
ν	kinematische Viskosität	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$
η	dynamische Viskosität	$\left[\frac{kg}{m\ s}\right] = \left[\frac{N\ s}{m^2}\right]$
τ	Schubspannung	[Pa]
F	Kraft	[N] = $\left[\frac{kg\ m}{s^2}\right]$
F_{ax}	axiale Kraft	[N] = $\left[\frac{kg\ m}{s^2}\right]$
F_N	Normalkraft	[N] = $\left[\frac{kg\ m}{s^2}\right]$
F_{rc}	Coulombsche Reibkraft	[N] = $\left[\frac{kg\ m}{s^2}\right]$
F_{rn}	Newtonsche Reibkraft	[N] = $\left[\frac{kg\ m}{s^2}\right]$
F_S	Stribeckkraft	[N] = $\left[\frac{kg\ m}{s^2}\right]$
t	Zeit	[s]
L	Länge	[m]
h	Höhe des Leckagespalts	[m]
d bzw. D	Gehäusedurchmesser	[m]
A	Fläche	[m ²]
V	Volumen	[m ³]
Q	Volumenstrom	$\left[\frac{m^3}{s}\right]$
$\Delta\vartheta$	Volumenausdehnungskoeffizient	[1]
p	Druck (Indizes 1,...,9)	[Pa]
I	Impuls	[Ns]
v	Geschwindigkeit	$\left[\frac{m}{s}\right]$
v_S	Stribeck Geschwindigkeit	$\left[\frac{m}{s}\right]$

Formelzeichen	Beschreibung	Einheit
ϕ	Winkel der Pumpe	[rad]
Θ	Ausströmwinkel am Ventil	[rad]
E_{oil}	Kompressionsmodul von reinem Öl	[Pa]
E_{isen}	Ersatzkompressionsmodul bei isentroper Zustandsänderung	[Pa]
u	Anzahl der Umdrehungen des Innenrotors pro Sekunde	[1]
γ	Isentropenexponent	[1]
per	Luftanteil im Öl	[1]
p_0	Atmosphärendruck	[Pa]

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schaltskizze des Modellproblems.	1
2.1	Eine Verbindung verbindet genau zwei Knoten ($p_1 > p_2$).	4
2.2	Erklärung zu obiger Formel	5
2.3	Viskosität-Temperatur Beziehung von verschiedenen Ölen	6
2.4	Öl ist komprimierbar	6
2.5	Einfluss von Luft im Öl - Ersatzkompressionsmodul	7
2.6	Einfluss von Luft im Öl - Ersatzkompressionsmodul; Der, für diese Anwendung, interessante Druckbereich liegt zwischen 0.1 und 70 bar	8
2.7	Im Gegensatz zur laminaren Strömung bilden sich bei der turbulenten Strömung Wirbel hinter der Blende	9
2.8	Volumenstrom durch die Steuerkante eines Ventils. s ist der Öffnungsweg der Steuerkante	10
2.9	Der Massenstrom kann nur über die beiden Flächen A_L und A_P in das Kontrollvolumen zu- und abfließen. Durch den beweglichen Kolben kann das Kontrollvolumen verändert werden, d.h. es ist zeitabhängig.	11
2.10	Fallunterscheidung bei der Modellierung der Verschiebung des Ventilsteuerkolbens	14
2.11	Gerotorpumpe mit Saug- und Druckkanalanschluss. Das Pumpenvolumen kann in 6 Kammervolumen unterteilt werden.	19
2.12	Intuitiv kann man sich die Gerotorpumpe als Kolbenpumpe mit sechs versetzten Kolben und veränderlichen Ein- und Auslassflächen vorstellen	21
2.13	Abmessungen der Pumpe: Kammerfläche zwischen den beiden Rotoren (blau), Überschneidung mit der Einlassniere (grün), Überschneidung mit der Auslassniere (rot), Kammervolumenstrom (magenta)	21
3.1	links: Leckage zwischen den Kammern, rechts: „Seitenansicht“, Leckage über den axialen Spalt zwischen Gehäuse und Innenrotor.	23
3.2	Schaltskizze des Prüfstandaufbaus ohne die Messgeräte. Dieser Kreislauf wird im mathematischen Modell abgebildet.	24
3.3	Knotendiagramm: Volumenstrom-Druck-Diagramm.	24
4.1	Schaltskizze des gegebenen Kreislaufes	31
4.2	Knotendiagramm	32

4.3	links: frei beweglicher Steuerkolben, rechts: Steuerkolben wird gegen den Ventilanschlag gedrückt	35
8.1	Typischer Output für Modell 1; Oben: Überlagerung der sechs Drücke in den Kammervolumen, unten: Druck in der Leitung nach der Pumpe	67
8.2	Schrittweite zu obigem Output	67
9.1	Input Daten: Änderungen im Kontrolldruck	70
9.2	Typischer Output: Reaktion des Steuerkolbens auf Änderungen des Kontrolldruckes und ihre Auswirkung auf den gesamten Kreislauf . . .	70
9.3	Schrittweite	71
9.4	Oben: Drücke am Ventil, unten: Verschiebung des Steuerkolbens	71
9.5	Druck im Volumen nach der Pumpe (=Systemdruck)	72
9.6	Einfluss von Luft im Öl bei mittlerer Blendengröße auf die Verschiebung des Steuerkolbens	72
9.7	Blenden, welche untersucht wurden	73
9.8	Einfluss der Blendengröße auf den Systemdruck.	73
9.9	Zoom: Gefahr von Überschwingen und Druckschwankungen.	74
9.10	Einfluss der Blendengröße auf die Reaktionszeit des Steuerkolbens. . . .	74

Tabellenverzeichnis

2.1	Zuordnung der verschiedenen Hydraulikkomponenten	3
5.1	Butcher Tabelle	42
5.2	Butcher Tabelle: 2-stufige RK-Methode mit Trapezregel	43
5.3	Butcher Tabelle: 4-stufige RK-Methode	43
6.1	Butcher Tabelle: eingebettete Runge-Kutta-Methode	58
6.2	Eingebettete Runge-Kutta-Methode 2(3)	59
6.3	Eingebettete Runge-Kutta-Methode Merson 4(5)	59
8.1	Parametersatz	65
8.2	Eingebettete Runge-Kutta-Methode 2(3)	66
8.3	Parameter: automatische Schrittweitensteuerung, eingebettete Runge-Kutta-Methode	66
8.4	Gegenüberstellung der eingebettete RK 2(3) und Matlab Routine ode 23	66
9.1	Parameter: automatische Schrittweitensteuerung, eingebettete Runge-Kutta-Methode	69
9.2	Parametersatz	69

Literaturverzeichnis

- [1] R. Isermann. *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. Springer, 2008.
- [2] B. Manhartsgruber. *Skriptum zur Vorlesung Servohydraulik: Grundlagen, Komponenten und Anwendungen. Modellbildung, Simulation und Regelungen*. Johannes Kepler Universität Linz, Institut für Maschinenlehre und hydraulische Antriebstechnik, 2008.
- [3] B. Manhartsgruber. *Hydraulik-Kurs BRP-Rotax*. Johannes Kepler Universität Linz, 2008, Institut für Maschinenlehre und hydraulische Antriebstechnik, 2010.
- [4] U. Langer. *Numerik III: Numerische Verfahren für Anfangs- und Anfangsrandwertaufgaben*. Johannes Kepler Universität Linz, WS 1994/95 und 1996/97, Institute for Computational Mathematics.
- [5] W. Zulehner. *Skriptum zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen*. Johannes Kepler Universität Linz, 2008W, Institute for Computational Mathematics.
- [6] W. Zulehner. *Lecture Notes for the Course Numerical methods for time-dependent problems*. Johannes Kepler Universität Linz, 2009/10WS, Institute for Computational Mathematics.
- [7] D. Will, N. Gebhardt, D. Herschel. *Hydraulik: Grundlagen, Komponenten, Schaltungen*. Springer, 2008.
- [8] H. Oertel, M. Böhle, U. Dohrmann. *Strömungsmechanik: Grundlagen-Grundgleichungen-Lösungsmethoden-Softwarebeispiele*. 5. Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.
- [9] G. Merker, F. Otto, C. Schwarz. *Verbrennungsmotoren: Simulation der Verbrennung und Schadstoffbildung*. 3. Auflage, B. G. Teubner, 2006.
- [10] L. Böswirth. *Technische Strömungslehre: Lehr- und Übungsbuch*. 7. Auflage, Friedr. Vieweg und Sohn, 2007.
- [11] J.H. Spurk, N. Aksel. *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. 7. Auflage, Springer, 2007.

- [12] A. Böge. *Technische Mechanik: Statik-Dynamik-Fluidmechanik-Festigkeitslehre*. 28. Ausgabe, Vieweg+Teubner Verlag/GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden, 2009.
- [13] D. Findeisen. *Ölhydraulik: Handbuch für hydrostatische Leistungsübertragung in der Fluidtechnik*. 5. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [14] H. Watter. *Hydraulik und Pneumatik: Grundlagen und Übungen - Anwendungen und Simulation*. 2. Ausgabe, Vieweg+Teubner Verlag/GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden, 2008.
- [15] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. *Solving ordinary differential equations 1: Nonstiff problems*. 8. Ausgabe, Springer series in computational mathematics, 1987.
- [16] U.J. Möller, J. Nassar. *Schmierstoffe im Betrieb*. 2. Auflage, Springer, 2002.
- [17] P. Beater. *Entwurf hydraulischer Maschinen: Modellbildung, Stabilitätsanalyse und Simulation hydrostatischer Antriebe und Steuerungen*. Springer, 1999.
- [18] H.J. Reinhardt. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: Anfangs- und Randwertprobleme*. Walter de Gruyter, 2008.
- [19] <http://de.wikipedia.org/wiki/Anfangswertproblem>, 22.12.2010
- [20] H. Olsson, K.J. Aström, C. Canudas de Wit, M. Gräfert, P. Lischinsky *Friction Models and Friction Compensation*. 1997-11-28 16:52.
- [21] A.K. Padthe, J.H. Oh, D.S. Bernstein. *On the LuGre Model and Friction-Induced Hysteresis*. Department of Aerospace Engineering, The University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109-2140, USA.
- [22] J. Affenzeller, H. Gläser. *Lagerung und Schmierung von Verbrennungsmotoren: Die Verbrennungskraftmaschine, Neue Folge*. H. List und A. Pischinger, Band 8, Springer Wien New York.
- [23] G. Junge. *Einführung in die technische Strömungslehre*. Carl Hanser Verlag München, ISBN 978-3-446-42300-8.
- [24] S. R. Majumdar. *Oil Hydraulic Systems: Principles and Maintenance*. Tata McGraw-Hill, New Delhi, ISBN 0-07-463748-7.

Eidesstattliche Erklärung

Ich, Petra Neudorfer, erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Linz, Juni 2011

Petra Neudorfer