

Interaktionen zwischen Fluiden und Körpern in der Kontinuumsmechanik

BAKKALAUREATSARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

BAKKALAUREUS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

in der Studienrichtung

TECHNISCHE MATHEMATIK

Angefertigt am *Institut für Numerische Mathematik*

Betreuung:

Dipl.-Ing. Dr. Martin Neumüller

Eingereicht von:

Ludwig Mitter

Linz, Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
1.1 Vorwort	1
1.2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	1
1.3 Das Transporttheorem	5
1.4 Volumina im deformierten Zustand	7
1.5 Die Kontinuitätsgleichung	9
1.6 Die Bewegungsgleichung	10
1.7 Wirkende Kräfte	12
1.8 Axiome des Kräfte- und Momentengleichgewichts	13
1.9 Der Spannungstensor	14
2 Herleitung der Gleichungen für lineare Elastizität	17
2.1 Die Piola-Transformation	17
2.2 Der Verzerrungstensor	18
2.3 Der Piola-Kirchhoff-Spannungstensor	21
2.4 Die Stoffgesetze - Elastische Materialien	24
2.5 Die materielle Bezugssysteminvarianz	27
2.6 Isotrope elastische Materialien	28
2.7 Die Laméschen Gleichungen	32
3 Herleitung der Navier-Stokes Gleichungen	35
3.1 Die Stoffgesetze - Fluide	35
3.2 Die Navier-Stokes-Gleichungen	37
4 Kopplung der Gleichungen für Fluide und Körper	39
4.1 Das ALE-Bezugssystem	40
4.2 Zeitableitungen im ALE-Kontext	42
4.3 Die ALE-Formulierung	44
4.4 Bestimmung der ALE-Abbildung	47
4.5 Das gekoppelte Problem	48
Notation	51
Literaturverzeichnis	53

Kapitel 1

Einführung

1.1 Vorwort

Das Ziel dieser Bakkalaureatsarbeit ist die Kopplung der beschreibenden Gleichungen für Fluide und Körper zu einem sog. *Fluid-Struktur-Kopplungsproblem*. Wir werden dafür in diesem ersten Kapitel eine allgemeine Einführung in die Methodik der Kontinuumsmechanik geben, an deren Ende zwei fundamentale Gleichungen (die *Kontinuitätsgleichung* und die *Bewegungsgleichung*) stehen. Jede für sich spiegelt einen fundamentalen Erhaltungssatz der Physik wieder und ist dementsprechend sowohl für die Beschreibung von Fluiden als auch für die Beschreibung von Körpern gültig.

In Kapitel 2 und Kapitel 3 werden wir auf die charakteristischen Besonderheiten eingehen, welche Fluide von Körpern unterscheiden. Diese stoffliche Unterscheidung findet unter dem Überbegriff der *Stoffgesetze* statt und erfordert im Falle der Körper die Umformulierung der Kontinuitätsgleichung und der Bewegungsgleichung in einen anderen Kontext.

Kapitel 4 befasst sich schlussendlich mit der Verbindung beider beschreibenden Gleichungen für Körper und Fluide. Zu diesem Zweck wird ein weiterer, noch allgemeinerer Kontext (die sog. *ALE-Betrachtungsweise*) eingeführt, welcher es ermöglichen wird, die Gleichungen beider Stoffe in einer kompatiblen Form anzuschreiben.

Es sei betont, dass wir im folgenden jegliche variationelle Gesichtspunkte schwacher Lösungsbegriffe völlig außer Acht lassen werden.

1.2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Die zentrale Fragestellung der dreidimensionalen, nichtlinearen Kontinuumsmechanik befasst sich mit der Ermittlung eines Gleichgewichtszustandes für einen Körper oder einem Fluid unter Einwirkung von Kräften. Sei $\Omega_{t_0} \subset \mathbb{R}^3$ ein offenes, zusammenhängendes und beschränktes Gebiet mit *lipschitzstetigem Rand*¹ ([4, S. 35]) und sei oBdA. $(0, T) =: I$ für $T > 0$ jenes temporale Rechengebiet, in welchem wir die Bewegung des

¹Dies stellt sicher, dass der Satz der Partiellen Integration (Satz 1.8) angewandt werden darf

Körpers oder Fluids verfolgen. Wir werden $\bar{\Omega}_{t_0}$ als jenes Volumen auffassen, welches ein gegebener Körper oder ein gegebenes Fluid vor dessen Deformation zu einem beliebig aber fest gewähltem Zeitpunkt $t_0 \in (0, T)$ einnimmt. Aus diesem Grund wird der undeformierte Zustand $\bar{\Omega}_{t_0}$ als *Referenzkonfiguration* ([4, S. 27]) bezeichnet.

Bei der Beschreibung von Fluiden und Körpern hängen alle Größen sowohl vom Ort, als auch von der Zeit ab. Sei f eine solche Einflussgröße, dann lässt sich f schreiben als $f = f(x, t)$, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ eine Ortskoordinate des Gebiets $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ und $t \in (0, T)$ die Zeit ist, wobei Ω_t jenes Gebiet bezeichnet, welches zum Zeitpunkt t vom Fluid oder Körper eingenommen wird. Das Definitionsgebiet einer solchen Funktion f ist dann der sog. *Raumzeitzyylinder*

$$\mathcal{D} := \Omega_t \times I := \{(x, t) : x \in \Omega_t, t \in (0, T)\} \subset \mathbb{R}^4,$$

wobei zur Vereinfachung das Symbol $\Omega_t \times I$ auch für bewegte Gebiete Ω_t verwendet wird.

Definition 1.1 (Fundamentale Hypothese der Kontinuumsmechanik). *Zu jedem Zeitpunkt $t \in (0, T)$ befindet sich in einem jeden Punkt $x \in \Omega_t$ genau ein Partikel².*

Unter Aussetzung von Kräften wird der betrachtete Körper oder das betrachtete Fluid deformiert. Dies wird mittels eines Vektorfeldes $\varphi : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ - der sogenannten *Deformation* bzw. *Deformationsabbildung* - beschrieben, wonach ein undeformierter Zustand $\bar{\Omega}_{t_0}$ in einen deformierten Zustand (sogenannten *deformierte Konfiguration*)

$$\bar{\Omega}_t := \varphi(\bar{\Omega}_{t_0}, t) := \{\varphi(X, t) : X \in \bar{\Omega}_{t_0}\}$$

überführt wird. Wir fordern, dass φ eine auf $\bar{\Omega}_{t_0} \times I$ *orientierungstreu*³ und injektive Abbildung ist. Wir wollen nun Eigenschaften dieser Abbildung genauer erörtern. Wir fixieren für alle folgenden Überlegungen eine kanonische *orthonormale Basis*

$$e_i := (\delta_{i,j})_{j=1}^3 \text{ für } i = 1, 2, 3$$

im dreidimensionalen *euklidischen Raum* \mathbb{R}^3 . Für ein $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ bzw. für das Vektorfeld φ können wir deren Komponenten bezüglich dieser orthonormalen Basis angeben

$$X = \sum_{i=1}^3 X_i e_i \text{ bzw. } \varphi = \sum_{i=1}^3 \varphi_i e_i.$$

Für jedes $X \in \Omega_{t_0}$ und jedes $t \in I$ definieren wir die Matrix des *Deformationsgradienten*

$$F := \nabla_X \varphi(X, t) = (\partial_{X_j} \varphi_i(X, t))_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_1 & \partial_3 \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \partial_2 \varphi_2 & \partial_3 \varphi_2 \\ \partial_1 \varphi_3 & \partial_2 \varphi_3 & \partial_3 \varphi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^3.$$

²Somit lässt sich jedes Partikel eindeutig über dessen lagrangesche Koordinaten identifizieren

³dh. $J := \det \nabla \varphi(X, t) > 0$ für alle $X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I$ (die sogenannte *Orientierungstreuereigenschaft*)

Aufgrund der Orientierungstreue der Deformationsabbildung ist der Deformationsgradient insbesondere für alle $t \in I$ auf ganz $\bar{\Omega}_{t_0}$ regulär. Gemeinsam mit der Deformationsabbildung führen wir das Vektorfeld der *Verschiebung* $u : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein, welches definiert wird als

$$\varphi(X, t) = X + u(X, t) \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I.$$

Mit diesem Zusammenhang berechnet sich der *Verschiebungsgradient* ∇u leicht aus

$$\nabla_X \varphi(X, t) = I + \nabla_X u(X, t) = I + \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^3.$$

Für ein gegebenes Referenzgebiet $\bar{\Omega}_{t_0}$ und einer gegebenen Deformationsabbildung φ führen wir eine kompakte Notation ein,

$$x := \varphi(X, t) := \varphi(X, t_0, t) \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I,$$

wobei wir $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ der Referenzkonfiguration in diesem Zusammenhang als *Lagrange*- bzw. $x \in \bar{\Omega}_t$ des deformierten Zustandes als *Eulersche Koordinaten* bezeichnen werden. In der sog. *Lagrange'schen Beschreibungsweise* betrachten wir den Fluss bzw. die Deformation, indem wir die Bewegung eines jeden Partikels $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ verfolgen. Die *Trajektorie* eines solchen Partikels (siehe Abbildung 1.1) wird beschrieben durch

$$x = \varphi(X, t) = (\varphi_i(X, t))_{i=1}^3 \text{ für } t \in (0, T).$$

Dabei bezeichnet jetzt X einen Punkt der Referenzkonfiguration Ω_{t_0} mit $t_0 \in (0, T)$, weshalb offensichtlich gilt

$$X = \varphi(X, t_0, t_0) = \varphi(X, t_0).$$

Die Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Partikels für einen gegebenen Referenzpunkt X werden definiert als

$$\begin{aligned} \hat{v}(X, t) &:= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t), \\ \hat{a}(X, t) &:= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(X, t). \end{aligned}$$

Die *Eulersche Beschreibungsweise* basiert auf der Ermittlung des *Geschwindigkeitsfelds* $v(x, t)$ für ein Partikel, welches sich zum Zeitpunkt $t \in (0, T)$ in $x \in \Omega_t$ befindet, also

$$v(x, t) := \hat{v}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) \text{ wobei } x = \varphi(X, t).$$

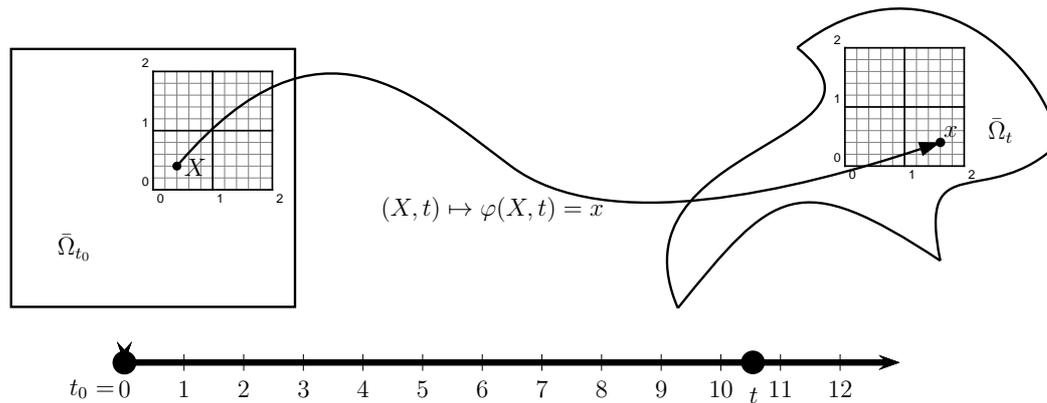


Abbildung 1.1: Trajektorie eines Partikels

Unter der Annahme, dass $v \in [C^1(\mathcal{D})]^3$ drückt man die Beschleunigung eines Partikels, welches sich in $t \in (0, T)$ in $x \in \Omega_t$ befindet aus als

$$\begin{aligned}
 a(x, t) &= \hat{a}(X, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (v(x, t)) = \frac{\partial}{\partial t} (v(\varphi(X, t), t)) \\
 &= \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(X, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) v_i(x, t) \\
 &= \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + v_i(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + (v(x, t) \cdot \text{grad}_x) v(x, t) \\
 &= \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla_x) v(x, t).
 \end{aligned}$$

Dies veranlasst die Einführung der *materiellen Ableitung* als

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \text{grad}_x) = \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x).$$

Die Überführung einer Lösung aus der eulerschen in die lagrangesche Beschreibungsweise entspricht der Ermittlung der Flugbahn eines gegebenen Partikels auf Basis eines gegebenen Geschwindigkeitsfelds $v(x, t)$. Die Trajektorie eines Partikels, welches zum Zeitpunkt $t = t_0$ sich in $X \in \Omega_{t_0}$ aufhält ist durch ein Anfangswertproblem gegeben

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v(x, t) \text{ mit } x(t_0) = X. \tag{1.1}$$

Satz 1.2. Sei $v \in [C^1(\mathcal{D})]^3$, dann gilt

1. Für jedes $(X, t_0) \in \mathcal{D}$ besitzt (1.1) genau eine Lösung $\varphi(X, t_0, t)$

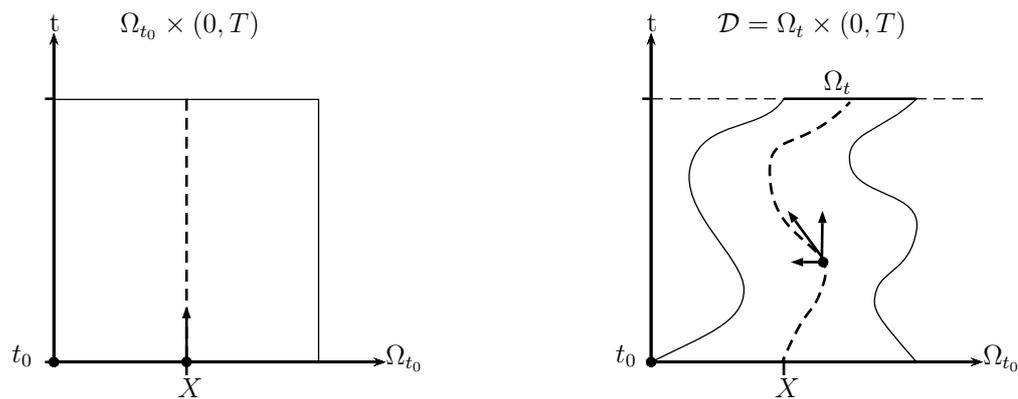


Abbildung 1.2: Zeitableitungen im lagangeschen (links) und eulerschen Kontext (rechts) - siehe (1.2).

2. Folgende partielle Ableitungen von φ sind in deren Definitionsbiet $\{(X, t_0, t) : (X, t_0) \in \mathcal{D}, t \in (0, T)\}$ stetig:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial X_i}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_0 \partial X_i}, i \in \{1, 2, 3\}.$$

Beweis. [9, S. 16] □

Ist $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ eine allgemeine über sich bewegende Partikel transportierte physikalische Größe, so liefert die Funktion $\hat{F}(X, t) = F(\varphi(X, t), t)$ die Werte dieser Größe entlang einer Trajektorie $x = \varphi(X, t)$. Die Richtungsableitung entlang der Trajektorie ergibt sich mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{F}(X, t)}{\partial t} &= \frac{\partial F(\varphi(X, t), t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(\varphi(X, t), t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) \cdot \nabla_x F(\varphi(X, t), t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla_x F(x, t) \\ &= \frac{D}{Dt} F(x, t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Aus diesem Grund bezeichnet man die materielle Ableitung häufig auch als die „Ableitung entlang der Trajektorie eines Partikels“ (siehe Abbildung 1.2).

1.3 Das Transporttheorem

Sei $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ die eulersche Darstellung einer allgemeinen über sich bewegende Partikel transportierten physikalischen Größe (*Eigenschaftsdichte*) und betrachten wir ein System von Partikeln, welches zum Zeitpunkt $t \in (0, T)$ ein zusammenhängendes

beschränktes Gebiet $\nu(t) \subset \Omega_t$ mit lipschitzstetigem Rand ([15], [4], Satz 1.8) einnimmt. Das Maß dieser physikalischen Größe F , welche im Volumen $\nu(t)$ im Zeitpunkt $t \in (0, T)$ enthalten ist, entspricht dem Integral

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\nu(t)} F(x, t) dx.$$

Wir werden nun die Änderungsrate der Größe \mathcal{F} für die Partikel des Systems $\nu(t)$ bzgl. der Zeit berechnen, dh. wir interessieren uns für

$$\frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\nu(t)} F(x, t) dx.$$

Unter der Annahme, dass $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ und $v \in [\mathcal{C}^1(\mathcal{D})]^3$ (also $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega_{t_0} \times I)$) sind und $\varphi = \varphi(X, t_0, t)$ die Abbildung aus Satz 1.2 ist, so beschreibt φ die Änderung des Gebiets $\nu(t)$ mit der Zeit. Für einen beliebig gewählten und fixierten Zeitpunkt $t_0 \in (0, T)$ mit $\nu(t_0) \subset \Omega_{t_0}$ gilt

$$\nu(t) = \{\varphi(X, t_0, t) : X \in \nu(t_0)\},$$

sofern $\varphi(X, t_0, t)$ für alle $X \in \nu(t_0)$ definiert ist. Mit $J(X, t)$ bezeichnen wir die Determinante der Jakobimatrix von der Abbildung $\varphi(\cdot, t_0, t) : \nu(t_0) \rightarrow \nu(t)$, $X \mapsto \varphi(X, t_0, t)$, also

$$J := J(X, t) := \det \nabla_X \varphi(X, t_0, t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} (X, t_0, t). \quad (1.3)$$

Lemma 1.3. *Sei $t_0 \in (0, T)$, $\nu(t_0)$ ein beschränktes Gebiet und sei $\bar{\nu}(t_0) \subset \Omega_{t_0}$. Dann existiert ein Intervall $(t_1, t_2) \ni t_0$ sodass die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:*

1. *Die Abbildung $(t_1, t_2) \times \nu(t_0) \rightarrow \nu(t)$, $(t, X) \mapsto x = \varphi(X, t_0, t)$ besitzt stetige erste Ableitungen nach t, X_1, X_2, X_3 und stetige zweite Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial X_i}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.*
2. *Die Abbildung $\nu(t_0) \rightarrow \nu(t)$, $X \mapsto x = \varphi(X, t_0, t)$ ist eine stetig differenzierbare injektive Abbildung von $\nu(t_0)$ auf $\nu(t)$ mit Jakobimatrix (1.3), die stetig und beschränkt ist. Es gilt*

$$J(X, t) > 0 \text{ für alle } X \in \nu(t_0), t \in (t_1, t_2).$$

3. *Die Inklusion*

$$\{(x, t) : t \in [t_1, t_2], x \in \bar{\nu}(t)\} \subset \mathcal{D}$$

ist erfüllt, weshalb die Abbildung v stetige und beschränkte erste Ableitungen auf $\{(x, t) : t \in (t_1, t_2), x \in \nu(t)\}$ besitzt.

- 4.

$$v(\varphi(X, t_0, t), t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t_0, t) \text{ für alle } X \in \nu(t_0), t \in (t_1, t_2).$$

Beweis. [9, S. 18]

□

1.4 Volumina im deformierten Zustand

Die Dichte des deformierten Lebesguemaßes λ_t bzgl. des Lebesguemaßes in der Referenzkonfiguration $\lambda_{t_0} := \lambda$ ist mit der Orientierungstreueeigenschaft von φ gegeben durch

$$\begin{aligned} dx &= d\lambda_t(x) = |\det \nabla \varphi(X, t)| d\lambda(X) \stackrel{\det \nabla \varphi > 0}{=} \det \nabla \varphi(X, t) d\lambda(X) \\ &= \det \nabla \varphi(X, t) dX. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Sei jetzt $\nu(t_0) \subset \bar{\Omega}_{t_0}$ messbar - wir wollen den Inhalt von $\nu(t_0)$ bzw. $\varphi(\nu(t_0), t) = \nu(t)$ mit Hilfe der Substitutionsregel ([18, S. 62]) und 1.4 ermitteln

$$\begin{aligned} \lambda_t(\nu(t)) &= \int_{\nu(t)} 1 dx = \int_{\nu(t)} 1 d\lambda_t(x) \\ &= \int_{\nu(t_0)} \det \nabla \varphi(X, t) d\lambda(X) = \int_{\nu(t_0)} \det \nabla \varphi(X, t) dX. \end{aligned}$$

Mit dem gleichen Argument gilt für eine λ_t -integrierbare Funktion $u : \nu(t) \times I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{\nu(t)} u(x, t) dx &= \int_{\nu(t)} u(x, t) d\lambda_t(x) = \int_{\nu(t_0)} u(\varphi(X, t), t) \det \nabla \varphi(X, t) d\lambda(X) \\ &= \int_{\nu(t_0)} u(\varphi(X, t), t) \det \nabla \varphi(X, t) dX. \end{aligned}$$

Das folgende Lemma spielt eine wichtige Rolle im Beweis eines zentralen Theorems der Kontinuumsmechanik:

Lemma 1.4 (Eulersche Expansionsformel). *Es sei Lemma 1.3 erfüllt. Dann besitzt die Jakobideterminante $J = J(X, t)$ eine stetige und beschränkte partielle Ableitung $\frac{\partial J}{\partial t}$ für $X \in \nu(t_0)$, $t \in (t_1, t_2)$ und es gilt*

$$\frac{\partial J}{\partial t}(X, t) = J(X, t) \operatorname{div}_x v(x, t) \text{ für } x = \varphi(X, t_0, t).$$

Beweis. [1], [16], [9, S. 19] □

Satz 1.5 (Reynoldsches Transporttheorem). *Es sei Lemma 1.3 erfüllt und die Funktion $F = F(x, t)$ habe stetige und beschränkte erste Ableitungen auf $\{(x, t) : t \in (t_1, t_2), x \in \nu(t)\}$. Dann existiert für jedes $t \in (t_1, t_2)$ die Ableitung*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\nu(t)} F(x, t) dx \\ &= \int_{\nu(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \cdot \operatorname{grad}_x F(x, t) + F(x, t) \operatorname{div}_x v(x, t) \right) dx \\ &= \int_{\nu(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}_x (Fv)(x, t) \right) dx. \end{aligned}$$

Beweis. Mittels Substitution können wir das Integral $\mathcal{F}(t)$ schreiben als

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\nu(t_0)} F(\varphi(X, t_0, t), t) J(X, t) dX.$$

Da t_0 fix gewählt ist und somit der Integrationsbereich $\nu(t_0)$ nicht von der Zeit t abhängt können wir den Satz über Parameterintegrale anwenden ([18]) und Integration mit Differentiation vertauschen

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) &= \int_{\nu(t_0)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(\varphi(X, t_0, t), t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(X, t_0, t), t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(X, t_0, t) \right) J(X, t) dX \\ &\quad + \int_{\nu(t_0)} F(\varphi(X, t_0, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(X, t) dX. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 1.4 und der 4. Aussage in Lemma 1.3 erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) &= \int_{\nu(t_0)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(\varphi(X, t_0, t), t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(X, t_0, t), t) v_i(\varphi(X, t_0, t), t) \right) J(X, t) dX \\ &\quad + \int_{\nu(t_0)} F(\varphi(X, t_0, t), t) \operatorname{div}_x v(\varphi(X, t_0, t), t) J(X, t) dX. \end{aligned}$$

Führen wir jetzt eine Rückwertssubstitution durch, so erreichen wir die gewünschte Aussage

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) &= \int_{\nu(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) v_i(x, t) + F(x, t) \operatorname{div}_x v(x, t) \right) dx \\ &= \int_{\nu(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{grad}_x F(x, t) \cdot v(x, t) + F(x, t) \operatorname{div}_x v(x, t) \right) dx \\ &= \int_{\nu(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}_x (Fv)(x, t) \right) dx. \end{aligned}$$

□

Ein wichtiges Resultat der Injektivität der Deformationsabbildung φ lässt sich mit Hilfe unserer Definition von Ω_{t_0} als Gebiet zeigen

Satz 1.6. *Da $\operatorname{int} \bar{\Omega}_{t_0} = \Omega_{t_0}$ folgt aufgrund der Injektivität von $\varphi \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}_{t_0} \times I, \mathbb{R}^n)$*

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_t &= \varphi(\bar{\Omega}_{t_0}, t) = \operatorname{cl} \varphi(\Omega_{t_0}, t), \\ \Omega_t &= \varphi(\Omega_{t_0}, t) = \operatorname{int} \varphi(\bar{\Omega}_{t_0}, t), \\ \partial \Omega_t &= \partial \varphi(\Omega_{t_0}, t) = \varphi(\partial \Omega_{t_0}, t). \end{aligned}$$

Beweis. [4, S. 16], [4, S. 36]

□

Wir kommen nun zu den mathematischen Formulierungen fundamentaler physikalischer Aussagen der sog. *Erhaltungssätze*:

1. Der *Massenerhaltungssatz*
2. Der *Impulserhaltungssatz*

Aus diesen Sätzen werden wir die Gleichungen der Fluidodynamik herleiten: Die *Kontinuitätsgleichung* und die *Bewegungsgleichung*.

1.5 Die Kontinuitätsgleichung

Als *Dichte des Körpers oder Fluids* bezeichnen wir eine Funktion $\rho : \mathcal{D} \rightarrow (0, \infty)$, mit deren Hilfe wir die Masse $m(\nu, t)$ eines Teilgebiets $\nu \subset \Omega_t$ des betrachteten Körpers oder Fluids ermitteln können

$$m(\nu, t) = \int_{\nu} \rho(x, t) d\lambda_t(x) = \int_{\nu} \rho(x, t) dx.$$

Sei $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ und $v \in [\mathcal{C}^1(\mathcal{D})]^3$. Wir betrachten einen beliebigen Zeitpunkt $t_0 \in (0, T)$ und ein sich bewegendes Stück Fluid oder Körper, welches sich während der gesamten betrachteten Zeitspanne aus den gleichen Partikeln zusammensetzt und zum Zeitpunkt t_0 das beschränkte Gebiet $\nu_{t_0} \subset \bar{\nu}_{t_0} \subset \Omega_{t_0}$ einnimmt. Dieses Teilgebiet wird von uns im folgenden als *Kontrollgebiet* bezeichnet, welches zum Zeitpunkt $t \in (t_1, t_2)$ das Gebiet $\nu(t)$ einnimmt, wobei $(t_1, t_2) \ni t_0$ ein ausreichend kleines Intervall mit den Eigenschaften aus Lemma 1.3 ist. Damit ist $\nu(t_0) = \nu_{t_0}$ und Lemma 1.3 ist erfüllt.

Nach Definition umfasst $\nu(t)$ in jedem Zeitpunkt $t \in (0, T)$ die gleichen Partikel, weshalb wir das Prinzip der Massenerhaltung folgendermaßen formulieren können: *Die Masse unseres Systems $\nu(t)$ ist zeitunabhängig.* Oder anders ausgedrückt

$$\frac{dm(\nu(t), t)}{dt} = 0 \text{ wobei } m(\nu(t), t) = \int_{\nu(t)} \rho(x, t) dx \text{ für } t \in (t_1, t_2).$$

Unter Verwendung von Satz 1.5, dessen Voraussetzungen für $F = \rho$ erfüllt sind, ergibt sich

$$\int_{\nu(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}_x(\rho v)(x, t) \right) dx = 0 \text{ für alle } t \in (t_1, t_2).$$

Substituieren wir jetzt $t := t_0$ so folgt, dass

$$\int_{\nu_{t_0}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t_0) + \operatorname{div}_x(\rho v)(x, t_0) \right) dx = 0 \tag{1.5}$$

für jeden beliebigen Zeitpunkt $t_0 \in (0, T)$ und jedes beliebige Kontrollgebiet $\nu_{t_0} \subset \Omega_{t_0}$ gilt. Wir wollen jetzt eine Aussage über den Integranden treffen.

Lemma 1.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^0(\Omega)$, dann gilt

$$f = 0 \text{ in } \Omega \Leftrightarrow \int_{\nu} f dx = 0 \text{ für jede offene und beschränkte Teilmenge } \nu \subset \bar{\nu} \subset \Omega.$$

Beweis. Beweis mittels Zwischenwertsatz ([12, S. 285]) und Einsetzen der Definition für die Stetigkeit einer Funktion ([12, S. 212]). \square

Somit gilt aufgrund der Stetigkeit des Integranden in (1.5) und Lemma 1.7

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}_x(\rho v)(x, t) = 0 \text{ für alle } t \in (0, T), x \in \Omega_t. \quad (1.6)$$

Dabei handelt es sich um die differentielle Form der Massenerhaltung: die *Kontinuitätsgleichung*. Im Spezialfall der Inkompressibilität⁴ gilt aufgrund von $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ und der

$$\text{Vereinfachung } \operatorname{div}_x(\rho v) = \sum_{i=1}^3 \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_{=0} v_i + \rho \operatorname{div}_x v \text{ offenbar}$$

$$\operatorname{div}_x v(x, t) = 0 \text{ für alle } (x, t) \in \mathcal{D}.$$

1.6 Die Bewegungsgleichung

Werfen wir jetzt einen Blick auf einige Definitionen und Resultate, welche Tensorfelder über $\bar{\Omega}_{t_0}$ bzw. $\bar{\Omega}_t$ betreffen. Dabei werden wir ausschließlich Tensoren zweiter Ordnung betrachten

$$T = (T_{ij})_{i,j=1}^3, \text{ } i \text{ Zeilenindex, } j \text{ Spaltenindex,}$$

welche wir für unsere Zwecke als dreidimensionale quadratische Matrizen auffassen werden. Sei also $\hat{T} : \bar{\Omega}_{t_0} \rightarrow \mathbb{M}^3$, $\hat{T} = (\hat{T}_{ij})_{i,j=1}^3$, dann definieren wir $\operatorname{div}_X \hat{T}$ als den Vektor

$$\operatorname{div}_X \hat{T} := \begin{pmatrix} \partial_1 \hat{T}_{11} + \partial_2 \hat{T}_{12} + \partial_3 \hat{T}_{13} \\ \partial_1 \hat{T}_{21} + \partial_2 \hat{T}_{22} + \partial_3 \hat{T}_{23} \\ \partial_1 \hat{T}_{31} + \partial_2 \hat{T}_{32} + \partial_3 \hat{T}_{33} \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^3 \partial_{X_j} \hat{T}_{ij} e_i,$$

wobei analog die Divergenz $\operatorname{div}_x T$ des Tensorfelds $T : \bar{\Omega}_t \rightarrow \mathbb{M}^3$, $T = (T_{ij})_{i,j=1}^3$ definiert ist als

$$\operatorname{div}_x T := \sum_{i,j=1}^3 \partial_{x_j} T_{ij} e_i.$$

Ein für die Herleitung vieler Gleichungen zentraler Satz ist die *Formel der Partiellen Integration für Vektorfelder*, welche unter anderm auch als *Satz von Gauß* bzw. *Satz von Green* bekannt ist.

⁴dh. $\rho = \text{const} > 0$

Satz 1.8 (Divergenzsatz für Vektorfelder). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit lipschitzstetigem Rand, $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $\bar{\Omega}$ stetig differenzierbar und $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein auf $\bar{\Omega}$ stetig differenzierbares Vektorfeld, dann gilt*

$$\int_{\Omega} w(x) \partial_i v_i(x) dx = - \int_{\Omega} v_i(x) \partial_i w(x) dx + \int_{\partial\Omega} w(x) v_i(x) \mathbf{n}_i(x) ds_x.$$

Damit folgt sofort

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v(x)) w(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \cdot \nabla w(x) dx + \int_{\partial\Omega} w(x) v(x) \cdot \mathbf{n}(x) ds_x,$$

wobei \mathbf{n} der Außennormalvektor entlang $\partial\Omega$ ist.

Beweis. [14, S. 203], [8, S. 711], [4, S. 35], [13, S. 522] □

Mit der vorher getroffenen Definition der Divergenz für Tensoren lässt sich eine ähnliche Aussage herleiten.

Satz 1.9 (Divergenzsatz für Tensorfelder). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit lipschitzstetigem Rand und sei $T : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{M}^3$ ein auf $\bar{\Omega}$ stetig differenzierbares Tensorfeld, dann gilt*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_x T(x) dx = \int_{\partial\Omega} T(x) \mathbf{n}(x) ds_x.$$

Beweis. [4, S. 38], [14, S. 203] □

Die fundamentalen dynamischen Gleichungen zur Beschreibung der Bewegung in einem Fluid oder Körper leiten sich aus dem *Impulserhaltungssatz* ab, welcher sich folgendermaßen formulieren lässt: *Die Änderungsrate des Gesamtimpulses eines Teilchensystems, welches in t das Gebiet $\nu(t)$ einnimmt und immer aus den gleichen Teilchen besteht, ist gleich der Summe aller Kräfte, welche auf $\nu(t)$ wirken.*

Seien $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$, $v \in [\mathcal{C}^1(\mathcal{D})]^3$. Der gesamte Impuls aller Partikel in $\nu(t)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{I}(\nu(t)) = \int_{\nu(t)} \rho(x, t) v(x, t) dx.$$

Wenn $\mathcal{F}(\nu(t))$ die auf $\nu(t)$ wirkende Kraft ist, so ist das Momentengleichgewicht gleichbedeutend mit

$$\frac{d\mathcal{I}(\nu(t))}{dt} = \mathcal{F}(\nu(t)) \text{ für alle } t \in (t_1, t_2).$$

Mit dem Reynoldsen Transporttheorem erhalten wir

$$\int_{\nu(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t) v_i(x, t)) + \operatorname{div}_x (\rho(x, t) v_i(x, t) v(x, t)) \right) dx = \mathcal{F}_i(\nu(t))$$

für alle $i \in \{1, 2, 3\}$, $t \in (t_1, t_2)$.

Analog zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung nutzen wir aus, dass $t_0 \in (0, T)$ ein beliebig gewählter Zeitpunkt ist und $\nu(t_0) = \nu_{t_0} \subset \bar{\nu}_{t_0} \subset \Omega_{t_0}$, wobei das Kontrollgebiet ν_{t_0} ebenfalls beliebig gewählt wird. Wieder setzen wir $t := t_0$ weshalb gilt

$$\int_{\nu_{t_0}} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t_0) v_i(x, t_0)) + \operatorname{div}_x (\rho(x, t_0) v_i(x, t_0) v(x, t_0)) \right) dx = \mathcal{F}_i(\nu_{t_0}, t_0) \quad (1.7)$$

für $i \in \{1, 2, 3\}$ ein beliebiges $t_0 \in (0, T)$ und ein beliebiges Kontrollgebiet $\nu_{t_0} \subset \Omega_{t_0}$, wobei der Vektor $\mathcal{F}(\nu_{t_0}, t_0)$ die auf ν_{t_0} im Zeitpunkt t_0 wirkende Kraft bezeichnet. Wir wollen diese Gleichung in eine differentielle Form überführen, weshalb wir den Vektor $\mathcal{F}(\nu_{t_0}, t_0)$ genauer betrachten müssen, indem wir eine Unterscheidung zwischen zwei Arten von Kräften vornehmen.

1.7 Wirkende Kräfte

Sei φ erneut eine beliebige Deformationsabbildung und sei $\bar{\Omega}_t$ der deformierte Zustand für $t \in I$. Ein allgemeiner Körper bzw. ein allgemeines Fluid wird grundsätzlich zwei Arten von Kräften ausgesetzt.

- **Volumskraft:** Wir betrachten ein Vektorfeld f_V , welches man als die *Volumskraftdichte* per Volumseinheit im deformierten Zustand bezeichnet

$$f_V : \Omega_t \times I \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Die *Volumskraft* $\mathcal{F}_V(\nu, t)$, welche in $t \in I$ auf die Teilchen in $\nu \subset \bar{\nu} \subset \Omega_t$ wirkt, wird über die Dichtefunktion $f_V \in [\mathcal{C}^0(\mathcal{D})]^3$ beschrieben:

$$\mathcal{F}_V(\nu, t) = \int_{\nu} f_V(x, t) dx.$$

- **Oberflächenkraft:** Wir betrachten auch ein Vektorfeld g , welches man als die *Oberflächenkraftdichte* per Flächeneinheit im deformierten Zustand bezeichnet

$$g : \Gamma_t^N \times I \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

wobei ein $\Gamma_t^N \subset \Gamma_t := \partial\Omega_t$ eine ds_x -messbare Menge ist. Die *Oberflächenkraft* \mathcal{F}_S , mit welcher die Teilchen außerhalb von $\nu \subset \Omega_t$ in $t \in I$ auf das Kontrollgebiet auf ein $\mathcal{S} \subset \partial\nu$ wirken, wird mit Hilfe der Dichtefunktion g dargestellt:

$$\mathcal{F}_S(\mathcal{S}, t) = \int_{\mathcal{S}} g(x, t) ds_x.$$

Wir nehmen darüber hinaus an, dass $g \in [\mathcal{C}^0(\mathcal{D})]^3$ ist. Die gesamte Oberflächenkraft $\mathcal{F}_S(\partial\nu, t)$, welche in t auf den Rand des Kontrollgebiets $\partial\nu$ wirkt, hat die analoge Form

$$\mathcal{F}_S(\partial\nu, t) = \int_{\partial\nu} g(x, t) ds_x.$$

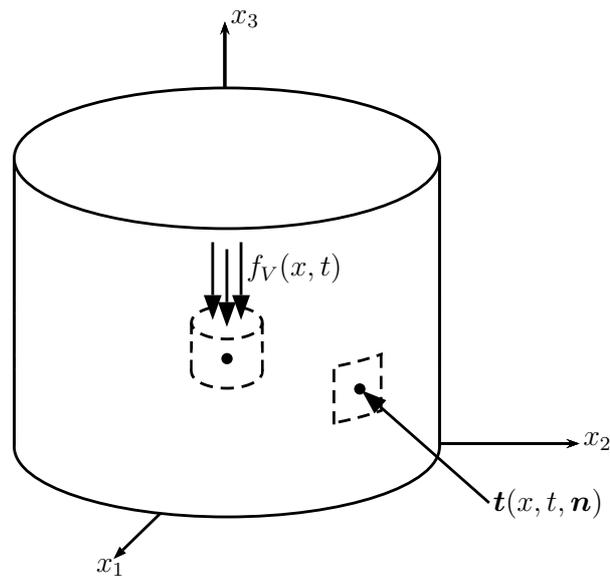


Abbildung 1.3: Visualisierung der Oberflächenkraftdichte und der Volumskraftdichte.

Der physikalische Hintergrund dieser Einflussgrößen erschließt sich mit der Einführung der *Massendichte* im deformierten Zustand $\rho : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, welche jeder λ_t -messbaren Menge $\nu \subset \bar{\Omega}_t$ eine Masse

$$m(\nu, t) = \int_{\nu} \rho(x, t) d\lambda_t(x) = \int_{\nu} \rho(x, t) dx$$

zuweist, wobei wir $\rho(x, t) > 0$ für alle $x \in \Omega_t, t \in I$ voraussetzen. Die auftretenden Volumskräfte können alternativ über eine Dichtefunktion $f : \Omega_t \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ per Volumseinheit im deformierten Zustand eingeführt werden

$$f_V(x, t) = \rho(x, t)f(x, t) \text{ für alle } x \in \Omega_t, t \in I.$$

Die wirkenden Kräfte repräsentieren den Einfluss der Umgebung auf einen Körper: Die elementare Kraftdichte $f_V(x, t)d\lambda_t(x)$ wirkt auf ein elementares Volumen $d\lambda_t(x)$ in jedem Punkt $x \in \Omega_t$ des deformierten Zustands.

Analog gilt für die elementare Kraftdichte $g(x, t)ds_x$, welche auf eine elementare Fläche ds_x in jedem Punkt $x \in \Gamma_t^N$ wirkt (siehe Abbildung 1.3).

1.8 Axiome des Kräfte- und Momentengleichgewichts

Axiom 1.10 (Spannungsprinzip). *Man betrachte einen Körper im deformierten Zustand $\bar{\Omega}_t$ auf den Kräfte wirken, welche wiederum über Dichtefunktionen $g : \Gamma_t^N \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $f_V : \Omega_t \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ angegeben werden. Dann existiert ein Vektorfeld*

$$\mathbf{t} : \bar{\Omega}_t \times I \times S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

wobei $S_1 := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1\}$ sodass gilt:

- Für jedes $t \in I$, jedes Teilgebiet $\nu(t) \subset \bar{\Omega}_t$ und jeden Punkt $x \in \Gamma_t^N \cap \partial\nu(t)$, wo der Außennormalvektor \mathbf{n} auf $\Gamma_t^N \cap \partial\nu(t)$ existiert, gilt

$$\mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) = g(x, t).$$

- **Axiom des Kräftegleichgewichts:** Für jedes $t \in I$ und jedes Teilgebiet $\nu(t) \subset \bar{\Omega}_t$ gilt

$$\int_{\nu(t)} \rho(x, t) f(x, t) dx + \int_{\partial\nu(t)} \mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) ds_x = \frac{d}{dt} \int_{\nu(t)} \rho(x, t) v(x, t) dx.$$

- **Axiom des Momentengleichgewichts:** Für jedes $t \in I$ und jedes Teilgebiet $\nu(t) \subset \bar{\Omega}_t$ gilt

$$\int_{\nu(t)} x \times (\rho(x, t) f(x, t)) dx + \int_{\partial\nu(t)} x \times \mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) ds_x = \frac{d}{dt} \int_{\nu(t)} x \times (\rho(x, t) v(x, t)) dx.$$

Bemerkung 1.11. Das Spannungsprinzip garantiert somit die Existenz von elementaren Oberflächenkräften $\mathbf{t}(x, t, \mathbf{n})$ entlang der Ränder aller Teilgebiete der Referenzkonfiguration. Für $x \in \bar{\Omega}_t, t \in I$ nennt man den Vektor $\mathbf{t}(x, t, \mathbf{n})$ den Cauchy'schen Spannungsvektor entlang eines orientierten Oberflächenelements mit Normale \mathbf{n} . Somit können wir die Oberflächenkraft jetzt angeben als

$$\mathcal{F}_S(\mathcal{S}, t) = \int_S \mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) ds_x.$$

Da $g \in [\mathcal{C}^0(\mathcal{D})]^3$ ist, folgt auch $\mathbf{t} \in [\mathcal{C}^0(\mathcal{D} \times S_1)]^3$.

1.9 Der Spannungstensor

Satz 1.12 (Transformationsformel, Eulersche Bewegungsgleichung). Sei die Volumskraftdichte $f_V : \Omega_t \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig und sei das Cauchy'sche Spannungsvektorfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{t} : \bar{\Omega}_t \times I \times S_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, t, \mathbf{n}) &\mapsto \mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}), \end{aligned}$$

bzgl. der Variable $x \in \bar{\Omega}_t$ für jedes $\mathbf{n} \in S_1, t \in I$ stetig differenzierbar und stetig bzgl. der Variable $\mathbf{n} \in S_1$ für jedes $x \in \bar{\Omega}_t, t \in I$.

Dann folgt aus dem Kräfte- und Momentengleichgewicht die Existenz eines stetig differenzierbaren Tensorfeldes

$$\begin{aligned} T : \bar{\Omega}_t \times I &\rightarrow \mathbb{M}^3 \\ (x, t) &\mapsto T(x, t), \end{aligned}$$

sodass für den Spannungsvektor

$$\mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) = T(x, t)\mathbf{n}(x, t) \text{ für alle } x \in \bar{\Omega}_t, n \in S_1, t \in I \quad (1.8)$$

die folgenden Eigenschaften gültig sind:

$$\rho(x, t) \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla_x)v(x, t) \right) \quad (1.9)$$

$$-\operatorname{div}_x T(x, t) = f_V(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Omega_t, t \in I, \quad (1.10)$$

$$T(x, t) = T(x, t)^\top \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega}_t, t \in I, \quad (1.11)$$

$$T(x, t)\mathbf{n}(x, t) = g(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_t^N, t \in I. \quad (1.12)$$

Dabei ist \mathbf{n} der Einheitsaußennormalvektor entlang von Γ_t^N . Man nennt den symmetrischen Tensor $T(x, t)$ den Cauchy'schen Spannungstensor im Punkt $x \in \bar{\Omega}_t, t \in I$.

Beweis. Die Herleitung der Transformationsformel (1.8) folgt aus dem Axiom des Kräftegleichgewichts. Siehe hierzu [4, S. 63].

Die Symmetrie des Spannungstensors wird mit Hilfe des Drehimpulserhaltungssatzes und des Kräftegleichgewichts bewiesen. Seien hierfür $\rho, v_i, T_{ij} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ und $f_i \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D})$ und $\nu = \nu(t)$ ein Kontrollgebiet für $i, j \in \{1, 2, 3\}, t \in (t_1, t_2)$, dann kann der Drehimpulserhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \int_{\nu(t)} x \times (\rho v)(x, t) dx = \int_{\nu(t)} x \times (\rho f)(x, t) dx + \int_{\partial\nu(t)} x \times \mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) ds_x$$

unter Zuhilfenahme der Transformationsformel, partieller Integration, des Kräftegleichgewichts und elementarer Umformungen in die Form

$$\int_{\nu(t)} (T_{23}(x, t) - T_{32}(x, t), T_{31}(x, t) - T_{13}(x, t), T_{12}(x, t) - T_{21}(x, t))^\top dx = 0$$

gebracht werden ([4, S. 65]). Der Drehimpulserhaltungssatz und das Kräftegleichgewicht sind somit genau dann erfüllt sind, wenn der Spannungstensor $T(x, t)$ symmetrisch ist.

Für den Beweis von (1.10) nehmen wir ebenfalls an, dass $\rho, v_i, T_{ij} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ und $f_i \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D})$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Setzen wir nun in (1.7) für $\mathcal{F}(\nu_{t_0}, t_0)$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{\nu_{t_0}} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho(x, t_0)v_i(x, t_0)) + \operatorname{div}_x(\rho(x, t_0)v_i(x, t_0)v(x, t_0)) \right) dx \\ &= \int_{\nu_{t_0}} \rho(x, t_0)f(x, t_0) dx + \int_{\partial\nu_{t_0}} T_{ji}(x, t_0)\mathbf{n}_j(x, t_0) ds_x \end{aligned}$$

für $i \in \{1, 2, 3\}$ ein beliebiges $t_0 \in (0, T)$ und ein beliebiges Kontrollgebiet $\nu_{t_0} \subset \Omega_{t_0}$. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes (Satz 1.8) und Satz 1.7 erhalten wir schließlich die *Bewegungsgleichung eines allgemeinen Fluids in differentieller konservativer*

Form,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)(x, t) + \operatorname{div}_x(\rho v_i v)(x, t) = \rho(x, t) f_i(x, t) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}(x, t)$$

für alle $(x, t) \in \mathcal{D}, i \in \{1, 2, 3\}$,

oder auch in kompakter Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}_x(\rho v_i v) = \rho f_i + (\operatorname{div}_x T)_i \text{ in } \mathcal{D} \text{ für alle } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.13)$$

Nach Anwendung der Produktregel gilt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \underbrace{\left(\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_j} v_j + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)}_{= \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_i v_j + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j}} = \rho(x, t) f_i(x, t) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}(x, t).$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung gilt

$$v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho v) \right) = v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j + \sum_{j=1}^3 \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = 0.$$

Damit erhalten wir die sog **konvektive Form der Bewegungsgleichung**

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v \cdot \operatorname{grad}_x v_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \text{ für } i \in \{1, 2, 3\},$$

oder auch in kompakterer Schreibweise

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (v \cdot \nabla_x) v = \operatorname{div}_x T + \rho f \text{ in } \mathcal{D}. \quad (1.14)$$

□

Bemerkung 1.13. Dieser Satz beinhaltet eine der wichtigsten Erkenntnisse der Kontinuumsmechanik: Der Spannungsvektor $\mathbf{t}(x, t, \mathbf{n})$ ist im zweiten Argument $\mathbf{n} \in S_1$ linear. Weiters folgt aus dem Beweis die Stetigkeit des Spannungstensor $T(x, t)\mathbf{n}(x, t)$. Die in diesem Satz hergeleiteten partiellen Differentialgleichung mit Randbedingung bilden das Grundgerüst der Kontinuumsmechanik. Man bezeichnet die Gleichungen (1.10)-(1.12) häufig auch als die Gleichungen des Kräftegleichgewichts des deformierten Zustands.

Kapitel 2

Herleitung der Gleichungen für lineare Elastizität

Nachdem wir im letzten Kapitel die eulersche Form der Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung als differentielle Form des Massen- und Impulserhaltungssatzes ermittelt haben, werfen wir nun einen eingehenden Blick auf die Umformulierung selbiger Gleichungen in die lagrangesche Schreibweise, um später die Materialgesetze für Festkörper in die lagrangeschen Gleichgewichtsgleichungen einarbeiten zu können.

2.1 Die Piola-Transformation

Definition 2.1 (Kofaktormatrix). Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}^n$ und sei $A'_{ij} \in \mathbb{M}^{(n-1)}$ jene Matrix, welche man durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte erhält. Man nennt

$$d_{ij} := (-1)^{i+j} \det A'_{ij}$$

den (i, j) -Kofaktor und

$$\text{Cof } A := (d_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}^n$$

die Kofaktormatrix von A .

Bemerkung 2.2. Für invertierbare Matrizen gilt

$$\text{Cof } A = (\det A) A^{-\top}.$$

Satz 2.3. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von $A \in \mathbb{M}^3$, dann sind $\lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_3, \lambda_1\lambda_2$ die Eigenwerte von $\text{Cof } A$.

Beweis. [4, S. 5] □

Definition 2.4 (Piola-Transformation). Sei φ eine Deformationsabbildung, welche auf $\bar{\Omega}_{t_0}$ injektiv ist, sodass die Matrix $\nabla\varphi(X, t)$ für alle $t \in I$ auf ganz $\bar{\Omega}_{t_0}$ regulär ist. Ist der Tensor $T(x, t)$ punktweise für $x = \varphi(X, t)$ für alle $t \in I$ in deformierten Zustand

gegeben, so stellen wir den Tensor $T(x, t)$ mit dem Tensor $\hat{T}(X, t)$ für Punkte X der Referenzkonfiguration folgendermaßen in Zusammenhang:

$$\hat{T}(X, t) := (\det \nabla \varphi(X, t)) T(x, t) \nabla \varphi(X, t)^{-\top} = T(x, t) \text{Cof } \nabla \varphi(X, t) \text{ mit } x = \varphi(X, t).$$

Der Grund für die Einführung der Piola-Transformation liegt in den einfachen Zusammenhängen, die sich für Divergenzen für T und Divergenzen von \hat{T} ergeben.

Satz 2.5 (Eigenschaften der Piola-Transformation). *Ist $\hat{T} : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{M}^3$ die Piola-Transformation von $T : \bar{\Omega}_t \times I \rightarrow \mathbb{M}^3$, dann gilt*

$$\text{div}_X \hat{T}(X, t) = (\det \nabla \varphi(X, t)) \text{div}_x T(x, t) \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I \text{ mit } x = \varphi(X, t).$$

Für Transformationen zwischen Referenzkonfiguration und deformierter Konfiguration ergibt sich für Kurvenintegrale

$$\hat{T}(X, t) \mathbf{N}(X, t) ds_X = T(x, t) \mathbf{n}(x, t) ds_x \text{ für alle } X \in \partial \Omega_{t_0}, t \in I \text{ mit } x = \varphi(X, t).$$

Wobei für Punkte $X \in \partial \Omega_{t_0}$ und $x \in \partial \Omega_t$ mit Einheitsnormalenvektor \mathbf{N} und \mathbf{n} folgender Zusammenhang gilt

$$\det \nabla \varphi(X, t) |\nabla \varphi(X, t)^{-\top} \mathbf{N}(X, t)| ds_X = |\text{Cof } \nabla \varphi(X, t) \mathbf{N}(X, t)| ds_X = ds_x.$$

Beweis. [4, S. 39] □

Bemerkung 2.6. • Die Aussagen von Satz 2.5 bleibt erhalten, wenn wir Ω_{t_0} durch ein beliebiges Teilgebiet $\nu_{t_0} \subset \Omega_{t_0}$ ersetzen.

- Aus der vorletzten Aussage von Satz 2.5 folgt (mit $T = I$) sofort, dass für die Außennormalvektoren in X und x gilt

$$\mathbf{n}(x, t) = \frac{\text{Cof } \nabla \varphi(X, t) \mathbf{N}(X, t)}{|\text{Cof } \nabla \varphi(X, t) \mathbf{N}(X, t)|} \text{ mit } x = \varphi(X, t).$$

Überdies haben wir somit alle relevanten Informationen zusammengetragen, um eine Aussage über die Längenänderung unter Deformationen zu treffen: Sei $\nu_{t_0} \subset \Omega_{t_0}$ ein Teilgebiet von Ω_{t_0} und $\Gamma_{t_0} \subset \partial \nu_{t_0}$ eine messbare Teilmenge, so gilt für $\Gamma_t = \varphi(\Gamma_{t_0}, t)$ und $t \in I$

$$\text{meas}(\Gamma_t) = \int_{\Gamma_t} 1 ds_x = \int_{\Gamma_{t_0}} (\det \nabla \varphi(X, t)) |\nabla \varphi^{-\top}(X, t) \mathbf{N}(X, t)| ds_X.$$

2.2 Der Verzerrungstensor

Im Falle der Differenzierbarkeit der Deformationsabbildung φ in einem Punkt $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ können wir (entsprechend der Definition der Fréchet-Differenzierbarkeit) für jeden Punkt $X + \delta X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ und jedes $t \in I$ folgende Aussage treffen

$$\varphi(X + \delta X, t) - \varphi(X, t) = \nabla \varphi(X, t) \delta X + o(|\delta X|; t).$$

Über die Definition des euklidischen Skalarprodukts ergibt sich automatisch

$$|\varphi(X + \delta X, t) - \varphi(X, t)|^2 = \delta X^\top \nabla \varphi^\top(X, t) \nabla \varphi(X, t) \delta X + o(|\delta X|^2; t).$$

Dies führt auf die Definition einer symmetrischen Matrix

$$C := \nabla \varphi^\top \nabla \varphi, \quad (2.1)$$

welche wir von nun an als *rechtsseitigen Cauchy-Green Verzerrungstensor* bezeichnen werden. Die Matrix C ist auf ganz $\bar{\Omega}_{t_0}$ positiv definit¹. Mit Hilfe der Substitutionsregel lassen sich so die Längen von Kurven im deformierten Zustand berechnen. Sei hierfür für ein kompaktes Intervall $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$

$$\Gamma_{t_0} = f(\tilde{I}), \quad f : \tilde{I} \rightarrow \bar{\Omega}_{t_0} \quad (2.2)$$

die Parametrisierung einer Kurve Γ_{t_0} der Referenzkonfiguration $\bar{\Omega}_{t_0}$. Die Länge dieser Kurve lässt sich berechnen ([13, S. 354]) durch

$$\text{meas}(\Gamma_{t_0}) := \int_{\tilde{I}} |f'(\xi)| d\xi = \int_{\tilde{I}} ((f'(\xi))^\top (f'(\xi)))^{1/2} d\xi = \sum_{i=1}^3 \int_{\tilde{I}} (f'_i(\xi) f'_i(\xi))^{1/2} d\xi.$$

Die Länge der deformierten Kurve $\Gamma_t = \varphi(\Gamma_{t_0}, t)$ erhalten wir analog

$$\begin{aligned} \text{meas}(\Gamma_t) &= \int_{\tilde{I}} |\nabla_X(\varphi(\cdot, t) \circ f)(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\tilde{I}} \left((\nabla \varphi(f(\xi), t) f'(\xi))^\top (\nabla \varphi(f(\xi), t) f'(\xi)) \right)^{1/2} d\xi \\ &= \int_{\tilde{I}} \left(f'(\xi)^\top \nabla \varphi(f(\xi), t)^\top \nabla \varphi(f(\xi), t) f'(\xi) \right)^{1/2} d\xi \\ &= \int_{\tilde{I}} \left(f'(\xi)^\top C(f(\xi), t) f'(\xi) \right)^{1/2} d\xi = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\tilde{I}} \left(f'_i(\xi) C_{ij}(f(\xi), t) f'_j(\xi) \right)^{1/2} d\xi. \end{aligned}$$

Für spätere Überlegungen führen wir den *linksseitigen Cauchy-Green Verzerrungstensor* ein

$$B := \nabla \varphi \nabla \varphi^\top, \quad (2.3)$$

welcher ebenfalls symmetrisch ist. Wir stellen fest, dass die charakteristischen Polynome von $C = F^\top F$ und $B = F F^\top$ gleich sind².

Um zu veranschaulichen, dass der Tensor C tatsächlich ein gutes Maß für die physikalische Interpretation der *Verzerrung* als Änderung von Größe und Form ist, betrachten wir eine Klasse an Deformationsabbildungen, welche keine Spannung erzeugen - die *Starrkörperverschiebungen*.

¹Dies folgt durch einfaches Einsetzen in unsere Definition: $\forall X \in \bar{\Omega}_{t_0}, \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : \xi^\top C(X, t) \xi = |\nabla \varphi(X, t) \xi|^2 > 0$ für beliebiges $t \in I$ und der Tatsache, dass nach Annahme der Deformationsgradient $\nabla \varphi$ regulär ist

²Dies folgt aus der Regularität von $\nabla \varphi$ und der Ähnlichkeit der beiden Matrizen C und B

Definition 2.7 (Allgemeine Starrkörperverschiebung). *Man nennt eine Deformationsabbildung eine Starrkörperverschiebung, falls für alle $t \in I$ eine orthogonale Matrix $A(t) \in \mathbb{O}_+^3$ und ein Vektor $a(t) \in \mathbb{R}^3$ existieren, sodass*

$$\varphi(X, t) = a(t) + A(t)X \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}.$$

Handelt es sich bei φ um eine solche Starrkörperverschiebung, so gilt $\nabla\varphi(X, t) = A(t)$ und somit

$$C = \nabla\varphi(X, t)^\top \nabla\varphi(X, t) = A(t)^\top A(t) = I \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I.$$

Unter gewissen Voraussetzungen kann auch die Umkehrung gezeigt werden.

Satz 2.8. *Sei $\Omega_{t_0} \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und sei $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega_{t_0}, \mathbb{R}^n)$ mit*

$$\nabla\varphi(X, t)^\top \nabla\varphi(X, t) = I \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I.$$

Dann existieren für jedes $t \in I$ ein Vektor $a(t) \in \mathbb{R}^n$ und eine orthogonale Matrix $A(t) \in \mathbb{O}^n$ sodass

$$\varphi(X, t) = a(t) + A(t)X \text{ für alle } X \in \Omega_{t_0}.$$

Beweis. [4, S. 45] □

Bemerkung 2.9. *Gilt zusätzlich für jedes $t \in I$ die Eigenschaft $\det \nabla\varphi(X, t) > 0$ für mindestens ein $X \in \Omega_{t_0}$ (wie im Falle einer Deformationsabbildung), so kann gezeigt werden, dass die gefundene Matrix $A(t)$ für alle $t \in I$ wieder eine Rotation ist (d.h. $A(t) \in \mathbb{O}_+^n$). Ist überdies φ auf ganz $\bar{\Omega}_{t_0} \times I$ stetig dann gilt*

$$\varphi(X, t) = a(t) + A(t)X \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I.$$

Durch Einführung des sogenannten *Green-St. Venant-Verzerrungstensors*

$$E := \frac{1}{2}(C - I),$$

erhalten wir aufgrund Satz 2.8 einen Kennwert, wie groß die Abweichung einer gegebenen Deformationsabbildung von einer Starrkörperverschiebung ist (denn $C = I$ für Starrkörperverschiebungen). Es kann gezeigt werden, dass durch Angabe des Tensors C die Deformation bis auf die Ausführung von Starrkörperverschiebungen eindeutig bestimmt ist ([4, S. 49]). Somit ergibt sich für den Verzerrungstensor C eine Darstellung³ über ∇u und den neu eingeführten Tensor E

$$C = \nabla\varphi^\top \nabla\varphi = I + \nabla u^\top + \nabla u + \nabla u^\top \nabla u = I + 2E,$$

$$E(u) := E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top + \nabla u^\top \nabla u).$$

³alternative Darstellung: $C_{ij} = \sum_{k=1}^3 \partial_i \varphi_k \partial_j \varphi_k$ bzw. $E_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \sum_{k=1}^3 \partial_i u_k \partial_j u_k)$

2.3 Der Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

Wir wollen jetzt die Deformationsabbildung und den Spannungstensor eines Körpers, welcher einem Kräftesystem ausgesetzt ist ermitteln. Die Gleichungen für das Kräftegleichgewicht der deformierten Konfiguration nützen uns hierbei jedoch nur wenig, da ihre Formulierung in eulerscher Beschreibungsweise Kenntnis über die gesuchte Deformationsabbildung φ erfordern würde. Wir führen aus diesem Grund eine Transformation in Lagrange-Koordinaten $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ der uns zur Verfügung stehenden Referenzkonfiguration durch. Dies werden wir mit der in Abschnitt 2.1 eingeführten Piola-Transformation bewerkstelligen. Wendet man selbige auf unseren Spannungstensor $T : \bar{\Omega}_t \times I \rightarrow \mathbb{M}^3$ an, so nennen wir $\hat{T} : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{M}^3$ mit

$$\hat{T}(X, t) = (\det \nabla \varphi(X, t)) T(x, t) \nabla \varphi(X, t)^{-\top} \text{ sodass } x = \varphi(X, t)$$

den *Ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor*. Für diesen habe wir bereits festgestellt, dass

$$\operatorname{div}_X \hat{T}(X, t) = (\det \nabla \varphi(X, t)) \operatorname{div}_x T(x, t) \text{ sodass } x = \varphi(X, t).$$

Genauso kann der Spannungsvektor $\mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) = T(x, t) \mathbf{n}(x, t)$ in einen entsprechenden Vektor $\hat{\mathbf{t}}(X, t, \mathbf{N})$ transformiert werden, sodass die Eigenschaft

$$\hat{\mathbf{t}}(X, t, \mathbf{N}) = \hat{T}(X, t) \mathbf{N}(X, t)$$

erhalten bleibt, wobei $\hat{T}(X, t)$ wieder den ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor und \mathbf{N} bzw. \mathbf{n} die entsprechenden Einheitsaußennormalvektoren in X bzw. x der betrachteten Teilgebiete ν_{t_0} und $\nu_t = \varphi(\nu_{t_0}, t)$ für $t \in I$ bezeichnen.

Da wir bereits den Zusammenhang $\hat{T}(X, t) \mathbf{N}(X, t) ds_X = T(x, t) \mathbf{n}(x, t) ds_x$ kennen, können wir den Vektor $\hat{\mathbf{t}}(X, t, \mathbf{N})$ über folgende Eigenschaft definieren:

$$\hat{\mathbf{t}}(X, t, \mathbf{N}) ds_X = \mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) ds_x.$$

Da nach Satz 1.12 $\mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) = T(x, t) \mathbf{n}(x, t)$ gilt, erhalten wir das gewünschte Verhältnis $\hat{\mathbf{t}}(X, t, \mathbf{N}) = \hat{T}(X, t) \mathbf{N}(X, t)$. Man nennt $\hat{\mathbf{t}}(X, t, \mathbf{N})$ den *Ersten Piola-Kirchhoff-Spannungsvektor* in $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ entlang eines orientierten Oberflächenelements mit Normalvektor $\mathbf{N}(X, t)$. Das Vektorfeld $\hat{\mathbf{t}} : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \times S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bemisst somit die Dichte der Oberflächenkraft per Flächeneinheit in der Referenzkonfiguration.

Es sei betont, dass die Symmetrie des ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors im Allgemeinen nicht erfüllt ist. Es gilt lediglich

$$\hat{T}(X, t)^\top = \nabla \varphi(X, t)^{-1} \hat{T}(X, t) \nabla \varphi(X, t)^{-\top} \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I.$$

Nichtsdestotrotz ist die Symmetrie des Spannungstensors im Referenzgebiet wünschenswert, da die *konstituierenden Gleichungen* später eine einfachere Form annehmen werden. Wir definieren aus diesem Grund den *Zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungsvektor* $\hat{\Sigma} : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{M}^3$

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(X, t) &= \nabla \varphi(X, t)^{-1} \hat{T}(X, t) \\ &= (\det \nabla \varphi(X, t)) \nabla \varphi(X, t)^{-1} T(x, t) \nabla \varphi(X, t)^{-\top} \text{ sodass } x = \varphi(X, t). \end{aligned}$$

Als nächstes transformieren wir die Volumskraftdichte $f_V : \Omega_t \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ in ein Vektorfeld $\hat{f}_V : \Omega_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass

$$\hat{f}_V(X, t) dX = f_V(x, t) dx \text{ für alle } x \in \Omega_t, t \in I \text{ sodass } x = \varphi(X, t).$$

Mit $dx = \det \nabla \varphi(X, t) dX$ erhalten wir

$$\hat{f}_V(X, t) = (\det \nabla \varphi(X, t)) f_V(x, t) \text{ sodass } x = \varphi(X, t). \quad (2.4)$$

Das Vektorfeld $\hat{f}_V : \Omega_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bemisst die Dichte der Volumskräfte per Volumseinheit in der Referenzkonfiguration.

Um die Gleichheit von Massen unter dX und $dx = \det \nabla \varphi(X, t) dX$ sicherzustellen definieren wir die *Massendichte* $\hat{\rho} : \Omega_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ der Referenzkonfiguration über $\rho : \Omega_t \times I \rightarrow \mathbb{R}$ des deformierten Zustands als

$$\hat{\rho}(X, t) = \det \nabla \varphi(X, t) \rho(x, t) \text{ sodass } x = \varphi(X, t). \quad (2.5)$$

Dieser Zusammenhang veranschaulicht (abgesehen von der Orientierungstreue von φ), dass $\det \nabla \varphi(X, t) > 0$ erforderlich ist, da $\rho(x, t) > 0$ sein sollte. Definieren wir die Dichte $\hat{f} : \Omega_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Volumskraftdichte per Volumseinheit im Referenzgebiet durch

$$\hat{f}_V(X, t) = \hat{\rho}(X, t) \hat{f}(X, t) \text{ für alle } X \in \Omega_{t_0}, t \in I, \quad (2.6)$$

so folgt unmittelbar der Zusammenhang

$$\hat{f}(X, t) = f(x, t) \text{ für alle } X \in \Omega_{t_0}, t \in I, x = \varphi(X, t) \quad (2.7)$$

für die Volumskraftdichten. Wollen wir jetzt die Randbedingung in Γ_t^N in eine ähnliche Bedingung über $\Gamma_{t_0}^N$ transformieren, so eignet sich der für diese Zwecke eingeführte erste Piola-Kirchhoff-Spannungsvektor: Für die Oberflächenkraftdichte $g : \Gamma_t^N \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ pro Einheitsfläche im deformierten Zustand, führen wir den Vektor $\hat{g} : \Gamma_{t_0}^N \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ über den Zusammenhang

$$\hat{g}(X, t) ds_X = g(x, t) ds_x \text{ für alle } x \in \Gamma_t^N, t \in I, x = \varphi(X, t)$$

ein. Somit erhalten wir mit Satz 2.5

$$\begin{aligned} \hat{g}(X, t) &= (\det \nabla \varphi(X, t)) |\nabla \varphi(X, t)|^{-\top} \mathbf{N}(X, t) |g(x, t) \\ &\text{für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I, x = \varphi(X, t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Das Vektorfeld $\hat{g} : \Gamma_{t_0}^N \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bemisst die Oberflächenkraftdichte pro Einheitsfläche in der Referenzkonfiguration, wobei \hat{g} definiert wurde, sodass $\hat{g}(X, t) ds_X = g(x, t) ds_x$. Wir haben somit die Gleichungen aus Satz 1.12 über den Deformierten Zustand in Gleichungen über die Referenzkonfiguration transformiert, die äußerlich eine ähnliche „Divergenzform“ aufweisen.

Satz 2.10 (Lagrangesche Formulierung der Bewegungsgleichung für den ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor). *Der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor*

$$\hat{T}(X, t) = (\det \nabla \varphi(X, t)) T(x, t) \nabla \varphi(X, t)^{-\top} \quad \text{sodass } x = \varphi(X, t)$$

erfüllt folgende Gleichungen im Referenzgebiet $\bar{\Omega}_{t_0}$:

$$\hat{\rho}_{t_0}(X) \frac{D\hat{v}}{Dt}(X, t) - \operatorname{div}_X \hat{T}(X, t) = \hat{\rho}_{t_0}(X) \hat{f}(X, t) \quad \text{für alle } X \in \Omega_{t_0}, t \in I, \quad (2.9)$$

$$\nabla \varphi(X, t) \hat{T}(X, t)^\top = \hat{T}(X, t) \nabla \varphi(X, t)^\top \quad \text{für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I, \quad (2.10)$$

$$\hat{T}(X, t) \mathbf{N}(X, t) = \hat{g}(X, t) \quad \text{für alle } X \in \Gamma_{t_0}^N, t \in I, \quad (2.11)$$

wobei $\hat{f} dX = f dx$, $\hat{g} ds_X = g ds_x$ und $\hat{\rho}_{t_0}(X)$ die Volumensdichte der Referenzkonfiguration ist.

Beweis. Die Kontinuitätsgleichung (1.6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}_x(\rho v)(x, t) = 0 \quad \text{für alle } t \in (0, T), x \in \Omega_t$$

haben wir bisher in eulerscher Schreibweise angegeben. Für die Transformation der Bewegungsgleichung in lagrangesche Koordinaten benötigen wir aber auch die Kontinuitätsgleichung in lagrangescher Schreibweise. Dafür gehen wir ähnlich wie im Beweis des Reynoldsschen Transporttheorems vor:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_{\nu(t)} \rho(x, t) dx \\ &= \int_{\nu(t_0)} \frac{d}{dt} (\rho(\varphi(X, t), t) J(X, t)) dX \\ &= \int_{\nu(t_0)} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(X, t) dX. \end{aligned}$$

Für $\hat{\rho} \in \mathcal{C}^0(\Omega_{t_0} \times I)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega_{t_0} \times I)$ folgt mit Satz 1.7, dass

$$\hat{\rho}(X, t) = k \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } t \in I.$$

Somit wissen wir ([11]), dass

$$\hat{\rho}_{t_0}(X) := \hat{\rho}(X, t_0) = \hat{\rho}(X, t) \quad \text{für alle } X \in \Omega_{t_0}, t \in I.$$

Mit Satz 2.5 wissen wir bereits, dass für den ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\hat{T}(X, t)$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_X \hat{T}(X, t) &= (\det \nabla \varphi(X, t)) \operatorname{div}_x T(x, t) \\ &= J(X, t) \operatorname{div}_x T(x, t) \quad \text{für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I \text{ mit } x = \varphi(X, t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Gemeinsam mit der materiellen Ableitung (1.2), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) und (2.12) können wir (1.10) in die lagrangesche Schreibweise überführen

$$\begin{aligned}
 (1.10) &\iff \rho(x, t) \frac{D\hat{v}}{Dt}(X, t) - \operatorname{div}_x T(x, t) = \rho(x, t) f(x, t) \\
 &\iff \rho(x, t) J(X, t) \frac{D\hat{v}}{Dt}(X, t) - J(X, t) \operatorname{div}_x T(x, t) = \rho(x, t) J(X, t) f(x, t) \\
 &\iff \hat{\rho}_{t_0}(X) \frac{D\hat{v}}{Dt}(X, t) - \operatorname{div}_X \hat{T}(X, t) = \hat{\rho}_{t_0}(X) \hat{f}(X, t)
 \end{aligned}$$

für alle $X \in \Omega_{t_0}, t \in I$.

Die Transformation der Neumanndaten folgt aus (2.8), siehe auch [4]. \square

Drückt man das Resultat für den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\hat{\Sigma}(X, t)$ aus, so erhält man analog zu Satz 2.10 folgendes Resultat.

Satz 2.11 (Lagrangesche Formulierung der Bewegungsgleichung für den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor). *Der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor*

$$\hat{\Sigma}(X, t) = (\det \nabla \varphi(X, t)) \nabla \varphi(X, t)^{-1} T(x, t) \nabla \varphi(X, t)^{-\top} \text{ sodass } x = \varphi(X, t)$$

erfüllt folgende Gleichungen im Referenzgebiet $\bar{\Omega}_{t_0}$:

$$\hat{\rho}_{t_0}(X) \frac{D\hat{v}}{Dt}(X, t) - \operatorname{div}_X \left(\nabla \varphi(X, t) \hat{\Sigma}(X, t) \right) = \hat{\rho}_{t_0}(X) \hat{f}(X, t) \quad \text{für alle } X \in \Omega_{t_0}, t \in I, \quad (2.13)$$

$$\hat{\Sigma}(X, t)^\top = \hat{\Sigma}(X, t) \quad \text{für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I, \quad (2.14)$$

$$\nabla \varphi(X, t) \hat{\Sigma}(X, t) \mathbf{N}(X, t) = \hat{g}(X, t) \quad \text{für alle } X \in \Gamma_{t_0}^N, t \in I, \quad (2.15)$$

wobei $\hat{f} dX = f dx$, $\hat{g} ds_X = g ds_x$ und $\hat{\rho}_{t_0}(X)$ die Volumskraftdichte der Referenzkonfiguration ist.

Die Gleichungen (2.9)-(2.11) und die Gleichungen (2.13)-(2.15) über Ω_{t_0} und Γ_{t_0} für beide Spannungstensoren nennt man die *Gleichungen des Kräftegleichgewichts der Referenzkonfiguration*.

2.4 Die Stoffgesetze - Elastische Materialien

Betrachten wir die Gleichungen des Kräftegleichgewichts für das Referenzgebiet (bzgl. eines der Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren) als Teil eines Randwertproblems, dessen Unbekannten die 6 Komponenten des Spannungstensors⁴ und die 3 Komponenten der

⁴unter Verwendung von $\nabla \varphi \hat{T}^\top = \hat{T} \nabla \varphi^\top$ oder $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}^\top$

Deformationsabbildung sind, so fällt augenblicklich auf, dass mit nur 3 Gleichungen die gesuchten 9 unbekannt Funktionen nicht eindeutig bestimmt werden können: Wir wollen jetzt weitere 6 Gleichungen einführen.

Die Unvollständigkeit des bisherigen mathematische Modells ist auch hinsichtlich der physikalischen Interpretation einleuchtend: Während die Kontinuitätsgleichung, die Bewegungsgleichung und die Gleichungen für das Kräfte- und Momentengleichgewicht unabhängig von einem konkreten Material (etwa Festkörper, Fluide oder Gase) sind, sollten auch gewisse Materialeigenschaften in den beschreibenden Gleichungen eine Rolle spielen.

Wir werden hier ausschließlich die grundlegendsten Materialtypen betrachten, für welche die benötigten zusätzlichen Gleichungen leicht hergeleitet werden können. Diese Einführung in die Thematik der Stoffgesetze verläuft nach dem Vorbild des gleichnamigen Kapitels in [4]. Für eine umfassendere Einführung konsultiere man beispielsweise die vom gleichen Autor verfassten Werke [2] und [3].

Definition 2.12 (Elastisches Material). *Wir bezeichnen ein Material als elastisch, falls eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \hat{T}^D : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \times \mathbb{M}_+^3 &\rightarrow \mathbb{S}^3 \\ (X, t, F) &\mapsto \hat{T}^D(X, t, F) \end{aligned}$$

existiert, sodass für jedes deformierte Gebiet $\bar{\Omega}_t$, welches ein aus diesem Material bestehender Körper für jedes $t \in I$ einnimmt, der Cauchy'sche Spannungstensor $T(x, t)$ in einem Punkt $x \in \bar{\Omega}_t$ in folgender Beziehung zu $\nabla\varphi(X, t)$ im dazugehörigen Punkt $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ des Referenzgebiets steht

$$T(x, t) = \hat{T}^D(X, t, \nabla\varphi(X, t)) \text{ mit } x = \varphi(X, t).$$

Man bezeichnet diese Relation als **Konstituierende Gleichung**, wobei man \hat{T}^D die **Wirkungsfunktion der Spannung** nennt.

Es sei betont, dass aus dieser Definition die enthaltene Wirkungsfunktion für jeden einzelnen Punkt $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$, für jedes $t \in I$ und für jede Matrix $F \in \mathbb{M}_+^3$ definiert sein muss. Diese Tatsache schließt mit ein, dass für einen jeden Punkt $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$, für jedes $t \in I$ und für jede Matrix $F \in \mathbb{M}_+^3$ eine Deformation φ mit $\nabla\varphi(X, t) = F$ existieren muss, indem man passende Kräfte und Randbedingungen festlegt. Aus diesem Grund schließt die Definition Materialien aus, für die Restriktionen an die Deformationsabbildung φ gestellt werden müssen.

Mit $\hat{T} = (\det \nabla\varphi)T\nabla\varphi^{-\top}$ und $\hat{\Sigma} = \nabla\varphi^{-1}\hat{T}$ existieren auch Abbildungen

$$\hat{T}^R : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{M}^3 \text{ und } \hat{\Sigma}^R : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$$

gegeben als

$$\begin{aligned} \hat{T}^R(X, t, F) &= (\det F)\hat{T}^D(X, t, F)F^{-\top} \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I, F \in \mathbb{M}_+^3, \\ \hat{\Sigma}^R(X, t, F) &= (\det F)F^{-1}\hat{T}^D(X, t, F)F^{-\top} \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I, F \in \mathbb{M}_+^3, \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}\hat{T}(X, t) &= \hat{T}^R(X, t, \nabla\varphi(X, t)) \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I, \\ \hat{\Sigma}(X, t) &= \hat{\Sigma}^R(X, t, \nabla\varphi(X, t)) \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I.\end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichungen werden als zu Definition 2.12 äquivalente Charakterisierung elastischer Materialien ebenfalls als *Konstituierende Gleichungen* bezeichnet. Die Abbildungen \hat{T}^R und $\hat{\Sigma}^R$ nennt man analog *Wirkungsfunktionen des ersten und zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors*.

Wir nennen ein Material im Referenzgebiet Ω_{t_0} *homogen*, falls die Wirkungsfunktion unabhängig von $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ ist, ansonsten bezeichnen wir das Material als *inhomogen*. Für ein homogenes elastisches Material vereinfacht sich die Konstituierende Gleichung auf

$$T(x, t) = \hat{T}^D(t, \nabla\varphi(X, t)) \text{ für alle } x \in \bar{\Omega}_t, t \in I.$$

Dabei ist Homogenität eine Eigenschaft, welche für eine gegebene Referenzkonfiguration erfüllt wird, nach der Deformation im Allgemeinen für $\bar{\Omega}_t$ aber nicht mehr zutrifft. Man beachte weiters, dass die Wirkungsfunktion \hat{T}^D bei einem elastischen Material unabhängig von einer konkreten Deformation φ ist, weshalb das Symbol φ in der Notation dieser Wirkungsfunktion auch nicht vorkommt. Auf der anderen Seite hängt der Cauchy'sche Spannungstensor $T(x, t)$ in x bei einem elastischen Material nur von $\nabla\varphi(X, t)$ und nicht von $\varphi(X, t)$ selber ab. Andernfalls würde der Spannungstensor durch Starrkörperverschiebungen beeinflusst werden.⁵

Die Wirkungsfunktion eines elastischen Materials ist *a priori*-abhängig von einer konkreten orthonormalen Basis und von der Referenzkonfiguration, da jede deformierte Konfiguration als neue Referenzkonfiguration gewählt werden kann.

Satz 2.13 (Cholesky-Zerlegung). *Sei $K \in \mathbb{S}_{>}^n$, dann existieren eindeutig bestimmte Matrizen $G, H \in \mathbb{S}_{>}^n$ sodass*

$$HH = H^2 = K.$$

In diesem Zusammenhang definieren wir das Symbol

$$K^{1/2} := H$$

Beweis. [10, S. 252], [4, S. 94] □

Satz 2.14. *Für eine reguläre Matrix $F \in \mathbb{M}^n$ existiert eine eindeutige Faktorisierung in*

$$F = RU \text{ bzw. } F = VS$$

wobei $R, S \in \mathbb{O}^n$ orthogonale und $U, V \in \mathbb{S}_{>}^n$ symmetrische positive definite Matrizen sind. Es gilt

$$\begin{aligned}U &= (F^\top F)^{1/2}, \\ V &= (FF^\top)^{1/2}, \\ R = S &= FU^{-1} = V^{-1}F.\end{aligned}$$

⁵für weiterführende Informationen siehe [4, S. 93]

Beweis. [4] □

Bemerkung 2.15. *Man beachte, dass falls Satz 2.14 auf eine Matrix F mit $\det F > 0$ angewandt wird, die orthogonale Matrix $R \in \mathbb{O}^n$ automatisch $\det R = 1$ erfüllt, also $R \in \mathbb{O}_+^n$.*

Somit gilt gemäß Satz 2.14 für den rechtsseitigen bzw. den linksseitigen Cauchy-Green Verzerrungstensor⁶

$$\begin{aligned} C &:= F^\top F = U^2, \\ B &:= FF^\top = V^2. \end{aligned}$$

Die Matrizen U und V sind zueinander über die orthogonale Matrix $R \in \mathbb{O}^n$ ähnlich, $V = RUR^\top$, weshalb auch B und C zueinander über $R \in \mathbb{O}^n$ ähnlich sind, $B = RCR^\top$. Diese Eigenschaft lässt sich auch ohne der Regularität der Matrix F zeigen. Damit haben sie die gleichen charakteristischen Polynome und Hauptinvarianten.

2.5 Die materielle Bezugssysteminvarianz

Definition 2.16 (Axiom der materiellen Bezugssysteminvarianz). *Man rotiere den deformierten Zustand $\bar{\Omega}_t^\varphi$ mit Deformationsabbildung φ in einen anderen Zustand $\bar{\Omega}_t^\psi$ mit Deformationsabbildung ψ , wobei $\psi = A\varphi$ für ein $A \in \mathbb{O}_+^3$. Dann soll gelten, dass*

$$\mathbf{t}^\psi(x^\psi, t, A\mathbf{n}) = A\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, t, \mathbf{n}) \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, \mathbf{n} \in S_1,$$

wobei $x^\psi = \psi(X, t)$, $x^\varphi = \varphi(X, t)$, $\mathbf{t}^\psi : \bar{\Omega}_t^\psi \times I \times S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{t}^\varphi : \bar{\Omega}_t^\varphi \times I \times S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Cauchy'schen Spannungsvektorfelder in den deformierten Zustände $\bar{\Omega}_t^\varphi$ und $\bar{\Omega}_t^\psi$ bezeichnen.

Da $\mathbf{t}^\psi(x^\psi, t, A\mathbf{n}) = T^\psi(x^\psi, t)A\mathbf{n} = A\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, t, \mathbf{n}) = AT^\varphi(x^\varphi)\mathbf{n}$ für jeden beliebigen Vektor $n \in S_1$ und beliebiges $t \in I$ gilt können wir folgern, dass für die Spannungstensoren

$$T^\psi(x^\psi, t) = AT^\varphi(x^\varphi, t)A^\top$$

gilt. Weiters gilt aufgrund von $x^\psi = Ax^\varphi$ die Eigenschaft $\nabla\psi(X, t) = A\nabla\varphi(X, t)$, sodass dieses Axiom somit nur erfüllt ist, wenn

$$\hat{T}^D(X, t, \nabla\psi(X, t)) = \hat{T}^D(X, t, A\nabla\varphi(X, t)) = A\hat{T}^D(X, t, \nabla\varphi(X, t))A^\top.$$

Satz 2.17. *Die Wirkungsfunktion $\hat{T}^D : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ der Cauchy'schen Spannung erfüllt das **Axiom der materiellen Bezugssysteminvarianz** genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:*

- Für alle $X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I$ gilt

$$\hat{T}^D(X, t, AF) = A\hat{T}^D(X, t, F)A^\top \text{ für alle } F \in \mathbb{M}_+^3, A \in \mathbb{O}_+^3.$$

⁶Dieses Resultat kann für jede beliebige Matrix $F \in \mathbb{M}^n$ gezeigt werde. [4, S. 98]

- Für alle $X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I$ gilt

$$\hat{T}^D(X, t, F) = R\hat{T}^D(X, t, U)R^\top \text{ für alle } F = RU \in \mathbb{M}_+^3,$$

wobei $F = RU$ mit $R \in \mathbb{O}^n, U \in \mathbb{S}_>^n$ die Faktorisierung nach Satz 2.14 ist,

- Eine Abbildung $\tilde{\Sigma} : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \times \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ existiert, sodass

$$\hat{\Sigma}^R(X, t, F) = \tilde{\Sigma}(X, t, F^\top F) \text{ für alle } F \in \mathbb{M}_+^3,$$

wobei $\hat{\Sigma}^R : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ die Wirkungsfunktion des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors ist.

Beweis. [4, S. 102] □

Mit der ersten Äquivalenzaussage aus Satz 2.17 folgt für alle $X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I$ durch Einsetzen sofort

$$\hat{T}^R(X, t, AF) = A\hat{T}^R(X, t, F) \quad \text{für alle } F \in \mathbb{M}_+^3, A \in \mathbb{O}_+^3, \quad (2.16)$$

$$\hat{\Sigma}^R(X, t, AF) = \hat{\Sigma}^R(X, t, F) \quad \text{für alle } F \in \mathbb{M}_+^3, A \in \mathbb{O}_+^3, \quad (2.17)$$

weshalb die Wirkungsfunktionen \hat{T}^R und $\hat{\Sigma}^R$ unabhängig von der Wahl eines konkreten Bezugssystems sind, falls diese (2.16) und (2.17) erfüllen.

2.6 Isotrope elastische Materialien

Definition 2.18. Man nennt ein elastisches Material **isotrop** in einem Punkt $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$, falls die Wirkungsfunktion der Cauchy'schen Spannung die Eigenschaft

$$\hat{T}^D(X, t, FA) = \hat{T}^D(X, t, F) \text{ für alle } F \in \mathbb{M}_+^3, A \in \mathbb{O}_+^3$$

besitzt, oder anders ausgedrückt, wenn eine Rotation der Referenzkonfiguration um einen Punkt $X \in \Omega_{t_0}$ keinen Einfluss auf den Cauchy'schen Spannungstensor hat. Ein das Referenzgebiet Ω_{t_0} ausfüllendes elastisches Material nennt man isotrop, falls dieses für jedes $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ isotrop ist.

Dies ist äquivalent zu jeder der Gleichungen

$$\hat{T}^R(X, t, FA) = \hat{T}^R(X, t, F)A \quad \text{für alle } F \in \mathbb{M}_+^3, A \in \mathbb{O}_+^3,$$

$$\hat{\Sigma}^R(X, t, FA) = A^\top \hat{\Sigma}^R(X, t, F)A \quad \text{für alle } F \in \mathbb{M}_+^3, A \in \mathbb{O}_+^3.$$

Satz 2.19. Die Wirkungsfunktion $\hat{T}^D : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ ist isotrop in $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ also

$$\hat{T}^D(X, t, FA) = \hat{T}^D(X, t, F) \text{ für alle } F \in \mathbb{M}_+^3, A \in \mathbb{O}_+^3$$

genau dann, wenn eine Abbildung $\bar{T}^D(X, t, \cdot) : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ existiert, sodass

$$\hat{T}^D(X, t, F) = \bar{T}^D(X, t, FF^\top) \text{ für alle } F \in \mathbb{M}_+^3.$$

Beweis. [4, S. 107] □

Definition 2.20 (Invarianten einer Matrix). *Eine Invariante einer Matrix $A \in \mathbb{M}^n$ ist eine reelle Funktion $\omega : \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\omega(A) = \omega(B^{-1}AB) \text{ für alle } B \in \mathbb{M}^n, B \text{ regulär.}$$

Definition 2.21 (Hauptinvarianten). *Die **Hauptinvarianten** einer Matrix $A \in \mathbb{M}^3$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind die Terme*

$$\begin{aligned} \tau_1(A) &= a_{ii} = \text{Spur } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \tau_2(A) &= \text{Spur Cof } A = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \\ \tau_3(A) &= \det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Für das charakteristische Polynom der Matrix A gilt

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \tau_1(A)\lambda^2 - \tau_2(A)\lambda + \tau_3(A).$$

Wir definieren nun für eine Matrix $A \in \mathbb{M}^3$ das Tripel $\tau_A := (\tau_1(A), \tau_2(A), \tau_3(A))$.

Satz 2.22 (Darstellungssatz von Rivlin-Ericksen). *Eine Abbildung $\hat{T} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ erfüllt*

$$\hat{T}(AF) = A\hat{T}(F)A^\top \text{ und } \hat{T}(FA) = \hat{T}(F) \text{ für alle } F \in \mathbb{M}_+^3, A \in \mathbb{O}_+^3$$

genau dann, wenn

$$\hat{T}(F) = \bar{T}(FF^\top) \text{ für alle } F \in \mathbb{M}_+^3.$$

Dabei lässt sich $\bar{T} : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ schreiben als

$$\bar{T}(B) = \beta_0(\tau_B)I + \beta_1(\tau_B)B + \beta_2(\tau_B)B^2 \text{ für alle } B \in \mathbb{S}_>^3,$$

wobei β_0, β_1 und β_2 reelle Funktionen der drei Hauptinvarianten von B sind.

Beweis. [4, S. 110] □

Satz 2.23. *Gegeben sei ein elastisches Material, dessen Wirkungsfunktion vom gewählten Bezugssystem unabhängig und für alle $t \in I$ isotrop in $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ ist. Für eine beliebige Deformation $\varphi : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist der Cauchy'sche Spannungstensor in x gegeben durch*

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \hat{T}^D(X, t, \nabla\varphi(X, t)) \\ &= \bar{T}^D(X, t, \nabla\varphi(X, t)\nabla\varphi(X, t)^\top) \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I, x = \varphi(X, t), \end{aligned}$$

wobei die Wirkungsfunktion $\bar{T}^D(X, t, \cdot) : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ sich schreiben lässt als

$$\bar{T}^D(X, t, B) = \beta_0(X, t, \tau_B)I + \beta_1(X, t, \tau_B)B + \beta_2(X, t, \tau_B)B^2 \text{ für alle } B \in \mathbb{S}_>^3, \quad (2.18)$$

wobei $\beta_0(X, t, \cdot)$, $\beta_1(X, t, \cdot)$ und $\beta_2(X, t, \cdot)$ reellwertige Funktionen der drei Hauptinvarianten von $B = FF^\top$ sind. Der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor in $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ ist

$$\hat{\Sigma}(X, t) = \hat{\Sigma}^R(X, t, \nabla\varphi(X, t)) = \tilde{\Sigma}(X, t, \nabla\varphi(X, t))^\top \nabla\varphi(X, t),$$

wobei die Wirkungsfunktion $\tilde{\Sigma}(X, t, \cdot) : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ sich schreiben lässt als

$$\tilde{\Sigma}(X, t, C) = \gamma_0(X, t, \tau_C)I + \gamma_1(X, t, \tau_C)C + \gamma_2(X, t, \tau_C)C^2 \text{ für alle } C \in \mathbb{S}_>^3,$$

wobei $\gamma_0(X, t, \cdot)$, $\gamma_1(X, t, \cdot)$ und $\gamma_2(X, t, \cdot)$ reellwertige Funktionen der drei Hauptinvarianten von $C = F^\top F$ sind.

Umgekehrt, falls beide Wirkungsfunktionen \bar{T}^D und $\tilde{\Sigma}$ sich in der obigen Form schreiben lassen, so ist das Axiom Definition 2.16 erfüllt und das Material ist isotrop in $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$.

Beweis. [4, S. 116] □

Im Gegensatz zum zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\hat{\Sigma}(X, t)$, können wir den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\hat{T}(X, t)$ nicht als Ausdruck der symmetrischen Tensoren $B = FF^\top$ und $C = F^\top F$ schreiben. Aber obwohl sich die konstitutive Gleichung somit einfacher mit dem zweiten als den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor darstellen lassen, lässt sich nur der erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor natürlich in die Gleichungen des Kräftegleichgewichts der Referenzkonfiguration einbinden.

Definition 2.24. *Wir bezeichnen*

$$\hat{T}_R(X, t) := \hat{T}^D(X, t, I) = \hat{T}(X, t, I) = \hat{\Sigma}(X, t, I) = \tilde{\Sigma}(X, t, I)$$

als den residualen Spannungstensor im Punkt $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ für jedes $t \in I$ durch Einsetzen einer konkreten Deformationen $\varphi = \text{id}_{\bar{\Omega}}$.

Damit folgt sofort aus Satz 2.23, dass falls ein elastisches Material in einem Punkt $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ isotrop ist, der residuale Spannungstensor in X sich nur aus dem Druck $\hat{p}(X, t)$ zusammensetzt (und somit ein Vielfaches der Einheitsmatrix I ist), da mit (2.18) gilt

$$\nabla\varphi(X, t) = I \implies T(x) = \hat{T}^D(X, t, I) = -\hat{p}(X, t)I \text{ mit } x = \varphi(X, t),$$

wobei konkret $-\pi(X, t) = \beta_0(X, t, \tau_I) + \beta_1(X, t, \tau_I) + \beta_2(X, t, \tau_I)$ ist. Diese Erkenntnis steht im Einklang mit der intuitiven Vorstellung von einem isotropen Material, sich in einem Punkt $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ in jede Richtung gleichermaßen zu verhalten, weshalb der Cauchy'sche Spannungstensor nur Druck sein soll. Falls jedoch das gleiche elastische Material eine beliebige Deformation durchläuft, so geht die Eigenschaft der Isotropie für gewöhnlich verloren, da nach Satz 2.23 nicht erwartet werden kann, dass die Matrix $\hat{T}^D(X, t, F)$ für eine beliebige Matrix $F \in \mathbb{M}_+^3$ sich als Vielfaches der Einheitsmatrix darstellen lässt. Isotropie ist somit eine Eigenschaft, welche unter Deformationen im Allgemeinen nicht erhalten bleibt.

Definition 2.25 (Natürlicher Zustand). *Eine Referenzkonfiguration $\bar{\Omega}_{t_0}$ befindet sich im natürlichen Zustand genau dann, wenn*

$$\hat{T}_R(X, t) = 0 \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I.$$

Diese Definition entspricht der Vorstellung, dass für einen Körper ein *spannungsfreier Zustand* existiert.

Satz 2.26. *Falls sich ein Referenzgebiet im natürlichen Zustand befindet, so befindet sich die deformierte Konfiguration nach einer Starrkörperverschiebung wieder im natürlichen Zustand, sofern diese als neues Referenzgebiet gewählt wird.*

Beweis. Sei $\varphi : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Starrkörperverschiebung, sodass $\nabla\varphi(X, t) = A(t) \in \mathbb{O}_+^3$ für alle $X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I$. Mit Satz 2.23 folgt

$$\hat{T}^D(X, t, A) = \bar{T}^D(X, t, I) = 0.$$

□

Bemerkung 2.27. *Die Existenz spannungsfreier Zustände macht für elastische Festkörper Sinn. Gase hingegen sind jedoch ein Beispiel für elastische Fluide, welche keinen spannungsfreien Zustand kennen.*

Wir haben bereits in Abschnitt 2.2 gesehen, dass der Green-St. Vernant-Verzerrungstensor $E = \frac{1}{2}(C - I)$ in gewisser Weise die Abweichung einer gegebenen Deformationsabbildung von einer Starrkörperverschiebung wiedergibt. Es ist daher naheliegend, die Differenz der Wirkungsfunktion $\tilde{\Sigma}(X, t, \cdot)$ des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors in $X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I$

$$\tilde{\Sigma}(X, t, I + 2E) - \tilde{\Sigma}(X, t, I)$$

bzgl. des rechtsseitigen Cauchy-Green Verzerrungstensors C bis zu einer gewünschten Ordnung von $\|E\|$ genauer zu betrachten. Desweiteren interessieren wir uns auch für eine Darstellung (bis zu einer gewünschten Ordnung des Tensors E) des Spannungstensors $\tilde{\Sigma}$, bezogen auf einen deformierten Zustand in der Nähe der Referenzkonfiguration. Wir betrachten hierfür die Entwicklung einer beliebigen Matrixfunktion $\tilde{A} : \mathbb{M}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{A}(I + 2E) = \tilde{A}(I) + 2 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial C_{ij}} E_{ij} + o(E) \in \mathbb{S}^3 \text{ mit } I + 2E \in \mathbb{S}_{>}^3.$$

Das Ergebnis des folgenden Theorems ist dabei überraschend: Während (unter Berücksichtigung der Symmetrie) 36 Unbekannte $(\partial \tilde{A}_{ij} / \partial C_{kl})(I)$ im Term erster Ordnung auftauchen, verringert sich deren Anzahl dank der starken Voraussetzung der Isotropie auf zwei.

Satz 2.28. Gegeben sei ein elastisches Material, dessen Wirkungsfunktion vom gewählten Bezugssystem unabhängig und isotrop in $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ ist. Seien desweiteren die Funktionen $\gamma_\alpha(X, t, \cdot)$ für $\alpha = 0, 1, 2$ aus Satz 2.23 im Punkt $\tau_I = (3, 3, 1)$ differenzierbar, dann finden sich Konstanten $\hat{p}(X, t), \lambda(X, t), \mu(X, t) \in \mathbb{R}$ sodass

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(X, t, C) &= -\hat{p}(X, t)I + \lambda(X, t)(\text{Spur } E)I + 2\mu(X, t)E + o(E; X, t) \\ &\text{für alle } C = I + 2E \in \mathbb{S}_>^3. \end{aligned}$$

Beweis. Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Rivlin-Ericksen Satz 2.22 und Satz 2.23. [4, S. 119] \square

Satz 2.29. Gegeben sei ein homogenes, isotropes und elastisches Material, dessen Referenzkonfiguration im natürlichen Zustand ist. Sind die Funktionen γ_α für $\alpha = 0, 1, 2$ aus Satz 2.23 im Punkt $\tau_I = (3, 3, 1)$ differenzierbar, dann finden sich Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sodass die Wirkungsfunktion $\hat{\Sigma} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ in folgender Form geschrieben werden kann

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^R(F) &= \tilde{\Sigma}(C) = \lambda(\text{Spur } E)I + 2\mu E + o(E), \\ C &= F^\top F = I + 2E \text{ für alle } F \in \mathbb{M}_+^3. \end{aligned}$$

In diesem konkreten Fall bezeichnet man die Konstanten λ, μ als die **Lameschen Konstanten** des betrachteten Materials. Physikalische Überlegungen ergeben

$$\lambda, \mu > 0.$$

Es sei betont, dass die Existenz der Lameschen Konstanten aus den konstitutierenden Gleichungen in Bezug auf den Green-St. Venant-Verzerrungstensor $E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top + \nabla u^\top \nabla u)$ hergeleitet werden können und nicht - wie in vielen Büchern zu finden ist - lediglich in Bezug auf den *linearisierten Verzerrungstensor* $\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top)$.

2.7 Die Laméschen Gleichungen

Falls wir die Terme höherer Ordnung in Satz 2.29 in der Entwicklung des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors vernachlässigen können⁷, erhalten wir eine einfachere Wirkungsfunktion.

Definition 2.30. Man nennt ein Material ein *St. Venant-Kirchhoff-Material*, falls ihre Wirkungsfunktion für den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor sich schreiben lässt als

$$\tilde{\Sigma}(E) = \tilde{\Sigma}(I + 2E) = \lambda(\text{Spur } E)I + 2\mu E \text{ für alle } I + 2E \in \mathbb{S}_>^3,$$

wobei $\lambda, \mu > 0$ Konstanten sind.

⁷wie beispielsweise bei der Modellierung vergleichsweise geringer Verschiebungen und Verzerrungen

Ein solches Material ist offensichtlich homogen und die Referenzkonfiguration $\bar{\Omega}_{t_0}$ befindet sich im natürlichen Zustand. Überdies gilt

$$\check{\Sigma}(C) = \left(\frac{\lambda}{2}(\tau_1(C) - 3) - \mu \right) I + \mu C \text{ mit } C = I + 2E,$$

wobei $\tau_1(C) = \text{Spur } C$, weshalb das Material nach Satz 2.23 isotrop und unabhängig vom gewählten Bezugssystem ist. Aus diesem Grund handelt es sich bei λ, μ tatsächlich um die Lameschen Konstanten eines St. Venant-Kirchhoff-Materials.

Man beachte, dass die Abbildung $E \mapsto \check{\Sigma}(E)$ eines St. Venant-Kirchhoff-Materials nach Definition linear ist, wenngleich die dazugehörige Abbildung

$$u \mapsto \check{\Sigma}(E(u)) = \lambda(\text{Spur } \nabla u)I + \mu(\nabla u + \nabla u^\top) + \frac{\lambda}{2}(\text{Spur } \nabla u^\top \nabla u)I + \mu \nabla u^\top \nabla u,$$

aufgrund der quadratischen Terme $\nabla u^\top \nabla u$ nicht mehr linear ist. Dabei gilt mit dem Verschiebungsvektorfeld $u : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ für den Verzerrungstensor

$$E(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^\top + \nabla u^\top \nabla u).$$

Betrachtet man lediglich kleine Verschiebungen, so erhalten wir durch Einführung des linearisierten Verzerrungstensors

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^\top)$$

erwartungsgemäß ein lineares System partieller Differentialgleichungen, welches wir nun angeben wollen.

Satz 2.31 (Lamesche Gleichungen der Elastodynamik). *Für ein St. Venant-Kirchhoff-Material vereinfachen sich die Gleichungen (2.13)-(2.15) im Referenzgebiet $\bar{\Omega}_{t_0}$ auf die Form*

$$\hat{\rho}_{t_0}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(X, t) - \mu \Delta_X u(X, t) \tag{2.19}$$

$$-(\lambda + \mu) \nabla_X (\text{div}_X u(X, t)) = \hat{\rho}_{t_0}(X) \hat{f}(X, t) \quad \text{für alle } X \in \Omega_{t_0}, t \in I, \tag{2.20}$$

$$\check{\Sigma}(X, t, \mathcal{E}) \mathbf{N}(X, t) = \hat{g}(X, t) \quad \text{für alle } X \in \Gamma_{t_0}^D, t \in I, \tag{2.21}$$

wobei $\check{\Sigma}(X, t, \mathcal{E}) = \check{\Sigma}(I + 2\mathcal{E}) = \lambda(\text{Spur } \mathcal{E})I + 2\mu\mathcal{E}$, $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^\top)$ bzw. $\hat{f} dX = f dx$, $\hat{g} ds_X = g ds_x$ und $\hat{\rho}_{t_0}(X)$ die Volumskraftdichte der Referenzkonfiguration ist.

Beweis. Einfaches Einsetzen von

$$\hat{\Sigma}(X, t) = \check{\Sigma}(X, t, \mathcal{E}) = \lambda(\text{Spur } \mathcal{E})I + 2\mu\mathcal{E}$$

in (2.13) und elementare Umformungen - siehe zB. [14, S. 63], [7], [15]. Der Zusammenhang

$$\hat{T}(X, t) = \nabla \varphi(X, t) \hat{\Sigma}(X, t) = \nabla \varphi(X, t) \check{\Sigma}(X, t, \mathcal{E}) = \check{\Sigma}(X, t, \mathcal{E}) + o(\|\nabla u\|)$$

folgt mit der Definition von $E = \mathcal{E} + o(\|\nabla u\|)$ und unter Vernachlässigung höherer Terme von ∇u . Mit den gleichen Argumenten ließe sich auch

$$T(x, t) = \hat{T}(X, t) + o(\|\nabla u\|) = \hat{\Sigma}(X, t) + o(\|\nabla u\|)$$

zeigen - siehe zB. [7], [4]. □

Satz 2.32 (Das Anfangsrandwertproblem für die instationären Lameschen Gleichungen für St. Venant-Kirchhoff-Materialien⁸). *Gesucht ist das Verschiebungsfeld $u(x, t)$ sodass für alle $(X, t) \in \Omega_{t_0} \times I$ die Lameschen Gleichungen*

$$\rho_{t_0}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(X, t) - \mu \Delta_X u(X, t) - (\lambda + \mu) \nabla_X (\operatorname{div}_X u(X, t)) = \rho_{t_0}(X) \hat{f}(X, t)$$

gelten. Dazu kommen die Anfangsbedingungen

$$u(X, t_0) = 0 \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}$$

und Randbedingungen für $\partial\Omega_{t_0} = \Gamma_{t_0}^D \cup \Gamma_{t_0}^N$ wie zB.

$$\begin{aligned} u(X, t) &= \hat{g}^D(X, t) \text{ für alle } (X, t) \in \Gamma_{t_0}^D \times I \\ \check{\Sigma}(X, t, \mathcal{E}) \mathbf{N}(X, t) &= \hat{\mathbf{t}}(X, t, \mathbf{N}) = \hat{g}^N(X, t) \text{ für alle } (X, t) \in \Gamma_{t_0}^N \times I \end{aligned}$$

wobei wieder $\check{\Sigma}(X, t, \mathcal{E}) = \check{\Sigma}(I + 2\mathcal{E}) = \lambda(\operatorname{Spur} \mathcal{E})I + 2\mu\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top)$.

Für Aussagen zu Existenz und Eindeutigkeit hyperbolischer Differentialgleichungen konsultiere man beispielsweise [8]. Nähere Informationen zur variationellen Formulierung partieller Differentialgleichungen der Kontinuumsmechanik findet man beispielsweise in [4], [2] und [3].

⁸für weitere Informationen siehe zB. [14, S. 65]

Kapitel 3

Herleitung der Navier-Stokes Gleichungen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der mathematischen Modellierung von Fluiden befassen. Abhängig von der Kompressibilität und dem Ausdehnungsvermögen unterscheidet man Fluide in *Liquide* (zB. Wasser, Öl) und *Gase* (zB. Luft, Dampf). Die charakteristische Eigenschaft eines Gases ist, unter Druck das Volumen zu ändern (*Kompressibilität*), weshalb man solche Gase auch als *kompressible Fluide* bezeichnet. Aufgrund ihres *Ausdehnungsvermögens* breiten sich Gase im ganzen ihnen zur Verfügung stehenden Raum aus. Dieses Verhalten von Fluiden wird von atomaren Kräften bestimmt. Die Fähigkeit Verformungen zu widerstehen nennt man *Viskosität*. Viskose Kräfte wirken Geschwindigkeitsunterschieden zwischen den Schichten eines Fluids entgegen und ähneln damit der Reibung in der Festkörpermechanik. Lässt sich die Viskosität vernachlässigen, so spricht man von *invisciden Fluiden*.

Im Gegensatz zu den Gleichungen der Elastizitätstheorie aus Kapitel 2 existiert ein für die Lösung der beschreibenden Gleichungen problematisches Verhältnis zwischen dem Spannungs- und Verzerrungstensor (und daher mit dem Gradienten der Deformationsabbildung). Ist dieses Verhältnis linear, so spricht man von einem *Newtonschen Fluid*.

3.1 Die Stoffgesetze - Fluide

Konkrete Verhältnisse zwischen dem Spannungstensor und anderen Fluide beschreibende Einflussgrößen, insbesondere die Geschwindigkeit und deren Ableitungen, werden mittels sog. *rheologischer Gleichungen* ([7]) behandelt. Vernachlässigt man die innere Reibung in einem Fluid (dh. $T_{ij} = 0$ für $i \neq j$), so erhält man für den Spannungstensor die einfachste Form einer rheologischen Gleichung (für inviscide Fluide):

$$T(x, t) = -p(x, t)I \text{ für alle } x \in \bar{\Omega}_t, t \in I. \quad (3.1)$$

Da somit $\operatorname{div}_x T = -\operatorname{grad}_x p$ ist, lässt sich die Bewegungsgleichung in konservativer- bzw. konvektiver Form schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}_x(\rho v_i v) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i, \text{ für } i \in \{1, 2, 3\}, \\ \text{bzw. } \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v \cdot \operatorname{grad}_x v_i &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i, \text{ für } i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Man nennt diese Gleichungen auch *Euler-Gleichungen*. Neben dem Druck wirken auch Scherkräfte der Reibung aufgrund der Viskosität eines Fluids, weshalb man auch folgenden Ansatz wählen kann

$$T = -pI + \tau \text{ in } \bar{\Omega}_t \times I.$$

Um einen passenden Viskositätsanteil τ zu ermitteln, betrachten wir die sog. *Stokes'schen Postulate*:

1. Der Viskositätsanteil hängt stetig vom *Deformationsratentensor* ([15])

$$D = D(v) = (d_{ij})_{i,j=1}^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_{i,j=1}^3$$

ab, dh. für ein passendes Tensorfeld $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{M}^3, \mathbb{M}^3)$ können wir τ angeben als

$$\tau = f(D).$$

2. Fluide sind isotrope Medien, weshalb das Tensorfeld f invariant unter orthogonalen Transformationen ist. Daher gilt für alle $A \in \mathbb{O}^3$

$$\tau = f(D) = f(ADA^\top) = A\tau A^\top.$$

3. Das Tensorfeld f sei linear und

$$f(0) = 0.$$

Satz 3.1. *Unter Annahme der Stokes'schen Postulate 1.-3. gilt für den Spannungstensor*

$$T = (-p + \lambda \operatorname{div}_x v)I + 2\mu D(v), \quad (3.2)$$

wobei λ, μ skalare Funktionen oder Konstanten thermodynamischer Größen sind.

Sollte der Spannungstensor wie in Satz 3.1 linear vom Deformationsratentensor abhängen, so nennt man das zugrundeliegende Fluid ein *Newtonsches Fluid*. Damit folgt, dass

$$(\operatorname{div}_x T)_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (p - \lambda \operatorname{div}_x v) + \sum_{j=1}^3 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\mu (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}))}_{=2\mu \partial_j d_{ji}}.$$

Unter der Annahme, dass $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ und $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D})$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und Einfügen von (3.2) in die konservative- bzw. in die konvektive Bewegungsgleichung (1.13) bzw. (1.14), erhalten wir die Navier-Stokes-Gleichungen für $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}_x(\rho v_i v) &= \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_i}(-p + \lambda \operatorname{div}_x v) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right), \\ \text{bzw. } \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v \cdot \operatorname{grad}_x v_i &= \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_i}(-p + \lambda \operatorname{div}_x v) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right). \end{aligned}$$

Aus physikalischen Überlegungen folgt $\mu \geq 0$ und $3\lambda + 2\mu = 0$. Unter den Voraussetzungen

1. $\rho(x, t) = \text{const}$
2. $\mu = \text{const} \geq 0$

folgt zum einen $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ woraus gemeinsam mit (1.6) $\operatorname{div}_x v = 0$ in \mathcal{D} folgt. Darüber hinaus lassen sich damit die obigen Gleichungen weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right] \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta_x v_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\operatorname{div}_x v}_{=0} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta_x v_i. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung in konservativer- bzw. konvektiver Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}_x(\rho v_i v) &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta_x v_i, \\ \text{bzw. } \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v \cdot \operatorname{grad}_x v_i &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta_x v_i, \text{ für } i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Nach Division durch ρ und der Einführung der *kinematischen Viskosität* $\alpha := \frac{\mu}{\rho} \geq 0$ ergibt sich

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad}_x v_i = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \alpha \Delta_x v_i, \text{ für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

3.2 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Satz 3.2 (Das Anfangswertproblem für die Navier-Stokes-Gleichungen für instationäre, inkompressible Fluide). *Gesucht sind das Geschwindigkeitsfeld $v(x, t)$ und das Druckfeld $p(x, t)$ mit $(x, t) \in \bar{\Omega}_t \times I$ sodass für alle $(x, t) \in \Omega_t \times I$*

- die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \alpha \Delta_x v_i + v \cdot \text{grad}_x v_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \text{ für alle } i \in \{1, 2, 3\} \text{ in } \mathcal{D}$$

oder kompakt aufgeschrieben

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \Delta_x v + (v \cdot \nabla_x) v + \frac{1}{\rho} \nabla_x p = f \text{ in } \mathcal{D}$$

- die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div}_x v = 0 \text{ in } \mathcal{D}$$

gelten. Dazu kommen die Anfangsbedingungen

$$v(x, t_0) = v_0(x) \text{ für alle } x \in \bar{\Omega}_{t_0}$$

und Randbedingungen für $\partial\Omega_t = \bar{\Gamma}_t^D \cup \bar{\Gamma}_t^N$ wie z.B.

$$\begin{aligned} v(x, t) &= g^D(x, t) && \text{für alle } (x, t) \in \Gamma_t^D \times I, \\ T(x, t) \mathbf{n}(x, t) &= \mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) = g^N(x, t) && \text{für alle } (x, t) \in \Gamma_t^N \times I. \end{aligned}$$

wobei $T(x, t)$ wie in (3.2) definiert ist.

Kapitel 4

Kopplung der Gleichungen für Fluide und Körper

Nachdem wir nun die Grundgleichungen der Strömungslehre und der Festkörpermechanik kennen, interessieren wir uns jetzt für eine Möglichkeit, beide miteinander zu koppeln, um ein *Fluid-Struktur-Kopplungs-Problem* zu erhalten. Die Problemform tritt in vielen verschiedenen Anwendungsgebieten der Physik und Ingenieurwissenschaften auf, um beispielsweise aeroelastische Probleme, wie die Verformung einer Tragfläche unter dem Einfluss von Luftströmungen, oder die vom Wind herbeigeführte Oszillation einer Brücke zu beschreiben. Ein Anwendungsgebiet für unsere vereinfachten Gleichungen wäre hingegen zB. der Blutfluss in einer Arterie ([16]).

Alle Fluid-Struktur-Kopplungs-Probleme befassen sich mit der gegenseitigen Beeinflussung von Festkörpern und Strömungen. Körper deformieren sich unter dem Einfluss der von einem Fluid aufgebauten Spannung, während im Gegenzug Fluide sich der Verschiebung des Körpers anpassen. Das bedeutet konkret, dass beispielsweise an der Grenze zwischen Fluid und Körper (*Interface*) die Geschwindigkeit des Fluids und des Körpers übereinstimmen müssen (*Haftbedingung*), aber auch, dass der Körper das mögliche Ausdehnungsgebiet des Fluids beschränkt.

In Kapitel 2 haben wir die Gleichungen der Elastizität über lagrange Koordinaten (*lagrangesche Beschreibungsweise*), dh. in Bezug auf eine gegebene Referenzkonfiguration $\bar{\Omega}_{t_0}$ dargestellt. Die lagrangesche Beschreibungsweise befasst sich mit Bewegungen einzelner Partikel X , die über den gesamten Beobachtungszeitraum $(0, T)$ über ein sich (mit φ bzw. $\det \nabla \varphi$) bewegendes Bezugssystem betrachtet werden.

Auf der anderen Seite belassen wir die Strömungsgleichungen in der *eulerschen Beschreibungsweise*.

Die aktuelle Position x eines sich bewegendes Fluidpartikels X erhalten wir über die Deformationsabbildung $\varphi : \bar{\Omega}_{t_0} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$, weshalb es für die folgenden Überlegungen Sinn macht, die eulersche Koordinate x als Funktion von X und t aufzufassen

$$x = x(X, t) \text{ für } X \in \bar{\Omega}_{t_0}, t \in I.$$

Diese Sichtweise führt zur Einführung eines neuen Symbols

$$\hat{v}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_X,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_X$ versinnbildlichen soll, dass wir für die Zeitableitung die lagrangesche Koordinate fixieren. Analog definieren wir $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_x$, wenn wir bei der Zeitableitung die eulersche Koordinate fixieren.

In der eulerschen Beschreibungsweise betrachten wir die für jeden Zeitpunkt $t \in I$ in einem ruhenden Bezugssystem lokale (dh. Fluidpartikel $X \in \nu_{t_0}$ welche sich zum Zeitpunkt t in $x = \varphi(X, t) \in \nu_t$ befinden) zeitliche Änderungen physikalischer Größen wie der Geschwindigkeit $v(x, t)$ oder dem Druck $p(x, t)$, welche im direkten Zusammenhang mit der Bewegung der Fluidpartikel stehen.

Sowohl die eulersche als auch die lagrangesche Beschreibungsweise haben in der Lösung mathematischer Modellierungsprobleme Vorteile und entsprechend unterschiedliche Anwendungsgebiete ([16], [6], [17], [11]):

- Das lagrangesche Bezugssystem eignet sich für die präzise Modellierung von Rändern, die Finite-Elemente-Approximation lässt sich äußerst effizient implementieren und im Falle geringer Deformationen ist die Beschreibung über lagrangesche Koordinaten numerisch robust. Nachteil ist dabei jedoch die Einschränkung, lediglich beschränkte Deformationen betrachten zu können, da man ansonsten die numerische Stabilität verliert.
- Die eulersche Beschreibungsweise behebt diesen Nachteil, jedoch sind die numerischen Lösungsverfahren deutlich aufwendiger, da aufgrund der Fixierung des Bezugssystems ein zusätzlicher Konvektionsterm in den beschreibenden Gleichungen auftaucht.

Bei Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen eignet sich keine der genannten Beschreibungsweisen für die Modellierung beider Materialtypen. Es gibt komplexe *Kopplungsalgorithmen* ([19, S. 2]), welche die lagrangesche Formulierung der beschreibenden Gleichungen des Körpers direkt mit der eulerschen Formulierung der Gleichungen des Fluids koppeln können. Wir werden jedoch die sog. *Arbitrary-Lagrangian-Eulerian-Methode* (Abk. **ALE-Methode**) kennen lernen, welche einen Kompromiss zwischen der lagrangeschen und eulerschen Beschreibungsweise darstellt und von der Diskretisierung der Zeitableitungen in Zuge einer FEM-Approximation motiviert wird ([20]).

4.1 Das ALE-Bezugssystem

In der *ALE-Beschreibungsweise* der Bewegung (*ALE-Kontext*) verwendet man weder die Referenzkonfiguration, noch die deformierte Konfiguration als Bezugssystem. Stattdessen führt man mit dem sog. *ALE-Bezugssystem* $\bar{\Omega}_{t_0}^{ALE}$ mit *ALE-Koordinaten* $Y \in \bar{\Omega}_{t_0}^{ALE}$ ein zusätzliches allgemeines Bezugssystem ein, welches mit der Referenzkonfiguration und der deformierten Konfiguration über die injektiven und in $(0, T)$

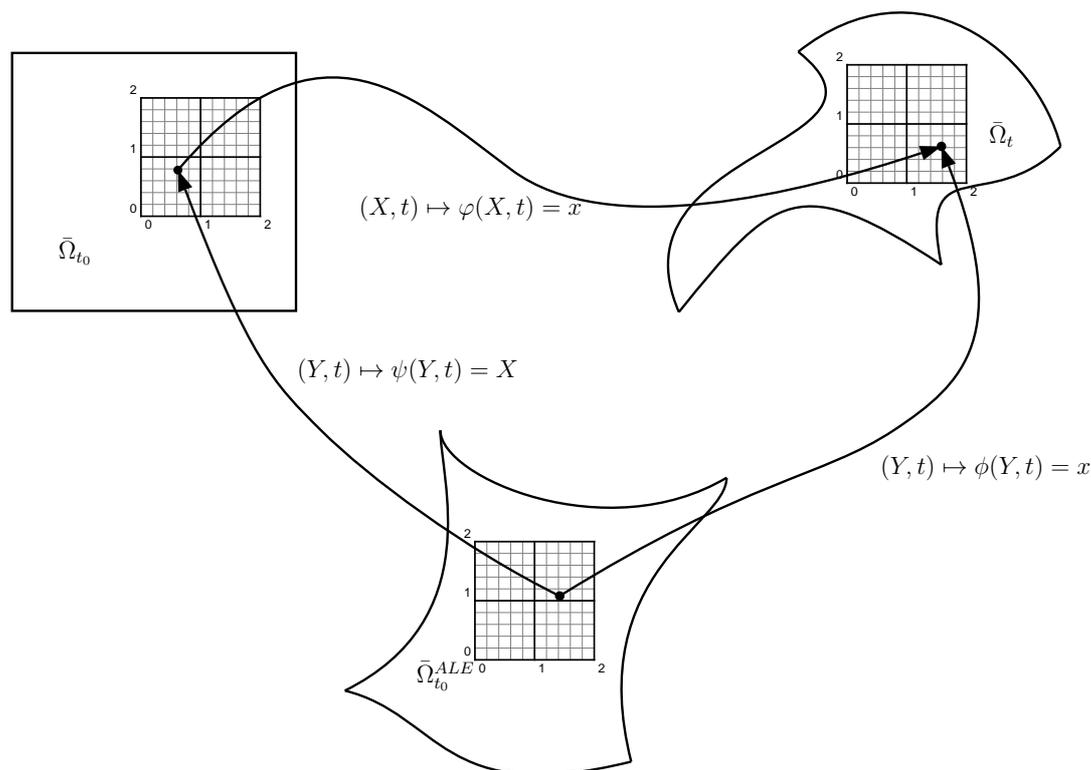


Abbildung 4.1: Veranschaulichung der Zusammenhänge zwischen der Deformations- und der ALE-Abbildung. Die Bewegung des ALE-Bezugssystems ist unabhängig von der Bewegung des Referenzsystems.

stetig differenzierbaren Abbildungen ϕ und ψ^{-1} mit $\varphi = \phi \circ \psi^{-1}$ in Zusammenhang steht

$$\begin{aligned} \phi : \bar{\Omega}_{t_0}^{ALE} \times I &\rightarrow \bar{\Omega}_t & \psi^{-1} : \bar{\Omega}_{t_0} \times I &\rightarrow \bar{\Omega}_{t_0}^{ALE} \\ (Y, t) &\mapsto \phi(Y, t) = x & (X, t) &\mapsto \psi(X, t) = Y. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.1. *Formal gesehen betrachtet man statt einzelner Abbildungen ϕ und ψ^{-1} entsprechende Funktionenfamilien, welche jedem Zeitpunkt $t \in I$ und jedem Punkt $Y \in \bar{\Omega}_{t_0}^{ALE}$ bzw. $X \in \bar{\Omega}_{t_0}$ einen Punkt $x \in \bar{\Omega}_t$ bzw. $Y \in \bar{\Omega}_{t_0}^{ALE}$ zuweisen.*

Das ALE-Bezugssystem bewegt sich im Allgemeinen sowohl gegenüber der Referenzkonfiguration, als auch gegenüber der deformierten Konfiguration ([6]). Die grundlegende Idee hinter der ALE-Methode ist die Auffassung, dass ein Beobachter weder in einer fixen Position im Raum verbleibt (eulersche Betrachtungsweise), noch sich zwangsläufig mit dem Material (Fluid oder Körper) mitbewegen muss (lagrangesche Beschreibungsweise): Der Beobachter soll sich beliebig (eng. *arbitrary*) bewegen können (ALE-Beschreibungsweise - siehe Abbildung 4.1). Mit unserer neu eingeführten Notation definieren wir daher die Geschwindigkeitsfelder für Partikel Y im ALE-Bezugssystem

bezogen auf die deformierte Konfiguration bzw. für Partikel X der Referenzkonfiguration bezogen auf das ALE-Bezugssystem

$$\check{v}(Y, t) := \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_Y = \frac{\partial \phi}{\partial t}(Y, t) \text{ und } w(X, t) := \left. \frac{\partial Y}{\partial t} \right|_X = \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial t}(X, t).$$

Das Verhältnis, in welchem die Geschwindigkeitsfelder \hat{v} , \check{v} und w in Bezug aufeinander stehen, kann durch Differentiation der Funktion $\varphi = \phi \circ \psi^{-1}$ ermittelt werden

$$\begin{aligned} v(x, t) = \hat{v}(X, t) &= \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_X = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) \\ &= \nabla_Y \phi(\psi^{-1}(X, t), t) \cdot \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial t}(X, t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(Y, t) \\ &= \nabla_Y \phi(Y, t) \cdot \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial t}(X, t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(Y, t) \\ &= \frac{\partial x}{\partial Y} \cdot \left. \frac{\partial Y}{\partial t} \right|_X + \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_Y \\ &= \check{v}(Y, t) + \frac{\partial x}{\partial Y} \cdot w(X, t) \text{ sodass } Y = \psi^{-1}(X, t), x = \phi(Y, t). \end{aligned}$$

Wir definieren in diesem Zusammenhang die *Konvektionsgeschwindigkeit*

$$c(x, t) := \hat{v}(X, t) - \check{v}(Y, t) = \frac{\partial x}{\partial Y} \cdot w(X, t) \text{ sodass } Y = \psi^{-1}(X, t), x = \phi(Y, t),$$

welche die relative Geschwindigkeit zwischen Referenzkonfiguration und dem ALE-Bezugssystem angibt. Im Allgemeinen unterscheidet sich die Konvektionsgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit w . Sollte jedoch $c = w$ sein, so ist dies genau dann der Fall, wenn $\partial x / \partial Y = I$, dh. genau dann, wenn die Koordinaten des ALE-Bezugssystems identisch mit den eulerschen Koordinaten der deformierten Konfiguration sind.

Bemerkung 4.2. *Mit der Einführung des ALE-Bezugssystems lassen sich die lagrangesche und die eulersche Beschreibungsweise als Spezialfälle einer bestimmten Wahl für die Abbildungen ψ und ϕ ableiten:*

- $\psi = \text{id}$: *Damit erhalten wir $X = Y$ und somit die lagrangesche Beschreibungsweise. Es gilt für die Konvektionsgeschwindigkeit $c = 0$.*
- $\phi = \text{id}$: *Somit ist $x = Y$ und wir erhalten die eulersche Beschreibungsweise. Für die Konvektionsgeschwindigkeit gilt $c = \hat{v}$.*

4.2 Zeitableitungen im ALE-Kontext

Um eine Formulierung der Kontinuitätsgleichung und der Bewegungsgleichung im ALE-Kontext zu finden, müssen wir einen Zusammenhang zwischen den Zeitableitungen der unterschiedlichen Beschreibungsweisen finden.

Sei hierfür $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ eine allgemeine physikalische Größe, welche wir in der jeweiligen lagrangeschen, ALE- und eulerschen Schreibweise angeben können ($\hat{F}(X, t)$, $\check{F}(Y, t)$ und $F(x, t)$). Bisher haben wir stets den Zusammenhang zwischen Referenzkonfiguration und deformierter Konfiguration über die Deformationsabbildung φ betrachtet. In diesem Zusammenhang haben wir bereits die Zeitableitung in der lagrangeschen Beschreibungsweise kennengelernt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{F}(X, t)}{\partial t} &= \frac{\partial F(\varphi(X, t), t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(\varphi(X, t), t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) \cdot \nabla_x F(\varphi(X, t), t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla_x F(x, t) \\ &= \frac{D}{Dt} F(x, t) := \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_X \text{ mit } x = \varphi(X, t). \end{aligned}$$

Um die Sinnhaftigkeit der neuen Schreibweise zu verdeutlichen, können wir die Zeitableitung im Euler-Kontext auch schreiben als

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_x \text{ „mit } x = x\text{“}.$$

Für den Zusammenhang der Zeitableitung der Referenzkonfiguration mit der Zeitableitung im ALE-Bezugssystem betrachten wir jetzt die Zeitableitung von $\hat{F} = \check{F} \circ \psi^{-1}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_X &= \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}(X, t) = \frac{\partial \check{F}(\psi^{-1}(X, t), t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \check{F}}{\partial t}(\psi^{-1}(X, t), t) + \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial t}(X, t) \cdot \nabla_Y \check{F}(\psi^{-1}(X, t), t) \\ &= \frac{\partial \check{F}}{\partial t}(Y, t) + \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial t}(X, t) \cdot \nabla_Y \check{F}(Y, t) \\ &= \frac{\partial \check{F}}{\partial t}(Y, t) + w(X, t) \cdot \nabla_Y \check{F}(Y, t) \\ &= \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_Y + w(X, t) \cdot \nabla_Y \check{F}(Y, t) \text{ mit } Y = \psi^{-1}(X, t). \end{aligned}$$

Um den Gradienten im ALE-Bezugssystem zu vermeiden, können wir uns die Definition der Konvektionsgeschwindigkeit zu Nutze machen

$$\begin{aligned} w(X, t) \cdot \nabla_Y \check{F}(Y, t) &= w(X, t)^\top \left(\nabla_x F(x, t)^\top \frac{\partial x}{\partial Y} \right) \\ &= \left(w(X, t)^\top \frac{\partial x}{\partial Y}^\top \right) \nabla_x F(x, t) = c \cdot \nabla_x F(x, t). \end{aligned}$$

Satz 4.3. *Zwischen der ALE- bzw. materiellen (lagrangeschen) Zeitableitung und dem Gradienten im eulerschen Kontext herrscht der Zusammenhang*

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_X = \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_Y + c \cdot \nabla_x F(x, t).$$

4.3 Die ALE-Formulierung

Um die ALE-Methode tatsächlich anwenden zu können, müssen wir die Gleichungen für das ALE-Bezugssystem umformulieren: Die Terme der Raumableitungen werden wir weiterhin als Funktion der eulerschen Koordinate x bzw. der lagrangeschen Koordinate X ausdrücken, während Zeitableitungen jetzt im entsprechenden ALE-Kontext berechnet werden, um Zeitableitungen im eulerschem Bezugssystem zu vermeiden ([20, S. 13]). Mit Hilfe der Geschwindigkeit \check{v} können wir einen generischen Erhaltungssatz der Form

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x + \operatorname{div}_x F(u) = f, \quad (4.1)$$

welcher in eulerscher Schreibweise gegeben ist mit Hilfe der Relation

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_Y = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x + \check{v} \cdot \nabla_x u$$

in ALE-Form umschreiben als

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_Y - \check{v} \cdot \nabla_x u + \operatorname{div}_x F(u) = f \text{ in } \mathcal{D}, x = \phi(Y, t). \quad (4.2)$$

Die Gleichung (4.2) ist dabei nicht die einzige Möglichkeit, die ALE-Methode umzusetzen; Eine weitere häufig genutzte Formulierung, äquivalent zu (4.2), mit dem Vorteil die konservative Form der Gleichung (4.1) zu erhalten, lässt sich schreiben als

$$\left. \frac{\partial(J_\phi u)}{\partial t} \right|_Y + J_\phi \operatorname{div}_x (F - \check{v}u) = J_\phi f, \quad (4.3)$$

wobei J_ϕ die Determinante der Jakobimatrix der ALE-Transformation ϕ ist. Wir bezeichnen (4.2) als die *nicht-konservative* und (4.3) als die *konservative* Form der ALE-Formulierung. Wir werden jetzt diese beiden Ansätze herleiten.

Wir betrachten hierfür ein allgemeines zeitabhängiges Problem:

Finde $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x + \mathcal{L}(u) = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \quad (4.4)$$

mit geeigneten Anfangs- und Randbedingungen. Dabei bezeichnet \mathcal{L} einen (linearen oder nicht-linearen) Differentialoperator in eulerschen Koordinaten $x \in \Omega_t$. Um eine

entsprechende äquivalente Formulierung für $\check{u} = u(\cdot, t) \circ \phi$ zu finden genügt es die Kettenregel anzuwenden

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_Y &= \frac{\partial u(\phi(Y, t), t)}{\partial t} = \nabla_x u(\varphi(Y, t), t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}(Y, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x \\ &= \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_Y(x, t) \cdot \nabla_x u(x, t) \\ &= \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x + \check{v} \cdot \nabla_x u \text{ mit } Y = \phi^{-1}(x, t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Deshalb ist

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_Y + \mathcal{L}(u) - \check{v} \cdot \nabla_x u = 0 \text{ in } \mathcal{D} \text{ mit } Y = \phi^{-1}(x, t) \quad (4.6)$$

das ALE-Gegenstück zu (4.4). Der Hauptunterschied zur ursprünglichen Formulierung liegt im Aufkommen eines *Konvektivterms* $\check{v} \cdot \nabla_x u$, welcher in Folge der Bewegung des ALE-Bezugssystems auftaucht.

Häufig werden in der Kontinuumsmechanik die beschreibenden Gleichungen in konservativer Form angegeben, da sie tatsächlich einen Erhaltungssatz (eng. conservation law) wiedergeben. Zur Demonstration der allgemeinen Vorgehensweise betrachten wir vorerst einen generischen Erhaltungssatz in konservativer Form einer skalaren Größe $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x + \operatorname{div}_x F = f \text{ in } \mathcal{D}, \quad (4.7)$$

wobei es sich bei F um ein Vektorfeld in u und dessen erster und zweiter Raumableitungen handelt, während f eine skalare Funktion bezeichnen soll. Die Anwendung der Relation (4.5) ergibt

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_Y + \operatorname{div}_x F - \check{v} \cdot \nabla_x u = f \text{ in } \mathcal{D} \text{ mit } Y = \phi^{-1}(x, t). \quad (4.8)$$

Der Ausdruck (4.8) ist eine Möglichkeit, wie der ALE-Kontext in die konservative Gleichung eingebunden werden kann.

Eine andere Einbindung der ALE-Formulierung lässt sich direkt aus der Integralgleichungen bei der Herleitung der generischen Bewegungsgleichung in konservativen Form ableiten. Wir bezeichnen die Jakobimatrix bzw. die Determinante der ALE-Abbildung als

$$F_\phi := F_\phi(Y, t) := \frac{\partial \phi}{\partial Y}(Y, t) \text{ bzw. } J_\phi := J_\phi(Y, t) := \det F_\phi(Y, t).$$

Wir werden nun ein Analogon von Satz 1.4 betrachten, welches die zeitliche Änderung von J_ϕ in Zusammenhang mit der Divergenz der Gebietsgeschwindigkeit stellt

$$\left. \frac{\partial J_\phi}{\partial t} \right|_Y = J_\phi(Y, t) \operatorname{div}_x \check{v} \text{ für } Y \in \Omega_{t_0}^{ALE}, x = \phi(Y, t), t \in I. \quad (4.9)$$

Gemeinsam mit den Anfangsbedingungen $J_\phi = 1$ für $t = t_0$ können wir den Ausdruck (4.9) als ein Entwicklungsgesetz der Jakobideterminante interpretieren, sobald das Gebietsgeschwindigkeitsfeld bekannt ist. Diese Interpretation ist dabei keineswegs naheliegend, da (4.9) für gewöhnlich als Identität verstanden wird, welche in jedem Zeitpunkt $t \in I$ gilt.

Wir wollen nun analog zum Beweis des Reynoldsschen Transporttheorems (Satz 1.5) einen Ausdruck für einen Term der Form

$$\frac{d}{dt} \Big|_Y \int_{\nu_t} u dx \quad (4.10)$$

finden, wobei ν_t für $t \in I$ ein beliebiges beschränktes Teilgebiet von Ω_t mit lip-schitzstetigem Rand ist. Wir bezeichnen mit $\nu_{t_0}^{ALE}$ jenes Teilgebiet von $\Omega_{t_0}^{ALE}$ sodass $\nu_t = \phi(\nu_{t_0}^{ALE})$. Wir erhalten analog zum Beweis des Reynoldsschen Transporttheorems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_Y \int_{\nu_t} u(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \Big|_Y \int_{\nu_{t_0}^{ALE}} u(\phi(Y, t), t) J_\phi(Y, t) dY \\ &= \int_{\nu_{t_0}^{ALE}} \frac{\partial(u J_\phi)}{\partial t} \Big|_Y dY = \int_{\nu_{t_0}^{ALE}} \frac{\partial u(\phi(Y, t), t) J_\phi(Y, t)}{\partial t} dY \\ &= \int_{\nu_{t_0}^{ALE}} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_Y (x, t) J_\phi(Y, t) + u \frac{\partial J_\phi}{\partial t} \Big|_Y dY. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Mit (4.9) und Rückwärtssubstitution erhalten wir schließlich

$$\frac{d}{dt} \Big|_Y \int_{\nu_t} u(x, t) dx = \int_{\nu_t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_Y + u(x, t) \operatorname{div}_x \check{v} \right) dx, \quad (4.12)$$

wobei es sich offensichtlich um eine Verallgemeinerung des Reynoldsschen Transporttheorems (Satz 1.5) handelt. In Folge dessen erhalten wir die konservative Gleichung (4.7) in integraler ALE-Form aus (4.8)

$$\begin{aligned} &\int_{\nu_t} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_Y + u \operatorname{div}_x \check{v} + \operatorname{div}_x F - \check{v} \cdot \nabla_x u - u \operatorname{div}_x \check{v} - f dx = 0 \\ \Leftrightarrow &\int_{\nu_t} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_Y + u \operatorname{div}_x \check{v} + \operatorname{div}_x(\check{v}u) - f dx = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{d}{dt} \Big|_Y \int_{\nu_t} u dx + \int_{\nu_t} \operatorname{div}_x(F - \check{v}u) dx = \int_{\nu_t} f dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Die Integrale in (4.13) werden allesamt im eulerschen Kontext ausgedrückt. Man könnte die Gleichung aber auch in Bezug auf die ALE-Bezugssystem schreiben, was auf folgenden Ausdruck führt

$$\int_{\nu_{t_0}^{ALE}} \left(\frac{\partial(u J_\phi)}{\partial t} \Big|_Y + J_\phi(\operatorname{div}_x(F - \check{v}u) - f) \right) dY = 0, \quad (4.14)$$

aus dem wir dank des beliebig gewählten Teilgebiets $\nu_{t_0}^{ALE}$ nach Satz 1.7 die differentielle Form folgern können

$$\left. \frac{\partial(uJ_\phi)}{\partial t} \right|_Y + J_\phi \operatorname{div}_x(F - \check{v}u) = J_\phi f \text{ in } \mathcal{D} \text{ wobei } x = \phi(Y, t), \quad (4.15)$$

wobei es sich um eine weitere zulässige Form der generischen Bewegungsgleichung in ALE-Form handelt.¹

4.4 Bestimmung der ALE-Abbildung

Bevor wir uns mit dem Fluid-Struktur-Kopplungsproblem befassen, wollen wir noch einen kurzen Blick auf die Ermittlung einer konkreten ALE-Abbildung werfen. Da wir selbige später lediglich für die Umformulierung der beschreibenden Gleichungen für das Fluid benötigen genügt es, ϕ für $\bar{\Omega}_{t_0}^{ALE,F}$ zu betrachten.

Für eine gegebene Funktion

$$\check{g} : \partial\Omega_{t_0}^{ALE,F} \times I \rightarrow \partial\Omega_t^F, \quad (4.16)$$

welche die Verschiebung des Randes des Ausdehnungsgebiets² eines Fluids angibt³, wollen wir eine konkrete ALE-Abbildung ϕ finden ([16, S. 22], [20, S. 11]), sodass zu jedem Zeitpunkt $t \in I$

$$\phi(Y, t) = \check{g}(Y, t) \text{ für alle } Y \in \partial\Omega_{t_0}^{ALE,F}.$$

Für dieses Problem existieren mehrere Lösungsverfahren von denen wir exemplarisch zwei Ansätze anführen, welche für die Ermittlung der ALE-Abbildung ein Ersatzproblem (ein sog. *Harmonic Extension Problem*) lösen:

- Gegeben sei das ALE-Bezugssystem $\bar{\Omega}_{t_0}^{ALE,F}$ und eine Funktion (4.16). Finde eine Abbildung

$$\tilde{\phi} : \Omega_{t_0}^{ALE,F} \times I \rightarrow \Omega_t^F,$$

sodass

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(Y, t) - \operatorname{div}_Y(\kappa(Y, J_{\tilde{\phi}}(Y, t)) \nabla_Y \tilde{\phi}(Y, t)) &= 0 && \text{für alle } Y \in \Omega_{t_0}^{ALE,F}, t \in I, \\ \tilde{\phi}(Y, 0) &= Y && \text{für alle } Y \in \bar{\Omega}_{t_0}^{ALE,F}, \\ \tilde{\phi}(Y, t) &= \check{g}(Y, t) && \text{für alle } Y \in \partial\Omega_{t_0}^{ALE,F}, t \in I, \end{aligned}$$

wobei der Steuerungsparameter $\kappa(Y, J_{\tilde{\phi}}(Y, t)) > 0$, $Y \in \Omega_{t_0}^{ALE}$ ein positiver Koeffizient ist.

¹Gleichung (4.15) ließe sich auch direkt aus (4.8) mit Hilfe der eulerschen Expansionsformel (4.9) herleiten.

²Analog zu Satz 1.6 können wir die Gleichheit der Ränder $\partial\Omega_t^F = \partial\phi(\Omega_{t_0}^{ALE,F}, t) = \phi(\partial\Omega_{t_0}^{ALE,F}, t)$ sicherstellen.

³Für Fluid-Struktur-Interaktionen ist $\check{g}(Y, t) = u(\cdot, t) \circ \psi(Y, t)$ für $Y \in \partial\Omega_{t_0}^{ALE,F}$

Häufig benötigt man die ALE-Abbildung nur für diskrete Zeitpunkte (Finite-Elemente-Approximation), zu welchen die Näherungslösung eines Problems gesucht wird. Die für das Ersatzproblem benötigten Daten umfassen das ALE-Bezugssystem $\bar{\Omega}_{t_0}^{ALE,F}$ und die neue Position des Randes, welche über eine Funktion $\check{h} : \partial\Omega_{t_0}^{ALE,F} \rightarrow \partial\Omega_{t_1}^F$ (wobei $\Omega_{t_1}^F$ das Rechengebiet des Fluids zu einem ausgewiesenen Zeitpunkt $t_1 \in I$ bezeichnet) beschrieben werden kann. In diesem Fall ist folgendes einfacheres Ersatzproblem eine leichter lösbare Alternative zum vorherigen Ersatzproblem:

- Gegeben sei eine Referenzkonfiguration $\bar{\Omega}_{t_0}^{ALE,F}$ und eine Funktion $\check{h} : \partial\Omega_{t_0}^F \rightarrow \partial\Omega_{t_1}^F$. Finde eine Abbildung

$$\tilde{\phi} : \Omega_{t_0}^{ALE,F} \rightarrow \Omega_{t_1}^F,$$

sodass

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_Y(\kappa(Y, J_{\tilde{\phi}}(Y))\nabla_Y\tilde{\phi}(Y)) &= 0 && \text{für alle } Y \in \Omega_{t_0}^{ALE,F} \\ \tilde{\phi}(Y) &= \check{h}(Y) && \text{für alle } Y \in \partial\Omega_{t_0}^{ALE,F}, \end{aligned}$$

wobei der Steuerungsparameter $\kappa(Y, J_{\tilde{\phi}}(Y)) > 0, Y \in \Omega_{t_0}^{ALE}$ eine positiver Koeffizient ist.

Es kann gezeigt werden (siehe Satz 1.6.2 in [16, S. 33]), dass die Lösung des Kopplungsproblems nicht von einer konkreten Wahl für die ALE-Abbildung (zB. $\phi = \tilde{\phi}$) abhängt.

4.5 Das gekoppelte Problem

Für die Kopplung der Gleichungen für Körper und Fluide benötigen wir jetzt entsprechende Bedingungen, welche diese Interaktion beschreiben. Wir führen zu diesem Zweck *Transmissionsbedingungen* ein, bei welchen es sich konkret um Randbedingungen am Interface zwischen Fluid und Körper handelt.

Definition 4.4 (Transmissionsbedingungen - Haftbedingungen). *Gegeben sei das Verschiebungsfeld des Körpers*

$$u : \bar{\Omega}_{t_0}^S \times I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (4.17)$$

welches unter anderem die Verschiebung am Interface zwischen Fluid und Körper angibt. Ein Beispiel für eine Transmissionsbedingung ist die **Haftbedingung** für viscid und inviscid Fluide ([20, S. 13],[6, S. 17]):

- Die zeitliche Änderung der Verschiebung des Körpers bzw. das Geschwindigkeitsfeld des Fluids sollen an ihrem Interface übereinstimmen.
- Der Druck (Cauchysche Spannungsvektor), welchen der Körper auf das Fluid ausübt, soll dem Druck den das Fluid auf den Körper ausübt entgegengesetzt und gleich in Größe sein.

Das formalisierte Gegenstück zu den heuristisch gegebenen Haftbedingungen sind die Interfacebedingungen

$$v(\cdot, t) \circ \phi(Y, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(X, t) = 0 \text{ auf } \Gamma_{t_0}^I \text{ mit } Y = \psi^{-1}(X, t), t \in I, \quad (4.18)$$

$$(T^F(\cdot, t)\mathbf{n}(\cdot, t)) \circ \phi(Y, t) + \hat{T}^S(X, t)\mathbf{n}(X, t) = 0 \text{ auf } \Gamma_{t_0}^I \text{ mit } Y = \psi^{-1}(X, t), t \in I. \quad (4.19)$$

Für ein viscoses Fluid bestehen die Haftbedingungen aus (4.18) und (4.19) während für ein inviscides Fluid lediglich (4.18) gefordert werden muss ([6, S. 18]).

Bedingung (4.18) garantiert das Haften des Fluids an den Körper, während (4.19) die Stetigkeit der Spannung am Interface sicherstellt (3. Newtonsches Gesetz: *actio est reactio*).

Wir sind nun in der Lage, ein allgemeines Fluid-Struktur-Kopplungsproblem zu stellen, welches sich aus den Lameschen Gleichungen in lagrangescher Formulierung, der ALE-Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen und den Haftbedingungen am Interface zusammensetzt.

Satz 4.5 (Das Kopplungsproblem für die instationären Lameschen Gleichungen für St. Venant-Kirchhoff-Materialien, die ALE-Formulierung des Anfangsrandwertproblems für die Navier-Stokes-Gleichungen für instationäre, inkompressible Fluide und Haftbedingungen). *Gesucht ist das Verschiebungsfeld $u(x, t)$ sodass für alle $(X, t) \in \Omega_{t_0}^S \times I$ die Lameschen Gleichungen*

$$\rho_{t_0}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(X, t) - \mu \Delta_X u(X, t) - (\lambda + \mu) \nabla_X (\operatorname{div}_X u(X, t)) = \rho_{t_0}(X) \hat{f}(X, t)$$

gelten. Dazu kommen die Anfangsbedingungen

$$u(X, t_0) = 0 \text{ für alle } X \in \bar{\Omega}_{t_0}^S$$

und Randbedingungen für $\partial\Omega_{t_0} = \bar{\Gamma}_{t_0}^{D,S} \cup \bar{\Gamma}_{t_0}^{N,S} \cup \bar{\Gamma}_{t_0}^I$ wie zB.

$$u(X, t) = \hat{g}^D(X, t) \text{ für alle } (X, t) \in \Gamma_{t_0}^{D,S} \times I$$

$$\overbrace{\nabla \varphi(X, t) \hat{\Sigma}^S(X, t)}^{\hat{T}^S(X, t)} \mathbf{N}(X, t) = \hat{\mathbf{t}}^S(X, t, \mathbf{N}) = \hat{g}^N(X, t) \text{ für alle } (X, t) \in \Gamma_{t_0}^{N,S} \times I$$

wobei mit

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^\top)$$

mit den gleichen Argumenten aus Satz 2.31

$$\hat{T}^S(X, t) = \hat{\Sigma}^S(X, t, \mathcal{E}) = \tilde{\Sigma}^S(I + 2\mathcal{E}) = \lambda(\operatorname{Spur} \mathcal{E})I + 2\mu\mathcal{E}$$

gilt. Gesucht sind auch das Geschwindigkeitsfeld $v(x, t)$ und das Druckfeld $p(x, t)$ mit $(x, t) \in \bar{\Omega}_t^F \times I$ sodass für alle $(x, t) \in \Omega_t^F \times I$

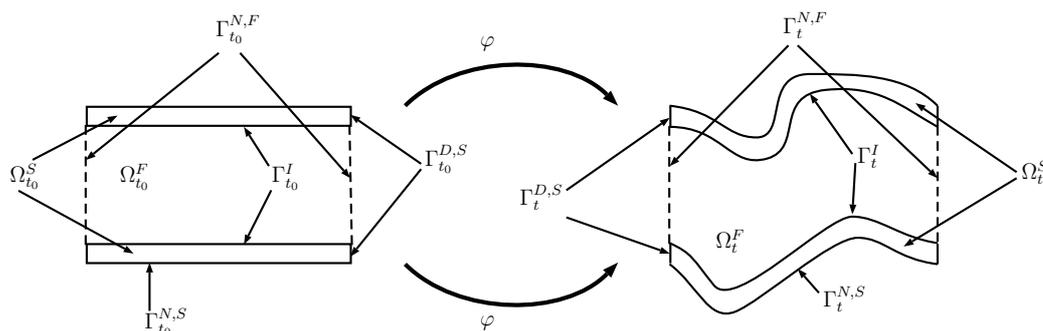


Abbildung 4.2: Die Modellierung einer Arterie als Beispiel für ein Fluid-Struktur-Kopplungsproblem.

- die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_Y - \alpha \Delta_x v + \underbrace{\left((v - \check{v}) \cdot \nabla_x \right)}_{=c} v + \frac{1}{\rho} \nabla_x p = f \text{ in } \mathcal{D}^F$$

- die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}_x v = 0 \text{ in } \mathcal{D}^F$$

gelten. Dazu kommen ebenfalls entsprechende Anfangsbedingungen

$$v(x, t_0) = v_{t_0}(x) \text{ für alle } x \in \bar{\Omega}_{t_0}^F$$

und Randbedingungen für $\partial\Omega_t = \Gamma_t^{\bar{D},F} \cup \Gamma_t^{\bar{N},F} \cup \bar{\Gamma}_t^I$

$$v(x, t) = g^D(x, t) \text{ für alle } (x, t) \in \Gamma_t^{D,F} \times I,$$

$$T^F(x, t)\mathbf{n}(x, t) = \mathbf{t}^F(x, t, \mathbf{n}) = g^N(x, t) \text{ für alle } (x, t) \in \Gamma_t^{N,F} \times I.$$

Für die Interaktion von Fluid und Körper stellen wir die Interfacebedingung als Haftbedingung

$$v(\cdot, t) \circ \phi(Y, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(X, t) = 0 \text{ auf } \Gamma_{t_0}^I \text{ mit } Y = \psi^{-1}(X, t), t \in I.$$

wobei $T^F(x, t)$ wie in (3.2) definiert ist.

Ein konkretes Anwendungsgebiet des von uns betrachteten Fluid-Struktur-Kopplungsproblems ist die numerische Simulation des Blutflusses in einer Arterie (siehe Abbildung 4.2). Modellannahmen, eine Analyse der Modellierungsfehler, konkrete Anleitungen zur Transformation der Gleichungen in Zylinderkoordinaten und der Einbindung der ALE-Methode in die FEM-Approximation finden sich beispielsweise in [16], [5] und [20].

Notation

- \mathbb{M}^n : Menge der reellen quadratischen Matrizen der Dimension n .
- $\mathbb{M}_+^n = \{F \in \mathbb{M}^n : \det F > 0\}$: Menge der reellen quadratischen Matrizen der Dimension n mit positiver Determinante.
- $\mathbb{O}^n = \{P \in \mathbb{M}^n : PP^\top = P^\top P = I\}$: Menge der orthogonalen Matrizen der Dimension n .
- $\mathbb{O}_+^n = \{P \in \mathbb{O}^n : \det P > 0\}$: Menge der Rotationsmatrizen (orthogonale Matrizen mit positiver Determinante) der Dimension n .
- $\mathbb{S}^n = \{B \in \mathbb{M}^n : B = B^\top\}$: Menge der symmetrischen Matrizen der Dimension n .
- $\mathbb{S}_>^n$: Menge der symmetrischen, positiv definiten Matrizen der Dimension n .
- $\text{int } \Omega, \Omega^\circ, \text{cl } \Omega, \bar{\Omega}$: Inneres einer Menge Ω bzw. Abschluss einer Menge Ω .
- $\partial_{x_i}, \partial_{X_i}, \partial_{Y_i}$: Partielle Ableitung nach der i -ten Raumkoordinate im respektive eulerschen, lagrangeschen und ALE-Kontext. Bei klar ersichtlichem Kontext häufig nur ∂_i .
- ∂_t : Partielle Ableitung nach der Zeit.
- $\text{div}_x, \text{div}_X, \text{div}_Y$: Divergenz im respektive eulerschen, langrangeschen oder ALE-Kontext. Bei klar ersichtlichem Kontext häufig nur div .
- $\nabla_x, \text{grad}_x, \nabla_X, \text{grad}_X$: Gradient im respektive eulerschen, lagrangeschen und ALE-Kontext. Bei klar ersichtlichem Kontext häufig nur grad .
- $\Delta_x, \Delta_X, \Delta_Y$: Laplaceoperator im respektive eulerschen, lagrangeschen und ALE-Kontext. Bei klar ersichtlichem Kontext häufig nur Δ .
- Zur Verbesserung der Lesbarkeit werden wir uns bei der Angabe der Argumente für die Deformationsabbildung häufig statt $\varphi(X, t_0, t)$ auf $\varphi(X, t)$ beschränken. In diesen Fällen sei der ausgewiesene Zeitpunkt $t_0 \in (0, T)$ beliebig aber fest gewählt.

- Sowohl das Referenzgebiet $\bar{\Omega}_{t_0}$ als auch die deformierte Konfiguration $\bar{\Omega}_t$ werden bei der Betrachtung der Kopplungsprobleme in Kapitel 4 in die Bereiche „F-Fluid“ und „S-Struktur“ unterteilt: $\bar{\Omega}_{t_0} = \bar{\Omega}_{t_0}^S \cup \bar{\Omega}_{t_0}^F$ und $\bar{\Omega}_t = \bar{\Omega}_t^S \cup \bar{\Omega}_t^F$.
- Der Rand der Referenzkonfiguration und der deformierten Konfiguration wird analog ebenfalls in „Fluid“ $\Gamma_{t_0}^F := \partial\Omega_{t_0}^F$ und „Körper“ $\Gamma_{t_0}^S := \partial\Omega_{t_0}^S$ aufgeteilt. Die Ränder selbst teilen sich in „Dirichlet-Rand“ $\Gamma_{t_0}^D$, „Neumann-Rand“ $\Gamma_{t_0}^N$ und „Interface“ $\Gamma_{t_0}^I$ auf. Um auch hier eine Unterscheidung zwischen Fluiden und Körpern zu treffen bezeichnen wir beispielsweise die jeweiligen Ränder der Referenzkonfiguration des Körpers mit $\Gamma_{t_0}^{D,S}$, $\Gamma_{t_0}^{N,S}$ und $\Gamma_{t_0}^I$ wobei

$$\Gamma_{t_0}^S = \bar{\Gamma}_{t_0}^{D,S} \cup \bar{\Gamma}_{t_0}^{N,S} \cup \bar{\Gamma}_{t_0}^I.$$

- Eine Funktion $F : \bar{\Omega}_t \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ in eulerschen Koordinaten wird als $\hat{F} : \bar{\Omega}_{t_0} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ im lagrangeschen bzw. als $\check{F} : \bar{\Omega}_{t_0}^{ALE} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ im ALE-Kontext bezeichnet, wobei \hat{F} über

$$F(x, t) = F(\varphi(X, t), t) =: \hat{F}(X, t) \text{ bzw. } F(x, t) = F(\phi(Y, t), t) =: \check{F}(Y, t)$$

definiert ist.

- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $|x| := (x^\top x)^{1/2} = (x \cdot x)^{1/2}$ die euklidische Norm, wobei $x \cdot y$ das innere Produkt im euklidischen Raum bezeichnet.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Aris. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications Inc., 1989.
- [2] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity: Theory of Plates*. North-Holland, vol. II, Amsterdam, 1991.
- [3] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity: Theory of Shells*. North-Holland, vol. III, Amsterdam, 2000.
- [4] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity: Three dimensional elasticity*. North-Holland, vol. I, Amsterdam, 1988.
- [5] S. Deparis. *Numerical analysis of axisymmetric flows and methods for fluid structure interaction arising in blood flow simulation*. PhD thesis, Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, 2004.
- [6] J. Donea, A. Huerta, J. Ponthot, A. Rodriguez-Ferran. *Encyclopedia of Computational Mechanics: Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods*. Wiley, 2004
- [7] C. Eck, H. Garcke, P. Knabner. *Mathematische Modellierung*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, 2011.
- [8] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Second Edition, AMS., 2010.
- [9] M. Feistauer, J. Felcman, I. Straskraba. *Mathematical and computational methods for compressible flow*. Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [10] Roland W. Freund, Ronald H. W. Hoppe. *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. 10. Auflage, Springer, 2007.
- [11] G. P. Galdi, R. Rannacher, A. M. Robertson, S. Turek. *Hemodynamical Flows - Modeling, Analysis and Simulation*. Birkhäuser, Berlin, 2008.
- [12] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis Teil 1*. 17. Auflage, Wiesbaden, 2009.
- [13] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis Teil 2*. 14. Auflage, Wiesbaden, 2008.
- [14] M. Jung, U. Langer. *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*. Springer, Wiesbaden, 2013.

- [15] U. Langer. *Mathematische Modellierung in der Technik*. Skriptum, JKU Linz, 2014.
- [16] F. Nobile. *Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with application to Haemodynamics*. PhD thesis, Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, 2001.
- [17] F. Pfeifer, P. Wriggers. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Volume 27, Springer, 2006.
- [18] M. Schmuckenschläger. *Elementare Funktionalanalysis und Integration*. Skriptum, JKU Linz, 2013.
- [19] Mhamed Souli, David J. Benson. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian and Fluid-Structure Interaction*. Wiley, 2010.
- [20] Huidong Yang. *Numerical Simulation of Fluid-Structure Interaction Problems on Hybrid Meshes with Algebraic Multigrid Methods*. JKU, Linz, 2010.