

Vorlesungsskript

zu

MATHEMATISCHE MODELLE IN DER
TECHNIK

Wintersemester 2021/2022

Jörg Willems

überarbeitet von
Clemens Hofreither

Johannes Kepler Universität Linz

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Physikalische Grundlagen und Erhaltungssätze	1
1.1. Gegenstand der Vorlesung	1
1.2. Physikalische Größen und ihre Einheiten	1
1.3. Kontinuumsmodelle	2
1.4. Erhaltungssätze	4
1.5. Bausteine eines mathematischen Modells	7
1.6. Ein erstes Beispiel: die barometrische Höhenformel	7
Kapitel 2. Wärmeleitung	11
2.1. Die instationäre Wärmeleitungsgleichung in 3D	11
2.2. Anfangs- und Randbedingungen der Wärmeleitungsgleichung in 3D	12
2.3. Der Fall springender Materialkoeffizienten	14
2.4. Variationsformulierung	15
2.5. Energiebetrachtungen	16
2.6. Modellreduktion – die 1D-Wärmeleitungsgleichung	17
Kapitel 3. Elastizität	21
3.1. Kinematik und der Verzerrungstensor	21
3.2. Der Spannungstensor	24
3.3. Hyperelastische Materialien	27
3.4. Linear elastisches Material	29
3.5. Isotropes linear elastisches Material	30
3.6. Variationsformulierung und Anfangs- und Randbedingungen	32
3.7. Beispiel: lineare Elastostatik	34
3.8. Ebener Spannungs- und ebener Verzerrungszustand	35
Kapitel 4. Strömungsdynamik	37
4.1. Eulersche Koordinaten	37
4.2. Das Reynoldssche Transporttheorem	38
4.3. Erhaltungssätze in Eulerkoordinaten	39
4.4. Materialgesetze in der Strömungsdynamik	41
4.5. Die Navier-Stokes Gleichungen	42
4.6. Beispiele	47
Kapitel 5. Elektromagnetismus	51
5.1. Das elektrische Feld	51
5.2. Das magnetische Feld	57
5.3. Die Maxwell-Gleichungen	62
Anhang A. Rechenregeln	67
Literaturverzeichnis	69

Index

71

KAPITEL 1

Physikalische Grundlagen und Erhaltungssätze

1.1. Gegenstand der Vorlesung

Grundlegendes Ziel der Vorlesung ist die Herleitung einiger der wichtigsten mathematischen Modelle, die in Anwendungen in Physik und Technik vorkommen. Insbesondere werden wir als Problemstellungen Wärmeleitung, elastische Festkörper, Strömungsdynamik und Elektromagnetismus betrachten.

Die folgende Auflistung gibt einen groben Überblick über die Vorgehensweise, wie ein konkretes Problem zuerst mathematisch modelliert und schließlich am Computer simuliert wird. Die Vorlesung beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Übergang von (2) auf (3). Spätere Vorlesungen in der numerischen Mathematik beschäftigen sich eingehend mit den Punkten (4)–(6).

- (1) **Physikalisch-technisches Problem**
 - konkrete Anwendung in Industrie oder Technik
- (2) **Physikalisches Modell**
 - Erhaltungssätze
 - Materialgesetze
- (3) **Mathematisches Modell**
 - gewöhnliche Differentialgleichung
 - partielle Differentialgleichung
 - Variationsformulierung
- (4) **Mathematische Untersuchung des Modells**
 - Existenz und Eindeutigkeit der Lösung
 - Ermittlung weiterer Eigenschaften des Modells und der Lösung
- (5) **Numerische Methoden**
 - Diskretisierung (Finite-Differenzen-Methode, Finite-Elemente-Methode, Randelementmethode...)
 - numerische Untersuchungen (Konvergenz, Fehleranalyse...)
 - effiziente Auflösung (schnelle Löser, Parallelisierung...)
- (6) **Implementierung am Computer**
 - Wahl der Programmiersprache (C, C++, Fortran, Matlab, Python...)
 - Wahl der verwendeten Softwarepakete
 - Parallele Implementierung
- (7) **Computereperimente**
- (8) **Interpretation der Resultate**

1.2. Physikalische Größen und ihre Einheiten

In der Physik gibt es die in Tabelle 1 aufgeführten sieben Basisgrößen mit ihren SI-Einheiten (*Système international d'unités*). Um eine Größe mit ihrer Einheit in Bezug zu setzen, schreiben wir [Größe] = Einheit, also z.B. $[l] = m$. Mithilfe dieser

physikalischen Basisgrößen können alle weiteren physikalischen Größen sowie deren dazugehörigen Einheiten definiert werden.

TABELLE 1. Physikalische Basisgrößen und Einheiten

Größe	Symbol	SI-Einheit	Zeichen
Zeit	t	Sekunde	s
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Stromstärke	I	Ampère	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_V	Candela	cd

Tabelle 2 zeigt einige der wichtigsten abgeleiteten Größen, die wir in dieser Vorlesung verwenden werden. Die Unterscheidung zwischen Basis- und abgeleiteten Größen ist nicht zwingend physikalisch gegeben, sondern vom SI festgesetzt. In früheren Systemen war beispielsweise das Gewicht (also eine Kraft) statt der Masse als Basisgröße enthalten.

TABELLE 2. Abgeleitete physikalische Größen und Einheiten

Größe	SI-Einheit	Name
Geschwindigkeit ($\mathbf{v} = \frac{1}{t}$)	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	
Impuls ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$)	$\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$	
Kraft ($\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$)	$\text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$	Newton
Drehimpuls ($\mathbf{L} = \mathbf{l} \times \mathbf{p}$)	$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$	
Drehmoment ($\mathbf{D} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}$)	N m	
Druck (Kraft per Fläche)	$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Pascal
Arbeit, Energie, Wärmemenge ($W, E = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}$)	$\text{J} = \text{N m} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$	Joule

1.3. Kontinuumsmodelle

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, ein physikalisches System mathematisch zu modellieren. Man betrachte zum Beispiel einen Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, der mit einem Gas gefüllt ist. Das Gas setzt sich zusammen aus Teilchen (Atomen oder Molekülen), die sich im Körper Ω bewegen können. Prinzipiell könnte man also jedes einzelne Teilchen beschreiben durch (zeitabhängige) Kenngrößen wie etwa seine Position $\mathbf{x}_i \in \Omega$, seine Masse $m_i \in \mathbb{R}$, seine Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$, und so weiter. Hier ist i ein Index, etwa $i \in \{1, \dots, N\}$ mit der Gesamtzahl N der Teilchen in Ω . Da N meist extrem groß ist, sind für diese Art der Darstellung aber extrem viele Daten notwendig, die man meist weder kennt noch z.B. für eine Simulation am Computer darstellen will oder kann.

Stattdessen verwendet man sogenannte **Kontinuumsmodelle**, die davon ausgehen, dass alle relevanten Größen als Funktionen im kontinuierlichen Gebiet Ω gegeben sind. Zum Beispiel könnte man das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ definieren

als die mittlere Geschwindigkeit aller Teilchen, die sich in einer kleinen ε -Umgebung von \mathbf{x} befinden, also

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \frac{1}{|\{i : \mathbf{x}_i \in B_\varepsilon(\mathbf{x})\}|} \sum_{i: \mathbf{x}_i \in B_\varepsilon(\mathbf{x})} \mathbf{v}_i.$$

Hier ist $B_r(\mathbf{x})$ die Kugel mit Radius r um den Punkt \mathbf{x} mit Volumen $|B_r(\mathbf{x})|$. Aus dieser Überlegung sieht man bereits, dass solche Kontinuumsmodelle nur dann sinnvoll sind, wenn sich in der Umgebung jedes beliebigen Punktes $\mathbf{x} \in \Omega$ hinreichend viele Teilchen befinden. Für Gase, Flüssigkeiten und Festkörper unter üblichen Bedingungen ist das eine sinnvolle Annahme; nur etwa für Gase bei extrem niedrigem Druck, also z.B. extrem hoch in der Erdatmosphäre, funktionieren solche Modelle nicht mehr.

In einem Teilchenmodell ist die Masse, die in einem Teilgebiet $\omega \subset \Omega$ enthalten ist, gerade die Summe der Massen der darin enthaltenen Teilchen,

$$m(\omega) = \sum_{i: \mathbf{x}_i \in \omega} m_i.$$

Teilen wir ω nun auf in eine disjunkte Vereinigung kleiner Elemente $\bigcup_{j=1}^J \omega_j$, etwa Würfel, und definieren wir die Massendichte ρ_j in ω_j als die Mittelung der Masse pro Einheitsvolumen

$$\rho_j := \frac{1}{|\omega_j|} \sum_{i: \mathbf{x}_i \in \omega_j} m_i$$

mit Einheit $[\rho_j] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Dann gilt offensichtlich

$$m(\omega) = \sum_j \rho_j |\omega_j|.$$

Beim Übergang zu einem Kontinuumsmodell schrumpft die Kantenlänge der Würfel zu 0, aus der Summe wird ein Integral und aus dem kleinen Volumen $|\omega_j|$ das Volumenelement $d\mathbf{x}$, also

$$(1.1) \quad m(\omega) = \int_{\omega} \rho_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

mit der **Massendichte** $\rho_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als Funktion, die wieder auf dem gesamten Gebiet Ω definiert ist. Auch im kontinuierlichen Modell muss ρ_m die Einheit $[\rho_m] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ haben, weil (formal) $[d\mathbf{x}] = \text{m}^3$ und $[m(\omega)] = \text{kg}$. Die Massendichte $\rho_m(\mathbf{x})$ gibt also an, wieviel Masse pro Volumen in einer infinitesimalen Umgebung von \mathbf{x} vorliegt; man kann auch direkt (1.1) als ihre Definition ansehen.

In ähnlicher Weise lassen sich Dichten für andere physikalische Größen definieren. Zum Beispiel ist der Impuls eines Teilchens $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ mit Einheit $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$. Dem entspricht im Kontinuumsmodell die (vektorwertige!) Impulsdichte $\boldsymbol{\rho}_p(\mathbf{x})$ mit Einheit $[\boldsymbol{\rho}_p] = \frac{[\mathbf{p}]}{\text{m}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}$, sodass der Gesamtimpuls in ω wieder $\mathbf{p}(\omega) = \int_{\omega} \boldsymbol{\rho}_p d\mathbf{x}$ ist. Andererseits gilt im Kontinuumsmodell für beliebige Teilgebiete

$$(1.2) \quad \mathbf{p}(\omega) = \int_{\omega} \rho_m(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Man kann sich nun fragen, ob die daraus folgende Integral-Identität $\int_{\omega} \boldsymbol{\rho}_p d\mathbf{x} = \int_{\omega} \rho_m \mathbf{v} d\mathbf{x}$, die für alle Teilgebiete $\omega \subset \Omega$ gilt, auch punktweise gilt. Tatsächlich

stimmt das unter der Annahme, dass ρ_m und \mathbf{v} stetig sind; wir haben also dann

$$\boldsymbol{\rho}_p(\mathbf{x}) = \rho_m(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Dies ist eine Anwendung des folgenden simplen Lemmas, das wir noch öfters brauchen werden und deshalb kurz beweisen.

LEMMA 1.1. *Sei $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und sei $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in \mathbf{x}_0 . Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B_r(\mathbf{x}_0)|} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}_0).$$

BEWEIS. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da ϕ stetig in \mathbf{x}_0 ist, gilt für hinreichend kleines $r > 0$, dass

$$|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_0)| < \epsilon \quad \forall \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0),$$

oder gleichbedeutend $\phi(\mathbf{x}_0) - \epsilon < \phi(\mathbf{x}) < \phi(\mathbf{x}_0) + \epsilon$. Damit gilt

$$\phi(\mathbf{x}_0) - \epsilon < \frac{1}{|B_r(\mathbf{x}_0)|} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \phi(\mathbf{x}_0) + \epsilon,$$

woraus die Behauptung folgt, wenn wir ϵ gegen 0 gehen lassen. \square

Die obige punktweise Identität $\boldsymbol{\rho}_p = \rho_m \mathbf{v}$ folgt also aus der integralen durch die Wahl $\omega = B_r(\mathbf{x}_0)$, Division durch das Volumen und Grenzwertbildung $r \rightarrow 0$.

Allgemein hat eine volumenbezogene Dichte ρ_\square für eine beliebige physikalische Größe \square mit Einheit $[\square]$ die Einheit $[\rho_\square] = \frac{[\square]}{\text{m}^3}$. Gelegentlich werden wir auch flächenbezogene Dichten benötigen, die also angeben, wie viel einer Größe pro Flächeneinheit vorliegt, und dementsprechend die Einheit $[\rho_\square] = \frac{[\square]}{\text{m}^2}$ haben.

In der Physik wird zwischen **extensiven** und **intensiven Zustandsgrößen** unterschieden. Dabei sind intensive Größen von der Stoffmenge unabhängig, z.B. Druck, Temperatur, Geschwindigkeit, während extensive Größen mit der Stoffmenge skalieren, z.B. Masse, Volumen. Mittels obiger Überlegung haben wir aus der extensiven Größe Masse die intensive Größe Massendichte gemacht.

1.4. Erhaltungssätze

Erhaltungssätze sind wichtige physikalische Prinzipien, die das intuitive Konzept beschreiben, dass gewisse physikalische Größen "erhalten bleiben" in dem Sinn, dass sich ihre Gesamtmenge in einem fixen Gebiet nur ändern kann durch Flüsse am Rand des Gebiets, die in das Gebiet hinein- oder daraus herausfließen, und in manchen Fällen durch Quell- oder Senkterme im Inneren des Gebiets. Sie begründen sich aus physikalischen Überlegungen und lassen sich nicht mathematisch "beweisen," sondern müssen axiomatisch angenommen werden.

Ein **Fluss** bezogen auf eine Größe beschreibt, wie viel von dieser Größe pro Zeit durch eine Fläche fließt. Wir bezeichnen Flüsse mit \mathbf{q}_\square , wobei das Symbol der betrachteten Größe als Subskript verwendet wird. Ein Fluss hat die Einheit $[\mathbf{q}_\square] = \frac{[\square]}{\text{m}^2 \text{s}}$. Beispielsweise gibt der Energie-/Wärmemengenfluss \mathbf{q}_E an, wieviel Energie ein Körper per Oberflächen- und Zeiteinheit verliert oder aufnimmt und hat die Einheit $[\mathbf{q}_E] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}}$. Analog beschreibt der Massenfluss \mathbf{q}_m einen Verlust oder Zugewinn an Masse durch eine Oberfläche und hat die Einheit $[\mathbf{q}_m] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$.

Flüsse für skalare Größen sind vektorwertig, haben also eine Richtung und eine Länge. Die tatsächliche Menge der durch eine Fläche Γ fließenden Größe per

Zeiteinheit ist gegeben durch das Oberflächenintegral $\int_{\Gamma} \mathbf{q}_{\square} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x})$ mit dem Normalenvektor \mathbf{n} auf Γ . Da der Normalenvektor Einheitslänge hat und dimensionslos ist und das Flächenelement (formal) die Einheit $[dS] = \text{m}^2$ hat, besitzt dieses (skalare) Integral also die Einheit $\frac{\square}{\text{s}}$ und beschreibt, wieviel der Größe \square pro Sekunde durch Γ fließt.

Wir betrachten nun vier wichtige Erhaltungssätze. Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein glattes beschränktes Gebiet. $\partial\Omega$ bezeichne den Rand von Ω und $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ den äußeren Normalenvektor.

1.4.1. Massenerhaltung. Der Massenerhaltungssatz (MES) besagt, dass die Änderung der Masse in Ω im Zeitintervall (t_1, t_2) gegeben ist durch den Massenfluss \mathbf{q}_m durch die Oberfläche $\partial\Omega$ im selben Zeitintervall. Wir gehen hier davon aus, dass Masse weder erzeugt noch zerstört werden kann und somit keine Quellen und Senken vorliegen. Die mathematische Formulierung lautet dann

$$\int_{\Omega} \rho_m(\mathbf{x}, t_2) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho_m(\mathbf{x}, t_1) d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}_m(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) dt.$$

Unter Verwendung von (1.1) ist die linke Seite gerade $m(\Omega, t_2) - m(\Omega, t_1)$. Diese Formulierung des Massenerhaltungssatzes ist sowohl in der Zeit als auch im Ort integral. Wir können daraus eine differenzielle Form herleiten. Es gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\rho_m(\mathbf{x}, t_2) - \rho_m(\mathbf{x}, t_1)}{t_2 - t_1} d\mathbf{x} = - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}_m(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) dt.$$

Unter der Annahme, dass ρ_m stetig differenzierbar in t ist und \mathbf{q}_m stetig in t ist, folgt unter Verwendung von Lemma 1.1 mit $t_2 \rightarrow t_1$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}_m(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}),$$

wobei wir aus Gründen der Notation t_1 durch t ersetzt haben. Mit dem Satz von Gauss folgt unter der Annahme, dass \mathbf{q}_m in der Variablen \mathbf{x} stetig differenzierbar ist,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q}_m(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Da Ω beliebig gewählt war, folgt mit Lemma 1.1

$$(MES) \quad \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{q}_m(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Die Identität (MES) ist der Massenerhaltungssatz in seiner differenziellen Form, auch Kontinuitätsgleichung genannt.

1.4.2. Energieerhaltung. Analog zum (MES) besagt der Energieerhaltungssatz (EES), dass die Änderung der Energie/Wärmemenge in Ω im Zeitintervall (t_1, t_2) durch die im selben Zeitintervall in Ω hinzugefügte (Quelle) bzw. weggenommene (Senke) Energie und den gesamten Energiefluss durch $\partial\Omega$ gegeben ist. Hier ist die in Ω enthaltene Energie zum Zeitpunkt t wiederum definiert als

$$E(\Omega, t) = \int_{\Omega} \rho_E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad [E] = \text{J},$$

mit der (zeitabhängigen) Energiedichte $[\rho_E] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$. Der Energieerhaltungssatz in integraler Form lautet dann

$$\int_{\Omega} \rho_E(\mathbf{x}, t_2) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho_E(\mathbf{x}, t_1) d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} f_E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}_E(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) \right] dt.$$

Wir verfahren völlig analog zur Herleitung des differentiellen (MES) mit dem einzigen Unterschied, dass nun auch ein Quellterm f_E mit $[f_E] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{s}}$ vorhanden ist. Nach Umwandeln des Zeitintegrals in eine Zeitableitung wie oben haben wir also analog

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho_E}{\partial t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}_E(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}).$$

Unter der Annahme, dass \mathbf{q}_E stetig differenzierbar ist, erhalten wir per Anwendung des Satzes von Gauss sowie Lemma 1.1 den (EES) in seiner differentiellen Form

$$(EES) \quad \frac{\partial \rho_E}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{q}_E(\mathbf{x}, t) = f_E(\mathbf{x}, t).$$

1.4.3. Impulserhaltung. Der Impulserhaltungssatz (zweites Newtonsches Gesetz) besagt, dass die Änderung des Gesamtimpulses in Ω im Zeitintervall (t_1, t_2) gleich der gesamten auf Ω im selben Zeitintervall wirkenden Kraft ist. (Erinnerung: $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, oder im Fall konstanter Masse $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a}$.) Wir unterscheiden hierbei Volumenkräfte mit einer Dichte $\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t)$ und $[\mathbf{F}_v] = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ sowie Oberflächenkräfte mit einer Dichte $\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ und $[\mathbf{F}_s] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$. Die Volumenkräfte wirken in ganz Ω , während die Oberflächenkräfte nur an $\partial\Omega$ angreifen. Man beachte, dass die Oberflächenkräfte neben der Zeit t und dem Raumpunkt \mathbf{x} auch von der Oberflächennormale \mathbf{n} im Punkt \mathbf{x} abhängen.

Ein Beispiel für eine Volumenkraft ist die Schwerkraft, und Beispiele für Oberflächenkräfte sind eine mechanische Belastung durch eine Last oder der Luftdruck.

Insgesamt lautet der Impulserhaltungssatz in integraler Form

$$(IES) \quad \int_{\Omega} [(\rho_m \mathbf{v})(\mathbf{x}, t_2) - (\rho_m \mathbf{v})(\mathbf{x}, t_1)] d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) dS(\mathbf{x}) \right] dt.$$

Unter Verwendung von (1.2) ist die linke Seite gerade $\mathbf{p}(\Omega, t_2) - \mathbf{p}(\Omega, t_1)$. Wir werden (IES) in späteren Kapiteln weiter analysieren und schließlich eine differentielle Formulierung finden.

1.4.4. Drehimpulserhaltung. Allgemein ist der Drehimpuls gegeben durch den Vektor $\mathbf{x} \times \mathbf{p}$. Der Drehimpulserhaltungssatz besagt, dass die Änderung des Gesamtdrehimpulses in Ω im Zeitintervall (t_1, t_2) gleich dem gesamten auf Ω im selben Zeitintervall wirkenden Drehmoments ist. In integraler Form lautet er

$$(DES) \quad \int_{\Omega} [\mathbf{x} \times (\rho_m \mathbf{v})(\mathbf{x}, t_2) - \mathbf{x} \times (\rho_m \mathbf{v})(\mathbf{x}, t_1)] d\mathbf{x} \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) dS(\mathbf{x}) \right] dt.$$

Formal entsteht er einfach aus (IES) durch Vormultiplikation aller Terme mit $\mathbf{x} \times$. Wie den (IES) werden wir auch den (DES) in späteren Kapiteln genauer untersuchen.

1.5. Bausteine eines mathematischen Modells

Ein mathematisches Modell setzt die untersuchten physikalischen Größen in Form von Gleichungen miteinander in Bezug. In vielen Fällen hat ein solches Modell die Form einer (gewöhnlichen oder partiellen) Differentialgleichung. Ziel ist es, diese Gleichungen zu lösen, um die Größe(n) von Interesse ausschließlich in Abhängigkeit von den freien Variablen (für gewöhnlich Zeit- und Ortsvariablen, das heißt t und \mathbf{x}) zu erhalten.

Um die zu lösenden Gleichungen aufzustellen, geht man meist von (allgemein gültigen) **Erhaltungssätzen** aus, wie wir sie gerade gesehen haben. Da diese für gewöhnlich zu Gleichungssystemen mit mehr Unbekannten als Gleichungen führen, benötigt man des Weiteren **Materialgesetze**, manchmal auch als konstitutive Gleichungen bezeichnet. Dabei handelt es sich um weitere Gleichungen, die die physikalischen Eigenschaften eines konkreten Materials beschreiben und es uns so erlauben, weitere Unbekannte miteinander in Bezug zu setzen. Auf diese Weise erhält man im Idealfall schließlich eine Gleichung oder ein Gleichungssystem, das (unter bestimmten Anfangs- und Randbedingungen) eine eindeutige Lösung hat.

In den meisten Fällen in dieser Vorlesung gehen wir also nach dem folgenden Schema vor:

$$\text{“Erhaltungssätze + Materialgesetze} \Rightarrow \text{Modell”}.$$

Wir beschränken uns meist auf das Herleiten eines bestimmten Modells und überlassen Betrachtungen zur eindeutigen Lösbarkeit späteren Vorlesungen.

1.6. Ein erstes Beispiel: die barometrische Höhenformel

Gesucht ist eine Formel, die den Luftdruck p ($[p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$) in Abhängigkeit von der Höhe x_3 angibt. Da der Luftdruck ursächlich mit der Anziehungskraft der Erde zusammenhängt, ist es naheliegend, bei der Herleitung des Modells vom (IES) auszugehen. Die grundlegende Modellannahme ist, dass alle Größen in dieser Situation nur von der Höhe x_3 abhängen und somit weder vom Ort (x_1, x_2) noch, da wir einen statischen Zustand ohne zeitliche Änderungen voraussetzen, von der Zeit t .

Sei Ω ein Zylinder der Höhe h mit einer Kreisfläche A , dessen Basis sich in Höhe $x_3 = z$ befindet. Wegen des statischen Zustandes ist der Gesamtimpuls $\mathbf{p}(\Omega)$ konstant in der Zeit, und der (IES) vereinfacht sich zu

$$0 = \int_{\Omega} \mathbf{F}_v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS(\mathbf{x}).$$

Alle Kräfte sind also im Gleichgewicht und heben sich gegenseitig auf. Die Gravitation wirkt als Volumenkraft in Ω in negativer x_3 -Richtung mit der Erdbeschleunigung $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, also

$$\mathbf{F}_v(\mathbf{x}) = -\rho_m(\mathbf{x})g\mathbf{e}_3,$$

wobei $\rho_m = \rho_m(x_3)$ die Massendichte der Luft ist. Die Oberflächenkraft stammt vom Luftdruck $p(\mathbf{x}) = p(x_3)$, der in alle Richtungen gleichförmig wirkt, und hat die Form

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{n}.$$

Wir beschreiben $\partial\Omega$ als die Vereinigung der unteren und oberen Kreisflächen A_0 und A_1 mit Fläche A und Normalenvektoren $-\mathbf{e}_3$ und \mathbf{e}_3 sowie des Zylindermantels

M . Wegen der Ortsunabhängigkeit und Symmetrie heben sich alle Integrale über den Mantel M zu 0 auf. Einsetzen in die verbleibenden Terme liefert

$$0 = -Ag\mathbf{e}_3 \int_z^{z+h} \rho_m(x_3) dx_3 + A\mathbf{e}_3(p(z) - p(z+h)).$$

Dividieren durch Ah und $h \rightarrow 0$ liefert

$$(1.3) \quad g\rho_m(x_3) = -\frac{\partial p}{\partial x_3}(x_3),$$

wobei wir z wieder durch x_3 ersetzt haben. Wir haben nun eine skalare Gleichung mit zwei Unbekannten (ρ_m und p) und somit ein unterbestimmtes Modell. An dieser Stelle bedienen wir uns des folgenden **Materialgesetzes**, das für ideale Gase (und somit näherungsweise für die Luft in der Atmosphäre) gilt:

$$\frac{p(x_3)}{\rho_m(x_3)} = \text{konst.} = \frac{p_0}{\rho_{m,0}} = \frac{101\,325 \text{ Pa}}{1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}},$$

wobei p_0 und $\rho_{m,0}$ der Druck bzw. die Dichte auf Meereshöhe sind. Für ideale Gase stehen also der Druck und die Dichte in linearem Zusammenhang. Damit erhalten wir schließlich

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}(x_3) = -g \frac{\rho_{m,0}}{p_0} p(x_3), \quad p(0) = p_0.$$

Dies ist eine sehr einfache gewöhnliche Differentialgleichung, die genau eine Lösung besitzt, die zugleich die Anfangsbedingung erfüllt. Für diesen sehr einfachen Fall können wir diese Lösung analytisch berechnen. Da dies im Allgemeinen für komplexere Modelle nicht möglich ist, bedient man sich in solchen Fällen numerischer Verfahren, um die Lösung zu approximieren.

Oft ist es hilfreich, alle im Modell auftretenden Größen so zu skalieren, dass die vorkommenden Zahlen alle in etwa die Größenordnung 1 besitzen. Man spricht hierbei von **Entdimensionalisierung**. Wir betrachten also die skalierten (dimensionslosen) Größen $\tilde{p}(\tilde{x}_3) := \frac{p(x_3)}{p_0}$ und $\tilde{x}_3 := \frac{x_3}{\alpha}$, wobei α eine noch zu bestimmende Länge ist. Damit erhalten wir

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3}(\tilde{x}_3) = \frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_3} = \frac{\alpha}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\alpha \frac{g\rho_{m,0}}{p_0} \tilde{p}(\tilde{x}_3).$$

Wir wählen nun

$$\alpha := \frac{p_0}{g\rho_{m,0}} = 8607,3 \frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 8607,3 \frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}} = 8607,3 \text{ m}$$

und erhalten somit das skalierte dimensionslose Anfangswertproblem

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3}(\tilde{x}_3) = -\tilde{p}(\tilde{x}_3), \quad \tilde{p}(0) = 1,$$

dessen Lösung durch die Exponentialfunktion $\tilde{p}(\tilde{x}_3) = \exp(-\tilde{x}_3)$ gegeben ist.

BEMERKUNG 1.2. Die barometrische Höhenformel für eine inkompressible Flüssigkeit (z.B. näherungsweise Wasser) hat eine völlig andere Gestalt. Dies liegt an der Gültigkeit eines anderen Materialgesetzes. Für den Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit gilt $\rho_m(x_3) = \text{konst.} = \rho_0$. Einsetzen in (1.3) ergibt

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -g\rho_0, \quad p(0) = p_0.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch die lineare Funktion $p(x_3) = p_0 - g\rho_0 x_3$. Da Wasser bekanntlich eine Dichte von etwa $10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ besitzt, ergibt sich in Wasser ein Druckunterschied von etwa $10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 10^4 \text{ Pa}$ per Meter, oder etwa 1 bar per 10 m (da $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$).

KAPITEL 2

Wärmeleitung

Wir betrachten nun einen Körper, dessen Ausdehnung durch das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gegeben ist, und der durch innere Wärmequellen bzw. -senken $f_E(\mathbf{x}, t)$ erhitzt bzw. gekühlt wird. Außerdem wird der Körper über seinen Rand gekühlt bzw. erhitzt. Gesucht ist nun $T(\mathbf{x}, t)$, also die Temperatur des Körpers am Ort \mathbf{x} zur Zeit t .

2.1. Die instationäre Wärmeleitungsgleichung in 3D

Bei der Herleitung des Modells gehen wir vom (EES) aus. Aus Kapitel 1 wissen wir, dass eine mögliche Form desselben gegeben ist durch

$$(EES) \quad \int_{\omega} \frac{\partial \rho_E}{\partial t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\omega} f_E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\partial\omega} \mathbf{q}_E(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}),$$

wobei diese Gleichung für beliebige Teilmengen $\omega \subset \Omega$ gilt. Dies ist **eine (skalare) Gleichung** mit **vier Unbekannten** (Energiedichte ρ_E und Wärmefluss \mathbf{q}_E). Um die Anzahl der Unbekannten auf eine, nämlich die Temperatur $T(\mathbf{x}, t)$, zu reduzieren, benötigen wir die folgenden **Materialgesetze**.

- Der Wärmefluss \mathbf{q}_E hängt linear vom Temperaturgradienten ∇T ab, also

$$(2.1) \quad \mathbf{q}_E(\mathbf{x}, t) = -\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t),$$

wobei $\vec{\Lambda}(\mathbf{x})$ mit $[\vec{\Lambda}] = \frac{\text{J}}{\text{mKs}}$ ein symmetrisch positiv definiten Tensor zweiter Stufe (eine Matrix) ist – der **Wärmeleitungstensor**. Gleichung (2.1) bezeichnet man auch als **Fouriersches Wärmeleitgesetz**. Die positive Definitheit impliziert, dass

$$\langle \mathbf{q}_E, -\nabla T \rangle = \langle -\vec{\Lambda} \nabla T, -\nabla T \rangle > 0,$$

dass also der Winkel zwischen negativem Temperaturgradienten und Wärmefluss kleiner als 90° ist. Wärme kann also nicht von kalten in warme Gebiete fließen.

Als **isotrop** bezeichnet man ein Medium, in dem die Leitfähigkeit unabhängig von der räumlichen Richtung ist. Es gilt dann $\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})I$, wobei I die Einheitsmatrix und $\lambda(\mathbf{x}) > 0$ die (skalare) Wärmeleitfähigkeit ist. In diesem Fall ist also $\mathbf{q}_E(\mathbf{x}, t) = -\lambda(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t)$, was bedeutet, dass der Wärmefluss gerade entlang des negativen Temperaturgradienten verläuft, also in Richtung des steilsten Abstiegs von warmen zu kalten Gebieten.

- Die Wärmemengen-/Energiedichte ist gegeben durch

$$\rho_E(\mathbf{x}, t) = c \rho_m(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t),$$

wobei c die spezifische Wärmekapazität mit $[c] = \frac{\text{J}}{\text{K kg}}$ ist, und die Massendichte ρ_m als zeitlich konstant angenommen wird. Hierbei ist c eine Stoffkonstante, die angibt, wieviel Energie einem Stoff zugeführt werden muss, um 1 kg desselben um 1 Grad Kelvin zu erwärmen.

Durch Einsetzen dieser beiden Materialgesetze in (EES) erhalten wir

$$(2.2) \quad c \int_{\omega} \rho_m(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\partial\omega} \left(\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \int_{\omega} f_E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Dies ist die instationäre (zeitabhängige) Wärmeleitungsgleichung, geschrieben in Form einer Erhaltungsgleichung, für beliebige $\omega \subset \Omega$.

Unter der zusätzlichen Annahme, dass $\vec{\Lambda} \nabla T$ stetig differenzierbar in \mathbf{x} ist, können wir wieder den Satz von Gauss gefolgt von Lemma 1.1 anwenden, um zu einer rein differenziellen Form zu gelangen, nämlich

$$(2.3) \quad c \rho_m(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \left(\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t) \right) = f_E(\mathbf{x}, t).$$

Dies ist eine parabolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Für den Fall eines isotropen ($\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})I$) und homogenen ($\lambda(\mathbf{x}) \equiv \lambda$) Materials vereinfacht sich (2.3) weiter zu

$$c \rho_m \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \lambda \Delta T(\mathbf{x}, t) = f_E(\mathbf{x}, t)$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

2.2. Anfangs- und Randbedingungen der Wärmeleitungsgleichung in 3D

Wir betrachten nun zunächst den stationären Fall, in dem sich (2.3) zu

$$(2.4) \quad -\nabla \cdot \left(\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}) \right) = f_E(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega$$

vereinfacht. Damit (2.4) eine eindeutige Lösung hat, benötigen wir noch geeignete **Randbedingungen**. Auch aus physikalischen Überlegungen ist das einleuchtend: wenn wir ein Wärmeleitungsproblem in einem Körper Ω lösen wollen, müssen wir zunächst festlegen, ob der Körper am Rand $\partial\Omega$ z.B. erwärmt oder gekühlt wird, oder ob etwa thermale Isolation (also kein Wärmefluss durch den Rand) vorliegt. Wir werden nun einige verschiedene Randbedingungen kennenlernen und ihre physikalische Interpretation untersuchen.

Die Bedingung

$$T(\mathbf{x}) = T_{\partial\Omega}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

mit einer vorgegebenen Temperatur-Randfunktion $T_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man als **Dirichlet-Randbedingung** oder **Randbedingung erster Art**. Physikalisch bedeutet sie, dass am Rand eine bekannte Temperatur vorliegt, wenn also z.B. der Rand des Gebiets von außen auf eine gewünschte Temperatur erhitzt oder gekühlt wird. Ein mathematisch wichtiger Spezialfall ist $T_{\partial\Omega} \equiv 0$, also konstante Temperatur 0 am Rand, was als **homogene Dirichlet-Randbedingung** bezeichnet wird.

Die Bedingung

$$\left(-\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{n} = q_{\partial\Omega}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

mit einer vorgegebenen Funktion $q_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man als **Neumann-Randbedingung** oder **Randbedingung zweiter Art**. Die linke Seite ist wegen dem Fourierschen Gesetz nichts anderes als $\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}$; diese Randbedingung fixiert also den Wärmefluss durch den Rand auf einen vorgegebenen Wert. Diese Randbedingung ist also dann zu verwenden, wenn bekannt ist, wieviel Wärmeenergie per Sekunde und Flächeneinheit am Rand zugeführt wird oder verloren geht. Der wichtigste Spezialfall ist die **homogene Neumann-Randbedingung** mit $q_{\partial\Omega} \equiv 0$, es tritt also kein Wärmefluss durch den Rand auf. Das bedeutet, dass der Körper am Rand perfekt isoliert ist.

Neben der Dirichlet- und Neumann-Randbedingung gibt es noch die **Robin-Randbedingung** oder **Randbedingung dritter Art**. Diese ist gegeben durch

$$(-\vec{\Lambda}(\mathbf{x})\nabla T(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} = \alpha(T(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

wobei g eine gegebene Funktion auf dem Rand ist (Umgebungstemperatur), und $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ mit $[\alpha] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{K s}}$ die sogenannte **Wärmeübergangszahl** ist. Im Allgemeinen kann $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ eine Funktion sein. Die physikalische Interpretation dieser Randbedingung ist, dass der Wärmefluss $\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}$ durch den Rand proportional (mit Proportionalitätskonstante α) zur Temperaturdifferenz zwischen Rand und Umgebung ist. Man sieht leicht, dass für $\alpha = 0$ die Robin-Randbedingung zur homogenen Neumann-Randbedingung wird (perfekte Isolation). Für $\alpha \rightarrow \infty$ wird die Robin-Randbedingung hingegen zur Dirichlet-Randbedingung $T = g$ (perfekte ‘‘Kopplung’’ zwischen Rand und Umgebung).

Es gibt auch kompliziertere Randbedingungen, wie etwa nichtlineare Strahlungsrandbedingungen, auf die wir hier nicht eingehen.

Wichtig ist auch der Fall **gemischter Randbedingungen**. Sei dazu der Rand etwa aufgeteilt in zwei disjunkte, nichtleere Mengen $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$. Gemischte Randbedingungen bedeuten nun zum Beispiel, dass auf Γ_D Dirichlet-Randbedingungen vorliegen, während auf Γ_N Neumann-Randbedingungen vorliegen.

Der Fall von inhomogenen Randbedingung lässt sich leicht auf den homogenen Fall reduzieren. Dazu betrachten wir das Problem mit gemischten Randbedingungen

$$(2.5) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\vec{\Lambda} \nabla T) = f_E, & \text{in } \Omega \\ T = g, & \text{auf } \Gamma_D \\ (-\vec{\Lambda} \nabla T) \cdot \mathbf{n} = h, & \text{auf } \Gamma_N. \end{cases}$$

Sei nun T_g eine beliebige Funktion mit $T_g|_{\Gamma_D} \equiv g$. Es folgt nun, dass $\tilde{T} := T - T_g$ das folgende Randwertproblem löst.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\vec{\Lambda} \nabla \tilde{T}) = \overbrace{f_E + \nabla \cdot (\vec{\Lambda} \nabla T_g)}{=: \tilde{f}_E}, & \text{in } \Omega \\ \tilde{T} = 0, & \text{auf } \Gamma_D \\ (-\vec{\Lambda} \nabla \tilde{T}) \cdot \mathbf{n} = \underbrace{h + (\vec{\Lambda} \nabla T_g) \cdot \mathbf{n}}_{=: \tilde{h}}, & \text{auf } \Gamma_N. \end{cases}$$

Die neue Unbekannte \tilde{T} erfüllt also nun auf Γ_D die homogene Dirichlet-Randbedingung, weshalb dieser Schritt **Homogenisierung** genannt wird. Die Lösung von (2.5) erhält

man dann als $T = \tilde{T} + T_g$. Dies kann hilfreich sein, weil etwa die eindeutige Lösbarkeit einfacher für den Fall von homogenen Dirichlet-Randbedingungen zu beweisen ist.

Im instationären Fall benötigen wir neben Randbedingungen eine **Anfangswertbedingung**, damit die zeitabhängige Wärmeleitungsgleichung eindeutig lösbar ist. Unter Beschränkung auf Dirichlet-Randbedingungen lautet das zu lösende System dann

$$\begin{cases} c \rho_m(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \left(\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t) \right) = f_E(\mathbf{x}, t) & \text{in } \Omega \times (t_0, t_1), \\ T(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) & \text{auf } \partial\Omega \times (t_0, t_1), \\ T(\mathbf{x}, t_0) = T_0(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

wobei T_0 und g gegebene Funktionen sind, die die folgende Kompatibilitätsbedingung erfüllen müssen:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} g(\mathbf{x}, t) = T_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

2.3. Der Fall springender Materialkoeffizienten

Wir betrachten nun den Fall eines unstetigen Wärmeleitungstensors $\vec{\Lambda}$. Dazu nehmen wir an, dass das Rechengebiet Ω entlang einer glatten Grenze in zwei offene, disjunkte Gebiete Ω_1 und Ω_2 aufgeteilt ist und in jedem der zwei Gebiete ein unterschiedlicher (der Einfachheit halber konstanter) Wärmeleitungstensor

$$\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \vec{\Lambda}_1, & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \vec{\Lambda}_2, & \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases}$$

vorliegt. Ein Beispiel hierfür ist ein Stab, dessen eine Hälfte aus Kupfer und dessen andere Hälfte aus Stahl besteht, oder die Außenwand eines Gebäudes, die aus einem Baumaterial und einer Isolierschicht besteht. Weiters gehen wir vom stationären Fall sowie von der Abwesenheit von Wärmequellen, also $f_E \equiv 0$, aus. Aus (2.2) folgt dann, dass für beliebige $\omega \subset \Omega$ gilt

$$- \int_{\partial\omega} \left(\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Zur Herleitung der partiellen Differentialgleichung (2.3) haben wir benötigt, dass $\vec{\Lambda} \nabla T$ stetig differenzierbar ist, was im Fall springender Koeffizienten eine zu starke Annahme ist. Innerhalb jedes Gebietes Ω_j sind aber alle Daten glatt, weshalb wir auch Glattheit für $(\vec{\Lambda} \nabla T)|_{\Omega_j}$ annehmen können. Das heißt, mit $\omega = B_r(\mathbf{x}_0)$ für $\mathbf{x}_0 \in \Omega_j$ und r hinreichend klein, sodass $\omega \subset \Omega_j$ können wir den Satz von Gauss und anschließend Lemma 1.1 anwenden und erhalten

$$(2.6) \quad \begin{aligned} -\nabla \cdot \left(\vec{\Lambda}_1 \nabla T(\mathbf{x}) \right) &= 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ -\nabla \cdot \left(\vec{\Lambda}_2 \nabla T(\mathbf{x}) \right) &= 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_2. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung gilt also stückweise für Ω_1 und Ω_2 , was *nicht* gleichbedeutend damit ist, dass sie auf ganz Ω gilt. Entscheidend ist, was auf der Schnittstelle $\Gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ passiert, der Fläche, die die beiden Gebiete voneinander trennt.

Wählen wir für ω eine zusammenhängende Teilmenge sodass $\omega_j := \omega \cap \Omega_j$, $j = 1, 2$, beide nicht leer sind, und somit auch $\gamma := \omega \cap \Gamma \neq \emptyset$. Seien weiters \mathbf{n}_j die Außennormalen zu Ω_j , insbesondere $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ auf Γ . Der Kürze halber schreiben

wir \mathbf{q}_E für $-\vec{\Lambda}\nabla T$ und $\mathbf{q}_E^{(j)}$ für die Einschränkung auf Ω_j . Dann gilt mit dem Satz von Gauss und (2.6)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\omega} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial\omega_1} \mathbf{q}_E^{(1)} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\partial\omega_2} \mathbf{q}_E^{(2)} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\gamma} (\mathbf{q}_E^{(1)} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}_E^{(2)} \cdot \mathbf{n}_2) \, dS \\ &= \int_{\omega_1} \nabla \cdot \mathbf{q}_E^{(1)} \, dS + \int_{\omega_2} \nabla \cdot \mathbf{q}_E^{(2)} \, dS - \int_{\gamma} (\mathbf{q}_E^{(1)} - \mathbf{q}_E^{(2)}) \cdot \mathbf{n}_1 \, dS \\ &= - \int_{\gamma} (\mathbf{q}_E^{(1)} - \mathbf{q}_E^{(2)}) \cdot \mathbf{n}_1 \, dS. \end{aligned}$$

Da ω beliebig war, gilt dies für beliebige $\gamma \subset \Gamma$, und mit Anwendung von Lemma 1.1 folgt die punktweise Identität

$$0 = (\mathbf{q}_E^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathbf{q}_E^{(2)}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \quad \text{oder} \quad (\vec{\Lambda}_1 \nabla T_1)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1 = (\vec{\Lambda}_2 \nabla T_2)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1.$$

Statt einer einzigen partiellen Differentialgleichung auf ganz Ω erhalten wir also die beiden per Übergangsbedingung gekoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\vec{\Lambda}_1 \nabla T_1(\mathbf{x})) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ -\nabla \cdot (\vec{\Lambda}_2 \nabla T_2(\mathbf{x})) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_2, \\ (\vec{\Lambda}_1 \nabla T_1)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1 &= (\vec{\Lambda}_2 \nabla T_2)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned}$$

Die Funktion $T(\mathbf{x})$ löst also die Wärmeleitungsgleichung, wenn sie stückweise $-\nabla \cdot (\vec{\Lambda} \nabla T) = 0$ in Ω_j löst und die Normalkomponente ihres Wärmeflusses $(\vec{\Lambda} \nabla T)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1$ auf Γ stetig ist.

Wir erinnern uns, dass Ausdrücke der Form $(\vec{\Lambda} \nabla T)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1 = -\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_1$ gerade die Größe des Wärmeflusses durch Γ angeben. Somit ist diese Bedingung physikalisch schlüssig: die Größe des aus Ω_1 über Γ austretenden Wärmeflusses muss gerade dem über Γ in Ω_2 eintretenden Wärmefluss entsprechen.

In Abschnitt 2.6 werden wir ein simples Beispiel für diesen Fall betrachten.

2.4. Variationsformulierung

Wir kehren zurück zum Fall glatter Koeffizienten und nehmen den stationären Fall an, womit die Gleichung (2.4) gilt. Wir werden jetzt noch eine andere mathematische Formulierung dieses Problems herleiten, die man als *Variationsformulierung* oder auch *schwache Formulierung* bezeichnet. Dazu multiplizieren wir diese Gleichung mit einer sogenannten *Testfunktion* $\varphi \in \mathcal{V}$ aus einem geeignet gewählten Raum \mathcal{V} von Funktionen über Ω und integrieren über Ω , also

$$- \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x})) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_E(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Partielle Integration ergibt dann

$$(2.7) \quad \int_{\Omega} (\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x})) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{x}) (\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f_E(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Wir gehen nun entweder von homogenen Dirichlet- oder homogenen Neumann-Randbedingungen aus. Im ersten Fall ist also $T \equiv 0$ auf $\partial\Omega$, und wir schränken

den Raum \mathcal{V} so ein, dass auch alle $\varphi \in \mathcal{V}$ die Bedingung $\varphi \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ erfüllen. Im zweiten Fall ist $\vec{\Lambda} \nabla T \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ auf $\partial\Omega$. In beiden Fällen verschwindet also das Randintegral, und wir erhalten

$$\int_{\Omega} (\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x})) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_E(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Da $\varphi \in \mathcal{V}$ beliebig gewählt war, gilt diese Gleichung für alle $\varphi \in \mathcal{V}$. Wir definieren die *Bilinearform* $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie das lineare Funktional $\ell : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$a(\psi, \varphi) := \int_{\Omega} (\vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x})) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \ell(\varphi) := \int_{\Omega} f_E(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Da $\vec{\Lambda}$ symmetrisch positiv definit ist, ist auch a symmetrisch, also $a(\varphi, \psi) = a(\psi, \varphi)$ für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$. Wir können nun die Wärmeleitungsgleichung als *Variationsproblem* schreiben: finde $T \in \mathcal{V}$, sodass

$$(2.8) \quad a(T, \varphi) = \ell(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}.$$

Man beachte, dass diese Formulierung nur erste Ableitungen in T und φ beinhaltet, während die ursprüngliche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung war.

Üblicherweise wählt man als Funktionenraum im Fall von Neumann-Randbedingungen $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$, also den Hilbertraum von L_2 -Funktionen auf Ω , deren erste schwache Ableitungen auch in L_2 liegen; und im Fall von homogenen Dirichlet-Randbedingungen den Raum $H_0^1(\Omega)$, also den Teilraum von $H^1(\Omega)$ von Funktionen, die am Rand (im Sinne des Spuoperators) 0 sind. Man kann dann unter entsprechenden Voraussetzungen (mittels des Satzes von Lax-Milgram) zeigen, dass (2.8) eine eindeutige Lösung T hat. Falls T regulär genug ist (also z.B. $T \in C^2(\Omega)$), so löst T auch die ursprüngliche (starke) Formulierung (2.4). Es gibt aber Fälle, wo zwar eine schwache Lösung $T \in H^1(\Omega)$ existiert, diese aber nicht C^2 ist; ein Beispiel dafür wäre wieder der Fall springender Koeffizienten, den wir in Abschnitt 2.3 behandelt haben. Tatsächlich ist (2.8) auch in diesem Fall gültig, wie man mit ähnlichen Argumenten wie dort zeigt.

Eine weitere wichtige Anwendung für die Variationsformulierung (2.8) ist als Ausgangspunkt für die Diskretisierung des Problems mittels des Finite-Elemente-Verfahrens, welches zur Approximation der Lösung T am Computer verwendet wird.

2.5. Energiebetrachtungen

Wir zeigen nun, dass die Lösung von (2.8) auch als Lösung eines Minimierungsproblems gesehen werden kann. Eine derartige Beziehung lässt sich unter sehr abstrakten Annahmen nachweisen, wie der folgende Satz zeigt. Wir benötigen dazu die Voraussetzung, dass a positiv definit ist, also

$$a(v, v) > 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}.$$

Tatsächlich gilt wegen der positiven Definitheit von $\vec{\Lambda}$

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \langle \vec{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x} \geq \int_{\Omega} \lambda_{\min}(\vec{\Lambda}(\mathbf{x})) |\nabla v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \geq \underline{\lambda} |v|_{H^1}^2$$

mit

$$\underline{\lambda} = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \lambda_{\min}(\vec{\Lambda}(\mathbf{x})) > 0.$$

Unter der Annahme von homogenen Dirichlet-Randbedingungen ist $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$, wo die Seminorm $|\cdot|_{H^1}$ äquivalent zur vollen Norm $\|\cdot\|_{H^1}$ ist. Somit gilt in diesem Fall $a(v, v) > 0$ für $v \neq 0$.

SATZ 2.1. *Sei \mathcal{V} ein Vektorraum und $a(\cdot, \cdot)$ eine auf $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ gegebene, symmetrische positiv definite Bilinearform. Sei $\ell \in \mathcal{V}'$ ein lineares Funktional und sei*

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$$

für $v \in \mathcal{V}$. Dann gilt:

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{V}} J(v) \iff \forall v \in \mathcal{V} : a(u, v) = \ell(v)$$

BEWEIS. “ \Rightarrow ”:

Da u das Minimierungsproblems löst, gilt für beliebiges $v \in \mathcal{V}$:

$$\left. \frac{dJ(u + tv)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Somit gilt

$$0 = \frac{1}{2} (a(v, u) + a(u, v) + 2ta(v, v)) \Big|_{t=0} - \ell(v).$$

Unter Verwendung der Symmetrie von $a(\cdot, \cdot)$ folgt nun unmittelbar die Aussage, da v beliebig gewählt war.

“ \Leftarrow ”:

Für $v \in \mathcal{V}$ beliebig haben wir aufgrund der Symmetrie von $a(\cdot, \cdot)$ und da u das Variationsproblem löst

$$J(u + v) = \underbrace{\frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u)}_{=J(u)} + \frac{1}{2}a(v, v) + \underbrace{a(u, v) - \ell(v)}_{=0} = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v).$$

Da $a(v, v) \geq 0$ und $a(v, v) = 0 \Leftrightarrow v \equiv 0$, ist u die eindeutige Lösung des Minimierungsproblems. \square

2.6. Modellreduktion – die 1D-Wärmeleitungsgleichung

Falls Ω ein Gebiet ist, dessen Ausdehnung in einer oder zwei Koordinatenrichtungen sehr klein ist, lässt sich die 3D-Wärmeleitungsgleichung auf zwei oder eine Dimension reduzieren und somit drastisch vereinfachen. Wir betrachten hier nur den Fall der 1D-Wärmeleitungsgleichung.

Sei

$$\Omega = (0, L) \times \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$$

mit $R \ll L$ ein langer, dünner Zylinder entlang der x_1 -Achse mit Radius R und Länge L . Aufgrund der geringen Ausdehnung in x_2 - und x_3 -Richtung ist es plausibel anzunehmen, dass die Temperatur und die Quellendichte (nahezu) nur von x_1 abhängen. Wir nehmen also an, dass

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1) \quad \text{und} \quad f_E(\mathbf{x}) = f_E(x_1)$$

gilt. Die Leitfähigkeit sei als skalare Funktion $\lambda = \lambda(x_1)$ gegeben, und das Fouriersche Wärmeleitgesetz (2.1) vereinfacht sich somit zu

$$\mathbf{q}_E(x_1) = (-\lambda(x_1)T'(x_1), 0, 0)^T.$$

An den Stirnflächen nehmen wir Dirichlet- und an der Mantelfläche Robin-Randbedingungen an:

$$T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L, \quad \text{und} \quad \mathbf{q}_E(x_1) \cdot \mathbf{n} = \alpha(T(x_1) - g(x_1)),$$

wobei T_0 , T_L und die Umgebungstemperatur $g(\cdot)$ gegeben sind.

Wir betrachten nur den stationären Fall. Der (EES) in integraler Form lautet dann

$$\int_{\partial\omega} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}) = \int_{\omega} f_E \, d\mathbf{x},$$

wobei

$$\omega = (\tilde{x}, \tilde{x} + h) \times \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 + x_3^2 < R^2\} \subset \Omega$$

eine kleine Zylinderscheibe der Länge h ist. Unter Verwendung der Robin-Randbedingungen und des Fourierschen Wärmeleitgesetzes erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \pi R^2 (\lambda(\tilde{x})T'(\tilde{x}) - \lambda(\tilde{x} + h)T'(\tilde{x} + h)) + 2\pi R \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+h} \alpha(T(x_1) - g(x_1)) \, dx_1 \\ = \pi R^2 \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+h} f_E(x_1) \, dx_1. \end{aligned}$$

Division durch $h\pi R^2$ und $h \rightarrow 0$ ergeben unter Verwendung von Lemma 1.1

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} (\lambda T')(\tilde{x}) + \frac{2\alpha}{R} (T(\tilde{x}) - g(\tilde{x})) = f_E(\tilde{x}).$$

Da $\tilde{x} \in (0, L)$ beliebig gewählt war, erhalten wir mit $\hat{\alpha} := \frac{2\alpha}{R}$

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_1} (\lambda T')(x) + \hat{\alpha} T(x) = f_E(x) + \hat{\alpha} g(x), & x \in (0, L) \\ T(0) = T_0, & T(L) = T_L, \end{cases}$$

wobei wir aus Gründen der besseren Notation \tilde{x} durch x ersetzt haben. Dies ist die stationäre eindimensionale Wärmeleitungsgleichung (in starker Formulierung).

Betrachten wir noch den Fall springender Koeffizienten. Sei $\alpha = 0$, $f_E \equiv 0$, und

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1, & x \leq L/2, \\ \lambda_2, & x > L/2. \end{cases}$$

Wir schreiben weiters T_1 und T_2 für die Einschränkung von T auf die beiden Hälften des Intervalls. Folgend der Herleitung in Abschnitt 2.3 erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\lambda_1 T_1'' = \lambda_2 T_2'' = 0,$$

womit T_1 und T_2 beides lineare Funktionen sind; insbesondere sind T_1' und T_2' konstant. Die Kopplungsbedingung lautet

$$\lambda_1 T_1'(L/2) = \lambda_2 T_2'(L/2)$$

und somit

$$T_1'/T_2' = \lambda_2/\lambda_1.$$

Da

$$T(L) - T(0) = \int_0^L T'(x) \, dx = \frac{L}{2} (T_1' + T_1' \lambda_1/\lambda_2) = T_1' \frac{L}{2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$$

folgt

$$T_1' = \frac{2(T_L - T_0)\lambda_2}{L(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

und weiter

$$T(L/2) = T_0 + \frac{L}{2}T_1' = T_0 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(T_L - T_0) =: T_{L/2}.$$

In diesem Fall ist also T eine stückweise lineare Funktion durch die drei Punkte $T(0) = T_0$, $T(L/2) = T_{L/2}$, $T(L) = T_L$ mit $T_{L/2} \in [T_0, T_L]$.

KAPITEL 3

Elastizität

In diesem Kapitel betrachten wir die Verformung elastischer Körper unter der Einwirkung von Oberflächen- und Volumenkräften. Der Begriff “elastisch” bezeichnet hier eine Klasse von Körpern, die nach Wegnahme der Krafteinwirkung wieder in ihren ursprünglichen Zustand zurückkehren. Im Gegensatz dazu stehen plastische Körper, bei denen die Verformung bei Wegfall der Kräfte zumindest teilweise bestehen bleibt; diese sind aber bedeutend schwieriger zu modellieren und werden in dieser Vorlesung nicht betrachtet.

Wie schon in vorigen Kapiteln verwenden wir ein *Kontinuumsmodell*, das heißt, alle relevanten Größen werden als in jedem Punkt des Körpers definiert angenommen; der Aufbau der Materie aus Atomen, Molekülen etc. wird dabei vernachlässigt.

Gesucht ist schließlich ein Modell, das die Verschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ eines beliebigen Punktes \mathbf{x} in der (ursprünglichen) Referenzkonfiguration Ω zum Zeitpunkt t beschreibt.

3.1. Kinematik und der Verzerrungstensor

Wir betrachten zunächst nur die Verformung eines beliebigen Körpers, ohne auf die zugrundeliegenden Kräfte einzugehen, was als *Kinematik* bezeichnet wird.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet, das die Referenzkonfiguration des zu betrachtenden Körpers zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt. Dies ist üblicherweise der Ruhezustand des betrachteten Objekts oder der Zustand ohne äußere Krafteinwirkung. Im Folgenden verwenden wir zur Beschreibung **Lagrangesche Koordinaten**, was bedeutet, dass sich alle Größen auf die Referenzkonfiguration Ω beziehen und nicht auf den deformierten Zustand des Körpers; als Koordinaten dienen uns also Punkte $\mathbf{x} \in \Omega$. Den Ort, an dem sich dieser Massepunkt zum Zeitpunkt t befindet, drücken wir durch eine Abbildung $\phi(\mathbf{x}, t)$ aus. Klarerweise gilt $\phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$. Für fixes \mathbf{x} beschreibt

$$\{\phi(\mathbf{x}, t) : t \in (0, T)\}$$

die Raumkurve, die der Massepunkt \mathbf{x} im Zeitintervall $(0, T)$ durchläuft. Es wird immer sinnvoll sein, die Abbildung ϕ als stetig differenzierbar in allen Variablen vorauszusetzen. Weiters nehmen wir an, dass für beliebiges, aber fixes t die Abbildung $\mathbf{x} \rightarrow \phi(\mathbf{x}, t)$ invertierbar ist. Dies bedeutet, dass wir jedem Raumpunkt im deformierten Körper eindeutig einen Punkt in der Referenzkonfiguration zuordnen können. Oft wird es bequemer sein, statt mit dem absoluten Ort ϕ mit der relativen **Verschiebung**

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) := \phi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$$

zu arbeiten, die $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$ erfüllt.

Wir betrachten nun zwei Punkte $\mathbf{x} \in \Omega$ sowie $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} \in \Omega$ mit einem kleinen Vektor $\delta\mathbf{x}$. Nach Anwendung der Verschiebung \mathbf{u} befinden sie sich an den neuen

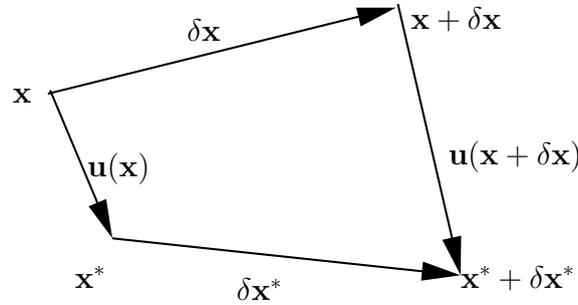


ABBILDUNG 1. Skizze zum Verzerrungstensor.

Orten

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})$$

befinden; siehe Abb. 1. (Wir betrachten hier einen fixen Zeitpunkt t und lassen das Argument t weg.) Wir untersuchen nun die durch die Verschiebung verursachte Veränderung des Abstandes $\delta \mathbf{x}$, nämlich

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{x}^*\|^2 - \|\delta \mathbf{x}\|^2 &= \|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - (\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))\|^2 - \|\delta \mathbf{x}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \delta \mathbf{x}\|^2 - \|\delta \mathbf{x}\|^2 \\ &\approx \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|^2 - \|\delta \mathbf{x}\|^2 \quad (\text{Taylor}) \\ &= ((I + \nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{x}, (I + \nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{x}) - \|\delta \mathbf{x}\|^2 \\ &= (\delta \mathbf{x}, (I + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{x}) - \|\delta \mathbf{x}\|^2 \\ &= (\delta \mathbf{x}, (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Die Änderung des Abstandes wird also durch $\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$ beschrieben. $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})$ bezeichnet man als **Greenschen Verzerrungstensor**. Wegen des quadratischen Terms $\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$ ist er nichtlinear.

Oftmals ist die Änderung der Verschiebung sehr viel kleiner als die entsprechende Änderung in \mathbf{x} , also

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})\| \ll \|\delta \mathbf{x}\|.$$

Da $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \nabla \mathbf{u} \delta \mathbf{x}$, folgt

$$\|\nabla \mathbf{u} \delta \mathbf{x}\| \ll \|\delta \mathbf{x}\| \quad \Rightarrow \quad \|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1.$$

In diesen Fällen ist es somit gerechtfertigt, den Term $\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$ im Greenschen Verzerrungstensor zu vernachlässigen. Dies führt auf den **linearisierten Verzerrungstensor**

$$\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}).$$

BEMERKUNG 3.1. $\vec{\varepsilon}(\mathbf{u})$ ist (anders als $\nabla \mathbf{u}$) symmetrisch und wird auch als **symmetrisierter Gradient** von \mathbf{u} bezeichnet.

Wir haben also hergeleitet, dass für kleine Verschiebungen in erster Näherung

$$\|\delta \mathbf{x}^*\|^2 - \|\delta \mathbf{x}\|^2 = (\delta \mathbf{x}, \vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) \delta \mathbf{x})$$

gilt. Wenn also $\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) \equiv 0$, dann ist (in erster Näherung) $\|\delta\mathbf{x}^*\| = \|\delta\mathbf{x}\|$; solche Verschiebungen \mathbf{u} lassen also Längen unverändert. Das nächste Resultat charakterisiert den Kern von $\vec{\varepsilon}(\cdot)$.

SATZ 3.2. Für ein Verschiebungsfeld $\mathbf{u} \in (C^2(\Omega))^3$ gilt

$$\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \in \text{RBM} := \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b} : \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\},$$

wobei RBM der Raum der linearisierten Starrkörperverschiebungen (engl.: rigid body modes) ist.

BEWEIS. “ \Rightarrow ”: Sei $\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) \equiv 0$. Dann gilt für $i, j, k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} u_j - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\varepsilon_{k,j}}_{=0} - \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\varepsilon_{j,i}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\varepsilon_{i,k}}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Da alle zweiten Ableitungen aller Komponenten von \mathbf{u} verschwinden, muss $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ affin linear sein, das heißt es existieren $\vec{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, sodass

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \vec{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Nun gilt aber $0 \equiv \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T = \vec{A} + \vec{A}^T$. Das heißt, \vec{A} ist eine schiefsymmetrische Matrix und hat somit die Form

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ folgt nun $\vec{A}\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ und somit die Behauptung.

“ \Leftarrow ”: Sei $\mathbf{u} \in \text{RBM}$. Mit derselben Matrix \vec{A} wie oben gilt $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \vec{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ und somit $\nabla\mathbf{u} = \vec{A}$. Da \vec{A} schiefsymmetrisch ist, folgt $\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) \equiv 0$. \square

Die geometrische Bedeutung des sechsdimensionalen Funktionenraums RBM lässt sich wie folgt erklären. Es gibt zwei Arten von Verschiebungen, die Längen unverändert lassen: Translationen mit einem konstanten Vektor und Rotationen.

Betrachten wir zunächst eine Translation des Körpers um einen Vektor \mathbf{b} , also $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ oder $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Dann sehen wir sofort, dass $\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) \equiv 0$. Dies erklärt die konstanten Funktionen in RBM.

Betrachten wir andererseits eine Rotation um die Achse \mathbf{a} mit Winkel θ , wobei $|\mathbf{a}| = 1$. Dies lässt sich beschreiben durch eine Rotationsmatrix $R_{\mathbf{a}}(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $R_{\mathbf{a}}(0) = I$. Es gilt dann $\phi(\mathbf{x}) = R_{\mathbf{a}}(\theta)\mathbf{x}$ oder $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (R_{\mathbf{a}}(\theta) - I)\mathbf{x}$. Da wir nur kleine Verschiebungen betrachten, linearisieren wir um $\theta = 0$ und erhalten nach einer simplen Berechnung ausgehend von der exakten Formel für $R_{\mathbf{a}}$ (diese ist in

Lehrbüchern oder auch z.B. auf Wikipedia¹ zu finden) die Identität

$$\frac{\partial R_{\mathbf{a}}}{\partial \theta}(0) = \vec{A}$$

mit der schiefsymmetrischen Matrix \vec{A} auf dem Beweis. Somit gilt nach dem Satz von Taylor für kleine Rotationswinkel θ , dass

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \theta \vec{A} \mathbf{x} = \theta \mathbf{a} \times \mathbf{x},$$

was die Kreuzprodukt-Komponente in RBM erklärt. In anderen Worten beschreibt also die Matrix \vec{A} eine *infinitesimale Rotation* um die Achse \mathbf{a} .

3.2. Der Spannungstensor

Bei der Herleitung des mathematischen Modells gehen wir vom (IES) und (DES) aus. Die Geschwindigkeit eines Massepunktes \mathbf{x} ist gegeben durch die Zeitableitung der Verschiebung \mathbf{u} , also

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t).$$

Sei $\omega \subset \Omega$ ein beliebiges Teilgebiet. Aus Kapitel 1 wissen wir, dass der (IES) bezüglich ω durch

$$\int_{\omega} \rho_m(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t_2) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t_1) \right) d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega} \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) dS(\mathbf{x}) dt$$

gegeben ist. Hierbei ist $\rho_m = \rho_m(\mathbf{x})$ die Massendichte der Referenzkonfiguration, die als konstant in der Zeit angenommen wird.

Wir zeigen nun zunächst, dass ein Tensor zweiter Stufe $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ (genannt **Spannungstensor**) existiert, sodass für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ die Oberflächenkraftdichte (Spannung) $\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ gegeben ist als

$$(3.1) \quad \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \vec{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n},$$

dass also die Spannung linear vom Normalenvektor der Oberfläche abhängt.

LEMMA 3.3 (Cauchy). *Sei*

$$\sigma_{i,j}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{e}_i^T \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j, t), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

wobei \mathbf{F}_s stetig differenzierbar in \mathbf{x} und stetig in t und \mathbf{n} ist. Ferner sei $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ stetig differenzierbar in t und \mathbf{F}_v stetig in t . Dann gilt (3.1) für alle t , \mathbf{x} , und \mathbf{n} .

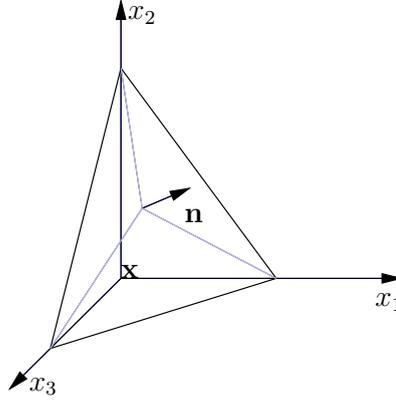
BEWEIS. Sei $\mathbf{x} \in \Omega$ und \mathbf{n} mit $\|\mathbf{n}\| = 1$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $n_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Wir betrachten nun den Tetraeder $\omega = \omega_\epsilon(\mathbf{x})$ mit Durchmesser $\epsilon > 0$ wie in Abbildung 2. Dabei bezeichnen A und A_i die zu \mathbf{n} bzw. \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ orthogonalen Flächen von $\partial\omega$.

Aus dem (IES) erhalten wir mit $\omega = \omega_\epsilon(\mathbf{x})$ nach Division durch $t_2 - t_1$ und $t_2 \rightarrow t_1$ mittels Lemma 1.1

$$(3.2) \quad \int_{\omega} \rho_m(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} = \int_{\omega} \mathbf{F}_v(\boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} + \int_{\partial\omega} \mathbf{F}_s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}), t) dS(\boldsymbol{\xi})$$

wobei wir aus Gründen der Notation t_1 durch t ersetzt haben.

¹<https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>

ABBILDUNG 2. Tetraeder $\omega_\epsilon(\mathbf{x})$ mit Durchmesser ϵ .

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt für geeignet gewählte Punkte $\boldsymbol{\xi} \in \omega$, $\boldsymbol{\xi}_0 \in A$, $\boldsymbol{\xi}_i \in A_i$, dass

$$|\omega| \left(\rho_m(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{F}_v(\boldsymbol{\xi}, t) \right) = \sum_{i=1}^3 |A_i| \mathbf{F}_s(\boldsymbol{\xi}_i, -\mathbf{e}_i, t) + |A| \mathbf{F}_s(\boldsymbol{\xi}_0, \mathbf{n}, t).$$

Es ist eine einfache Übung nachzuweisen, dass $|A_i| = n_i |A|$ gilt. Wir dividieren nun durch $|A|$ und lassen $\epsilon \rightarrow 0$. Da dann $\frac{|\omega|}{|A|} \rightarrow 0$, folgt insgesamt

$$\sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i, t) + \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = 0.$$

Da \mathbf{F}_s stetig in \mathbf{n} ist, folgt mit $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, dass

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i, t) = -\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i, t).$$

Somit erhalten wir

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i, t) n_i = \vec{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}$$

mit der Wahl

$$\vec{\sigma}(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, t), \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2, t), \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3, t)]. \quad \square$$

Einsetzen von (3.1) in (3.2) mit allgemeinem ω liefert

$$\int_{\omega} \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\omega} \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega} \vec{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} dS(\mathbf{x}).$$

Unter Verwendung des Satzes von Gauss und der Beliebigkeit von ω erhalten wir

$$(IES) \quad \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \vec{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t),$$

den **Impulserhaltungssatz in differenzieller Form in Lagrangeschen Koordinaten**. Die Matrix-Divergenz $\nabla \cdot \vec{\sigma}$ ist als zeilenweise Anwendung des Divergenzoperators zu verstehen und liefert somit einen Vektor.

Im Folgenden zeigen wir nun noch, dass der (DES) die Symmetrie des Spannungstensors impliziert.

LEMMA 3.4. Sei \mathbf{F}_s stetig differenzierbar in \mathbf{x} und stetig in t und \mathbf{n} . Ferner sei $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ stetig differenzierbar in t und \mathbf{F}_v stetig in t . Dann ist der Spannungstensor $\vec{\sigma}$ aus Lemma 3.3 symmetrisch, also $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^T$.

BEWEIS. Unter Verwendung von Lemma 3.3 hat der (DES) für ein beliebiges Gebiet $\omega \subset \Omega$ die Gestalt

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \rho_m(\mathbf{x}) \mathbf{x} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t_2) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t_1) \right) d\mathbf{x} \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\omega} \mathbf{x} \times \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega} \mathbf{x} \times (\vec{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}) dS(\mathbf{x}) \right] dt. \end{aligned}$$

Lemma 1.1 liefert nach Division durch $t_2 - t_1$ und $t_2 \rightarrow t_1$

$$\int_{\omega} \rho_m(\mathbf{x}) \mathbf{x} \times \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\omega} \mathbf{x} \times \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega} \mathbf{x} \times (\vec{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}) dS(\mathbf{x}),$$

wobei wir wieder zur besseren Notation t_1 durch t ersetzt haben. Aus Einsetzen des (IES) in die linke Seite folgt

$$\int_{\omega} \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \vec{\sigma}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\omega} \mathbf{x} \times (\vec{\sigma} \mathbf{n}) dS(\mathbf{x}).$$

Durch Bilden des inneren Produkts mit einem beliebigen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ und Verwendung der Identität $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ erhalten wir

$$(3.3) \quad \int_{\omega} (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \cdot (\nabla \cdot \vec{\sigma}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\omega} (\mathbf{a} \times \mathbf{x})^T \vec{\sigma} \mathbf{n} dS(\mathbf{x}).$$

Für die rechte Seite erhalten wir mit dem Satz von Gauss und der Produktregel (A.6)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega} (\mathbf{a} \times \mathbf{x})^T \vec{\sigma} \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) &= \int_{\omega} \nabla \cdot \left((\mathbf{a} \times \mathbf{x})^T \vec{\sigma} \right) d\mathbf{x} = \int_{\omega} \nabla \cdot \left(\vec{\sigma}^T (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\omega} \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) : \vec{\sigma} + (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \cdot (\nabla \cdot \vec{\sigma}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Wir verwenden hier das Frobenius-Produkt (doppelte Kontraktion), das für zwei beliebige Matrizen $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ durch $\vec{A} : \vec{B} = \sum_{i,j=1}^3 A_{i,j} B_{i,j}$ definiert ist. Dies wieder in (3.3) eingesetzt ergibt

$$\int_{\omega} \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) : \vec{\sigma} d\mathbf{x} = 0.$$

Weil $\omega \subset \Omega$ beliebig gewählt war, folgt mit Lemma 1.1 wieder die entsprechende punktweise Gleichung. Wie wir aus dem Beweis von Satz 3.2 wissen, gilt $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \vec{A} \mathbf{x}$ mit der schiefsymmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

womit folgt

$$a_1(\sigma_{3,2} - \sigma_{2,3}) + a_2(\sigma_{1,3} - \sigma_{3,1}) + a_3(\sigma_{2,1} - \sigma_{1,2}) = 0.$$

Da $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. \square

Zur Interpretation des Spannungstensors betrachten wir einen Würfel ω um einen Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$, der klein genug ist, dass $\vec{\sigma}$ dort als konstant gelten kann. Wir betrachten nun die “rechte” Seitenfläche des Würfels, also in positiver x_1 -Richtung. Dann ist die Spannung (Oberflächenkraftdichte) an dieser Oberfläche konstant gegeben durch $\vec{\sigma}\mathbf{e}_1$, also die erste Spalte des Spannungstensors. Dabei ist der Diagonaleintrag σ_{11} die **Normalspannung**, die orthogonal auf die Fläche wirkt, und die Einträge σ_{21}, σ_{31} die **Scherspannung**, die parallel zur Fläche wirkt.

Aufgrund der Symmetrie von $\vec{\sigma}$ ist der (IES) ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 9 Unbekannten. Im Folgenden werden wir verschiedene Klassen von Materialien kennenlernen. Die für diese Klassen geltenden Materialgesetze liefern jeweils eine Darstellung von $\vec{\sigma}$ in Abhängigkeit von \mathbf{u} . Wir betrachten die folgenden drei Klassen von Materialien

hyperelastisch \supset linear elastisch \supset isotrop linear elastisch,

wobei die Relation “ \supset ” jeweils eine Unterklasse angibt.

3.3. Hyperelastische Materialien

DEFINITION 3.5. Ein Material heißt **hyperelastisch**, wenn es eine Energiedichtefunktion

$$\rho_{E,V} = \rho_{E,V}(\mathbf{x}, \vec{A}) : \Omega \times \{\vec{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \vec{B} + \vec{I} \in M_+^3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

gibt, sodass die Verformungsenergie durch $\int_{\Omega} \rho_{E,V}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}$ gegeben ist, wobei $M_+^3 := \{\vec{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \det(\vec{B}) > 0\}$. (Beispiel: gummiartige Stoffe.)

BEMERKUNG 3.6. Aufgrund der Definition dürfen zwei hinreichend nahe Punkte der Referenzkonfiguration nicht auf denselben Punkt verschoben werden (**lokale** Invertierbarkeit von $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$ – garantiert durch $\det \nabla \phi = \det \nabla(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \det(\vec{I} + \nabla \mathbf{u}) \neq 0$). Außerdem kann es lokal keine Spiegelungen geben (garantiert durch $\det(\nabla(\mathbf{x} + \mathbf{u})) > 0$).

Wir betrachten nun, was diese Definition für den Spannungstensor bedeutet und nehmen dafür Energiebetrachtungen vor. Die gesamte in einem elastischen Körper gespeicherte Energie setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie (Masse mal Geschwindigkeit hoch 2), deren Dichte gegeben ist durch

$$\rho_{E,K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \rho_m(\mathbf{x}) |\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2,$$

sowie der durch Verformung im Körper gespeicherten **elastischen Energie**, die wir zunächst einfach mit $e(\mathbf{x}, t)$ bezeichnen.

Eine Änderung der Energie ergibt sich einerseits durch die durch Volumenkräfte geleistete Arbeit. Arbeit ist definiert als das Produkt aus Weg und Kraft entlang des Weges. Wenn der Massepunkt \mathbf{x} die Raumkurve γ durchläuft, ist die Arbeit demnach

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt,$$

wobei $\mathbf{x}(t) : (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Kurve γ ist. In unserem Fall ist die Parametrisierung der Kurve gegeben durch $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, und die Kraft \mathbf{F} ist in

Lagrange-Koordinaten gegeben durch $\mathbf{F}_v(\mathbf{x})$. Wir erhalten also

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_v(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt.$$

Analog ist die Arbeit, die an einem $\mathbf{x} \in \partial\omega$ am Rand durch Spannungskräfte geleistet wird,

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\sigma} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt.$$

Insgesamt ergibt sich (nach der schon oft verwendeten Division durch $t_2 - t_1$ und $t_2 \rightarrow t_1$) die Energieerhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} \left(\frac{1}{2} \rho_m |\partial_t \mathbf{u}|^2 + e \right) d\mathbf{x} = \int_{\omega} \mathbf{F}_v \cdot \partial_t \mathbf{u} d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega} \vec{\sigma} \mathbf{n} \cdot \partial_t \mathbf{u} dS(\mathbf{x}).$$

Da $\vec{\sigma} \mathbf{n} \cdot \partial_t \mathbf{u} = \vec{\sigma}^T \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ und $\vec{\sigma}$ symmetrisch ist, folgt mit dem Satz von Gauß und der Beliebigkeit von ω die Relation

$$\rho_m \partial_t \mathbf{u} \cdot \partial_t^2 \mathbf{u} + \partial_t e - \mathbf{F}_v \cdot \partial_t \mathbf{u} - \nabla \cdot (\vec{\sigma} \partial_t \mathbf{u}) = 0.$$

Mit der Produktregel für die Divergenz (A.6) sowie der Symmetrie von $\vec{\sigma}$ erhalten wir weiters

$$\rho_m \partial_t \mathbf{u} \cdot \partial_t^2 \mathbf{u} + \partial_t e - \mathbf{F}_v \cdot \partial_t \mathbf{u} - (\nabla \cdot \vec{\sigma}) \cdot \partial_t \mathbf{u} - \vec{\sigma} : \partial_t \nabla \mathbf{u} = 0.$$

Nach Einsetzen des differenziellen (IES) für \mathbf{F}_v erhalten wir

$$\partial_t e = \vec{\sigma} : \partial_t \nabla \mathbf{u}.$$

Diese Relation gilt für allgemeine Verschiebungen \mathbf{u} sowie eine allgemeine elastische Energie e . Wenn wir konkret für e die Energiedichte $\rho_{E,V}$ für ein hyperelastisches Material einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial t}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \vec{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t).$$

Mit der Kettenregel folgt

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial A_{i,j}}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{i,j}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t).$$

Da \mathbf{u} eine beliebige Verschiebung ist, gilt (betrachte die Fälle $\mathbf{u} = tx_j \mathbf{e}_i$ für $i, j = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial A_{i,j}}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}) = \sigma_{i,j}(\mathbf{x}, t) \quad \text{für alle } i, j = 1, 2, 3.$$

Wir haben somit die folgende Proposition bewiesen.

PROPOSITION 3.7. *In hyperelastischen Materialien folgt aus dem (EES) (unter Berücksichtigung der Verformungs- und kinetischen Energie, aber unter Vernachlässigung von z.B. thermischer Energie), dass das folgende Materialgesetz gilt:*

$$\sigma_{i,j} = \frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial A_{i,j}}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}).$$

Obige Relation erlaubt uns, den Spannungstensor in Abhängigkeit von \mathbf{u} darzustellen (da $\rho_{E,V}$ als bekannt vorausgesetzt wird) und somit die Anzahl der Unbekannten im differenziellen (IES) auf drei zu reduzieren.

Hyperelastische Materialien sind in gewissem Sinn die allgemeinsten elastischen Materialien und können im Allgemeinen nichtlinear sein. Im folgenden betrachten wir Spezialfälle, die linear und somit leichter handhabbar sind.

3.4. Linear elastisches Material

Linear elastische Materialien sind ein besonders wichtiger Spezialfall von hyperelastischen Materialien, bei denen der Spannungstensor linear von den partiellen Ableitungen von \mathbf{u} abhängt. Genauer wird er nur vom symmetrisierten Gradienten $\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$ abhängen.

DEFINITION 3.8. Ein Material heißt **linear elastisch**, wenn die Energiedichtefunktion $\rho_{E,V}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u})$ gegeben ist als

$$\rho_{E,V}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^3 D_{ijkl} \vec{\varepsilon}(\mathbf{u})_{ij} \vec{\varepsilon}(\mathbf{u})_{kl},$$

wobei $\mathcal{D} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$ mit $\mathcal{D}(\mathbf{x}) = [D_{ijkl}(\mathbf{x})]_{i,j,k,l=1}^3$ ein Tensor vierter Stufe ist, genannt **Elastizitätstensor**, der für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ die Symmetrien

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{klij} (= D_{ijlk}) \quad \forall i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$$

erfüllt. Außerdem ist \mathcal{D} auf der Menge der symmetrischen Matrizen koerziv, das heißt es existiert ein $\alpha > 0$, sodass für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \setminus \{0\}$ gilt

$$\mathcal{D}A : A := \sum_{i,j,k,l=1}^3 D_{ijkl} A_{ij} A_{kl} \geq \alpha \|A\|^2.$$

Man beobachte, dass ein Tensor der Form von \mathcal{D} als lineare Abbildung von 3×3 -Matrizen auf 3×3 -Matrizen interpretiert werden kann, da wir für eine allgemeine Matrix A die neue Matrix

$$B := \mathcal{D}A \quad \text{mit} \quad B_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 D_{ijkl} A_{kl}$$

definieren können. Wegen der Symmetrien von \mathcal{D} gilt weiters für allgemeine Matrizen A, B , dass

$$\mathcal{D}A^T = \mathcal{D}A \quad \text{und} \quad \mathcal{D}A : B = \mathcal{D}B : A.$$

Mit obigen Notationen können wir also schreiben

$$\rho_{E,V}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathcal{D} \vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \vec{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

und da $\vec{\varepsilon}(\mathbf{u})$ symmetrisch ist, folgt mit der Koerzivität von \mathcal{D} , dass $\rho_{E,V}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}) \geq 0$. Per Definition und wegen der Symmetrien gilt für beliebiges $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, dass

$$\begin{aligned} \rho_{E,V}(\mathbf{x}, A) &= \frac{1}{8} \mathcal{D}(A + A^T) : (A + A^T) \\ &= \frac{1}{8} (\mathcal{D}A : A + \mathcal{D}A : A^T + \mathcal{D}A^T : A + \mathcal{D}A^T : A^T) = \frac{1}{2} \mathcal{D}A : A. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Ableitungen nach den Komponenten von A

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial A_{m,n}}(\mathbf{x}, A) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^3 D_{ijkl} (\delta_{im} \delta_{jn} A_{kl} + A_{ij} \delta_{km} \delta_{ln}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k,l=1}^3 D_{mnkl} A_{kl} + \sum_{i,j=1}^3 D_{ijmn} A_{ij} \right) = [\mathcal{D}A]_{mn} = \left[\frac{1}{2} \mathcal{D}(A + A^T) \right]_{mn}. \end{aligned}$$

Somit folgt aus Proposition 3.7, dass die (m, n) -te Komponente des Spannungstensors gegeben ist durch

$$\sigma_{m,n} = \frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial A_{m,n}}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}) = [\mathcal{D}\vec{\varepsilon}(u)]_{mn},$$

oder kurz

$$(3.4) \quad \vec{\sigma} = \mathcal{D}\vec{\varepsilon}.$$

Gleichung (3.4) bezeichnet man als das **Hookesche Gesetz**.

BEMERKUNG 3.9. Wir haben gewisse Symmetrierelationen für \mathcal{D} gefordert, tatsächlich sind diese jedoch keine Einschränkung. Der Grund dafür ist, dass sowohl $\vec{\varepsilon}$ als auch $\vec{\sigma}$ symmetrisch sind. Für einen beliebigen (nichtsynchronen) Tensor \mathcal{D}' lässt sich somit immer ein anderer Tensor \mathcal{D} finden, sodass

$$\mathcal{D}'\vec{\varepsilon}: \vec{\varepsilon} = \mathcal{D}\vec{\varepsilon}: \vec{\varepsilon} \quad \text{für alle symmetrischen } \vec{\varepsilon}$$

und dass \mathcal{D} die obigen Symmetrierelationen erfüllt.

Wir zählen nun noch die Freiheitsgrade. Da wegen Symmetrie $\vec{\varepsilon}$ und $\vec{\sigma}$ nur je 6 Freiheitsgrade besitzen, können wir \mathcal{D} als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ auffassen. Wegen Symmetrie von \mathcal{D} selbst ist aber nur das obere Dreieck dieser 6×6 -Matrix frei wählbar, und somit hat \mathcal{D} 21 unabhängige Einträge.

3.5. Isotropes linear elastisches Material

Wir betrachten nun **isotrope linear elastische Materialien**. Für diesen Spezialfall lässt sich der Elastizitätstensor drastisch vereinfachen.

DEFINITION 3.10. Ein Material heißt **isotrop in $\mathbf{x} \in \Omega$** , falls die Eigenschaften des Materials im Punkt \mathbf{x} nicht von der Richtung abhängen. Ein Material heißt **isotrop**, falls es in jedem Punkt isotrop ist – andernfalls heißt es **anisotrop**.

Beispiele für anisotrope Materialien sind etwa Holz, das entlang seiner Fasern andere Eigenschaften aufweist als quer dazu, oder künstliche Werkstoffe, die aus verschiedenen Materialschichten aufgebaut sind.

Wir formalisieren nun das Konzept der Isotropie mathematisch. Dazu betrachten wir eine Rotation des Koordinatensystems

$$\hat{\mathbf{x}} = Q\mathbf{x}, \quad Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad Q^T Q = I, \quad \det Q > 0.$$

Dementsprechend müssen sich auch die Verschiebung \mathbf{u} und der Normalenvektor \mathbf{n} rotieren, also $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}) = Q\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\hat{\mathbf{n}} = Q\mathbf{n}$. Sei $\hat{\nabla} = \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}$ der Gradientenoperator bezüglich der neuen Koordinaten $\hat{\mathbf{x}}$; wegen $\mathbf{x} = Q^T \hat{\mathbf{x}}$ gilt $\hat{\nabla} \mathbf{x} = Q^T$. Aus der Kettenregel folgt

$$\hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\nabla} Q\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla Q\mathbf{u}(\mathbf{x}) \hat{\nabla} \mathbf{x} = Q \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) Q^T$$

und somit auch $\hat{\vec{\varepsilon}} = Q\vec{\varepsilon}Q^T$. In beiden Koordinatensystemen gilt für den Spannungstensor gemäß Lemma 3.3

$$\mathbf{F}_s = \vec{\sigma}\mathbf{n}, \quad \hat{\mathbf{F}}_s = \hat{\vec{\sigma}}\hat{\mathbf{n}},$$

und somit, weil wegen Rotation $\hat{\mathbf{F}}_s = Q\mathbf{F}_s$,

$$Q^T\hat{\vec{\sigma}}\hat{\mathbf{n}} = Q^T\hat{\mathbf{F}}_s = \mathbf{F}_s = \vec{\sigma}\mathbf{n} = \vec{\sigma}Q^T\hat{\mathbf{n}}.$$

Da $\hat{\mathbf{n}}$ beliebig ist, folgt

$$\hat{\vec{\sigma}} = Q\vec{\sigma}Q^T.$$

Isotropie besagt nun, dass unabhängig von der Rotation des Koordinatensystems gilt

$$\vec{\sigma} = \mathcal{D}\vec{\varepsilon}, \quad \hat{\vec{\sigma}} = \mathcal{D}\hat{\vec{\varepsilon}}$$

oder

$$Q(\mathcal{D}\vec{\varepsilon})Q^T = \mathcal{D}(Q\vec{\varepsilon}Q^T).$$

Der folgende Satz charakterisiert Abbildungen, die diese Eigenschaft erfüllen.

SATZ 3.11 (Rivlin-Ericksen; siehe [EGK11, Satz 5.13]). *Eine Abbildung*

$$\sigma : \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = A^T, \det A > 0\} \rightarrow \{B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : B = B^T\}$$

besitzt genau dann die Eigenschaft

$$\sigma(QAQ^T) = Q\sigma(A)Q^T \quad \text{für alle Drehungen } Q,$$

falls die Darstellung

$$\sigma(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2$$

gilt, wobei die Koeffizientenfunktionen a_0, a_1, a_2 nur von den Grundinvarianten $i_0(A), i_1(A), i_2(A)$ von A abhängen.

Die **Grundinvarianten** von A sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\det(A - \nu I)$ von A . Im Fall von 3×3 -Matrizen sind die Grundinvarianten explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} i_1(A) &= \text{spur}(A), \\ i_2(A) &= \frac{1}{2}(\text{spur}(A)^2 - \text{spur}(A^2)), \\ i_3(A) &= \det(A). \end{aligned}$$

Wir beweisen den Satz von Rivlin-Ericksen hier nicht, überlegen aber kurz, warum die (einfachere) Richtung „ \Leftarrow “ gilt. Sei A wie oben und $B = QAQ^T$ mit einer Drehung Q . Da $Q^T = Q^{-1}$, sind A und B ähnliche Matrizen und haben somit (siehe Lineare Algebra) identische charakteristische Polynome und somit auch identische Grundinvarianten, $i_k(A) = i_k(B)$, $k = 0, 1, 2$. Daraus folgt $a_k(A) = a_k(B)$, $k = 0, 1, 2$. Somit ist

$$\sigma(B) = a_0I + a_1B + a_2B^2 = a_0I + a_1QAQ^T + a_2QA^2Q^T = Q\sigma(A)Q^T.$$

Im konkreten Fall der Abbildung \mathcal{D} erhalten wir also

$$\mathcal{D}\vec{\varepsilon} = a_0\vec{I} + a_1\vec{\varepsilon} + a_2\vec{\varepsilon}^2.$$

Da die Abbildung $\vec{\varepsilon} \mapsto \mathcal{D}\vec{\varepsilon}$ außerdem linear ist, muss gelten, dass $a_2 \equiv 0$, $a_1 \equiv \text{konst.} =: 2\mu$ und $a_0 \equiv a_0(i_1(\vec{\varepsilon})) \equiv \lambda \text{spur}(\vec{\varepsilon})$. Man nennt die Materialkonstanten μ und λ ($[\mu] = [\lambda] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$) **Lamé-Parameter**. Mit ihnen gilt nun also die Darstellung

$$(3.5) \quad \vec{\sigma} = \mathcal{D}\vec{\varepsilon} = \lambda \text{spur}(\vec{\varepsilon})\vec{I} + 2\mu\vec{\varepsilon} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\vec{I} + 2\mu\vec{\varepsilon}.$$

Allgemein ist $\mu > 0$ und meist $\lambda \geq 0$. Man beachte, dass sie so gewählt sein müssen, dass die Koerzivität von \mathcal{D} gilt.

Anstelle der Lamé-Parameter μ und λ werden in der Literatur häufig die Größen E (**Youngscher Elastizitätsmodul**) und ν (**Poissonsche Querkontraktionszahl**) verwendet. Diese sind definiert als

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

und besitzen die Einheiten $[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ und $[\nu] = 1$. Der Youngsche Elastizitätsmodul und die Poissonsche Querkontraktionszahl erhalten ihre Bedeutung aus folgender Beziehung: Bezogen auf einen Zylinder gibt der Youngsche Elastizitätsmodul die Spannung an, die man an den Stirnflächen anbringen muss, um den Zylinder auf die doppelte Länge zu strecken. Die Poissonsche Querkontraktionszahl ist das negative Verhältnis von relativer Radiusänderung zu relativer Längenänderung (in Abschnitt 3.7 werden wir hierzu ein Beispiel betrachten). Diese beiden Parameter lassen sich somit direkt experimentell ermitteln. Sie lassen sich auch wieder in die Lamé-Parameter umrechnen mittels der Relationen

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Im Allgemeinen können die gerade hergeleiteten Materialparameter (so wie auch allgemeiner \mathcal{D}) abhängig vom Ort \mathbf{x} sein. Sie sind konstant, falls das Material *homogen* ist.

DEFINITION 3.12. Ein Material heißt **homogen**, falls es in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ dieselben Eigenschaften hat – andernfalls heißt es **inhomogen**.

3.6. Variationsformulierung und Anfangs- und Randbedingungen

Einsetzen des Hookeschen Gesetzes (3.4) in (IES) liefert

$$(3.6) \quad \rho_m(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \left(\mathcal{D}(\mathbf{x})\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \right) = \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t).$$

Dies ist nun ein System mit drei Gleichungen und ebensovielen Unbekannten, \mathbf{u} . Für den isotropen Fall vereinfacht sich (3.6) zu

$$(3.7) \quad \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\vec{I} + 2\mu\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right) = \mathbf{F}_v.$$

Bei der Suche nach geeigneten Randbedingungen konzentrieren wir uns auf den stationären (d.h. keine Abhängigkeit von t) isotropen Fall. Für den anisotropen stationären Fall gelten analoge Überlegungen. Ähnlich zu der Herangehensweise bei der Wärmeleitungsgleichung multiplizieren wir (3.7) mit einer hinreichend glatten, nun aber vektorwertigen Testfunktion \mathbf{v} . Integration über das Gebiet Ω liefert dann

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \vec{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^T \vec{\sigma} \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}),$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben; genauer gesagt folgt dieser Schritt aus dem Satz von Gauss und der Produktregel (A.6). Das Randintegral fällt weg, wenn für fast alle $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ gilt

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\lambda(\mathbf{x})\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\vec{I} + 2\mu(\mathbf{x})\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \right) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \vec{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0.$$

Analog zur Wärmeleitungsgleichung ist ersteres die (homogene) **Dirichletrandbedingung** und letzteres die (homogene) **Neumannrandbedingung**. Dirichletrandbedingungen geben eine bestimmte Verschiebung auf einem Teil des Randes ($\Gamma_D \subset \partial\Omega$) vor; man wendet sie dort an, wo der Rand fest eingespannt ist. Neumannrandbedingungen geben die an einem Teil des Randes ($\Gamma_N \subset \partial\Omega$) wirkende Oberflächenspannung (Oberflächenkraftdichte) $\mathbf{F}_s = \vec{\sigma}\mathbf{n}$ an; man wendet sie also dort an, wo eine bekannte Oberflächenkraft auf den Körper angewendet wird. Wie bei der Wärmeleitungsgleichung nehmen wir an, dass $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ und $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ gelten. Genau wie dort kann man inhomogene Randbedingungen per Homogenisierung auf homogene zurückführen.

Für den Fall, dass das Randintegral verschwindet, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \left(\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\vec{I} + 2\mu\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu\vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \vec{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} =: a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

da allgemein für $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $A = A^T$ gilt:

$$\vec{A} : \vec{B} = \sum_{i,j=1}^3 A_{i,j} B_{i,j} = \sum_{i,j=1}^3 A_{i,j} B_{j,i} = A : B^T.$$

Wir wollen nun kurz erläutern, warum die oben genannten Randwerte sinnvoll sind, also die **Existenz** und **Eindeutigkeit** einer Lösung garantieren. Offensichtlich ist die Bilinearform

$$a(\cdot, \cdot) : (H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^3 \times (H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

symmetrisch und beschränkt (falls μ und λ beschränkt sind). Um den Satz von Lax-Milgram anzuwenden, benötigen wir außerdem die Koerzivität von $a(\cdot, \cdot)$. Diese folgt aus der **Kornschen Ungleichung** (siehe z.B. [BS08, Kapitel 11]): Falls $|\Gamma_D| > 0$, dann existiert ein $\alpha > 0$, sodass für alle $\mathbf{v} \in (H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^3$ gilt

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 2\mu \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \underbrace{\geq}_{\text{Kornsche Ungl.}} 2\mu\alpha \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Falls $|\Gamma_D| = 0$, ist $a(\cdot, \cdot)$ nur noch auf $(H_{\Gamma_D}^1(\Omega)/\text{RBM})^3 = (H^1(\Omega)/\text{RBM})^3$ koerziv. (Wir erinnern uns, dass RBM gerade der Kern von $\vec{\varepsilon}$ ist.) Im Fall von reinen Neumannrandbedingung kann eine Lösung also nur bis auf Starrkörperverschiebungen eindeutig bestimmt werden.

Im instationären Fall benötigt man neben den Randwerten die Anfangswertbedingungen $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ und $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x})$.

3.7. Beispiel: lineare Elastostatik

Im homogenen Fall sind λ und μ konstant. Wenn wir auch den stationären Fall annehmen, vereinfacht sich (3.7) zu

$$(3.8) \quad -(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\Delta\mathbf{u} = \mathbf{F}_v,$$

wobei wir die Rechenregeln $\nabla \cdot (\nabla\mathbf{u}) = \Delta\mathbf{u}$ sowie $\nabla \cdot (\nabla\mathbf{u}^T) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ verwendet haben. In den Parametern E und ν ausgedrückt lautet die Gleichung

$$-\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)}\Delta\mathbf{u} = \mathbf{F}_v.$$

Wir betrachten einen Zylinder

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < L, x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\}$$

ohne Volumenkräfte, $\mathbf{F}_v \equiv 0$ (ignorieren also insbesondere die Schwerkraft), und mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(\mathbf{u})(-\mathbf{e}_1) &= -\mathbf{e}_1 \quad \text{für } x_1 = 0, & \vec{\sigma}(\mathbf{u})(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 \quad \text{für } x_1 = L, \\ \vec{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} &= 0 \quad \text{für } \sqrt{x_2^2 + x_3^2} = R. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Zylinder an der linken und rechten Seite mit einer Einheitskraft gezogen wird, während am Mantel keine Kraft wirkt. Wir verwenden als Ansatz für die Verschiebung die lineare Streckung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_1 x_1 \\ a_2 x_2 \\ a_2 x_3 \end{pmatrix}$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten a_1, a_2 . Wir sehen leicht, dass $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \equiv 0$ und $\Delta\mathbf{u} \equiv 0$ und somit die Differentialgleichung (3.8) erfüllt ist.

Der Spannungstensor ist gegeben durch (vgl. (3.5))

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\nabla \cdot \mathbf{u})\vec{I} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 & & \\ & a_1 + 2a_2 & \\ & & a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

und ist insbesondere konstant im Ort. Aus $\vec{\sigma}(\mathbf{u})(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ erhalten wir die Gleichung

$$a_1 + \frac{\nu}{1-2\nu}(a_1 + 2a_2) = \frac{1+\nu}{E},$$

und aus $\vec{\sigma}(\mathbf{u})(\mathbf{e}_2) = \vec{\sigma}(\mathbf{u})(\mathbf{e}_3) = 0$ erhalten wir

$$a_2 + \frac{\nu}{1-2\nu}(a_1 + 2a_2) = 0.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist gegeben durch

$$a_1 = \frac{1}{E}, \quad a_2 = -\frac{\nu}{E},$$

und somit ist das gesuchte Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass sich der Zylinder um das $\frac{1}{E}$ -fache seiner ursprünglichen Länge verlängert und gleichzeitig sich sein Radius um das $\frac{\nu}{E}$ -fache verringert. Somit ist der Elastizitätsmodul E die Kraft, mit der man an den Seiten des Zylinders ziehen muss, um ihn auf die doppelte Länge zu strecken, und die Querkontraktionszahl ν gibt an, um welchen Anteil sich der Radius dabei reduziert.

3.8. Ebener Spannungs- und ebener Verzerrungszustand

In gewissen Situationen lässt sich die Dimension der Gleichungen der linearen Elastizität reduzieren; konkret betrachten wir hier zweidimensionale Modelle für Elastizität. Wir gehen hier immer von einem homogenen, isotropen, linear elastischen Material aus.

Beim **ebenen Verzerrungszustand** (engl. *plane strain*) ist der Verzerrungstensor unabhängig von x_3 und liegt nur in der (x_1, x_2) -Ebene, also

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{21}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Verschiebung \mathbf{u} nicht von x_3 abhängt und dass u_3 konstant (null) ist. Dieser Zustand ist annäherungsweise in langen zylindrischen Objekten (weit weg von den Enden) erfüllt, die in x_3 -Richtung viel länger als in x_1 - und x_2 -Richtung sind und bei denen die Krafteinwirkung nur in der (x_1, x_2) -Ebene liegt.

Die Komponenten des Spannungstensors (3.5) für ein homogenes isotropes Material haben dann die Form

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \\ \sigma_{i3} &= \sigma_{3i} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \end{aligned}$$

Da \mathbf{u} und somit ε unabhängig von x_3 ist, folgt $\partial_{x_3}\sigma_{33} = 0$ und somit

$$(\nabla \cdot \vec{\sigma})_i = \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \sigma_{ij} = (\lambda + \mu) \partial_{x_i} (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2) + \mu \Delta u_i$$

für $i = 1, 2$. Die Gleichungen der linearen Elastizität lassen sich somit mit $\mathbf{u}^{(2)}(x_1, x_2) := (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))^T$ und dem entsprechenden Volumenkraftvektor schreiben als

$$-(\lambda + \nu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) - \mu \Delta \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{F}_v^{(2)},$$

was genau die formale zweidimensionale Entsprechung zu (3.8) mit denselben Lamé-Parametern ist.

Beim **ebenen Spannungszustand** (engl. *plane stress*) nimmt man an, dass der Spannungstensor $\vec{\vec{\sigma}}$ von x_3 unabhängig ist und dass $\sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 0$ für $i = 1, 2, 3$, also

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Annahme ist näherungsweise korrekt für dünne Platten, die in der (x_1, x_2) -Ebene liegen und bei denen keine Spannung in Normalenrichtung vorliegt. Aus (3.5) folgt dann

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu} \text{spur}(\vec{\vec{\varepsilon}})$$

und damit weiter

$$(3.9) \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).$$

Somit ist

$$\sigma_{ij} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2.$$

Dies entspricht der zweidimensionalen Form des Hookeschen Gesetzes (3.5), allerdings nun mit dem modifizierten Lamé-Parameter

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Einsetzen in den (IES) liefert die zweidimensionale Gleichung

$$\rho_m \partial_t^2 \mathbf{u}^{(2)} - \frac{2\mu^2 + 3\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) - \mu \Delta \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{F}_v^{(2)},$$

die für $\mathbf{u}^{(2)}$ gelöst werden kann. Aus (3.9) erhält man für die dritte Komponente

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right).$$

Insbesondere ist also die Verschiebung in x_3 -Richtung in diesem Modell, anders als im ebenen Verzerrungszustand, im Allgemeinen nicht null! Kompliziertere zweidimensionale Plattenmodelle erlauben auch Belastungen in Normalenrichtung.

KAPITEL 4

Strömungsdynamik

Wir beschäftigen uns nun mit Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen. Genauer gesagt möchten wir ein mathematisches Modell herleiten, mit dem wir die folgenden Größen bestimmen können:

- das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ (Einheit: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$),
- das Druckfeld $p(\mathbf{x}, t)$ (Einheit: Pa),
- das Massendichtefeld $\rho_m(\mathbf{x}, t)$ (Einheit: $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$).

Wir haben es also mit fünf unbekanntem Größen zu tun. In allgemeineren thermodynamischen Formulierungen, die wir hier nicht betrachten, wird auch die Abhängigkeit vom Temperaturfeld $T(\mathbf{x}, t)$ modelliert, was dann eine weitere Unbekannte ist.

Im Gegensatz zum vorherigen Kapitel verwenden wir hier nicht Lagrange-, sondern **Eulersche Koordinaten** zur Beschreibung.

4.1. Eulersche Koordinaten

ERINNERUNG. Bei der Beschreibung in **Lagrangeschen Koordinaten** betrachtet man alle Größen in Bezug auf die Referenzkonfiguration $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$. Ist also $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$ der Ortspunkt eines Partikels in der Referenzkonfiguration, so ist beispielsweise $\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}, t)$ die Geschwindigkeit, die dieser Partikel zur Zeit t hat – unabhängig davon, wo sich der Partikel zum Zeitpunkt t im deformierten Gebiet Ω_t gerade befindet.

Bei der Beschreibung in **Eulerkoordinaten** betrachtet man alle Größen in Bezug auf die momentane Konfiguration $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d$. So gibt $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ also beispielsweise die Geschwindigkeit zur Zeit t jenes Partikels an, der sich zur Zeit t im Ort $\mathbf{x} \in \Omega_t$ befindet.

Sei $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$ ein Punkt in der Referenzkonfiguration. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbf{x} : \Omega_0 \times (0, \tilde{t}) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (\boldsymbol{\xi}, t) \mapsto \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t),$$

die $\boldsymbol{\xi}$ in den entsprechenden Punkt $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) \in \Omega_t$ in der momentanen Konfiguration überführt. Somit ist $\Omega_t = \{\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) : \boldsymbol{\xi} \in \Omega_0\}$. Die Abbildung \mathbf{x} habe dabei die folgenden Eigenschaften:

$$(4.1a) \quad \mathbf{x}(\cdot, 0) \equiv \text{id}_{\Omega_0 \rightarrow \Omega_0},$$

$$(4.1b) \quad \mathbf{x} \in C^1(\Omega_0 \times (0, \tilde{t}), \mathbb{R}^d),$$

$$(4.1c) \quad \mathbf{x}(\cdot, t) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \quad \text{ist bijektiv für alle } t \in (0, \tilde{t}),$$

$$(4.1d) \quad \det(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)) > 0 \quad \text{für alle } t \in (0, \tilde{t}) \text{ und } \boldsymbol{\xi} \in \Omega_0.$$

Die Eigenschaft (4.1c) besagt, dass für jeden fixen Zeitpunkt t eine Bijektion $\boldsymbol{\xi} \leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ zwischen den Lagrange- und den Eulerkoordinaten, und somit zwischen Ω_0 und Ω_t besteht. Für variables t beschreibt $t \mapsto \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ die Bahnkurve, die der

Punkt $\boldsymbol{\xi}$ der Referenzkonfiguration durchläuft. Die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung im Punkt $\mathbf{x} \in \Omega_t$ zur Zeit t ist dann durch die erste bzw. zweite totale Ableitung dieser Bahnkurve nach t gegeben, also

$$(4.2a) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\boldsymbol{\xi}, t),$$

$$(4.2b) \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{v} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Hier und im Rest des Kapitels bezieht sich der Gradientenoperator, wenn nicht anders angegeben, immer auf die Eulerkoordinaten, $\nabla = \nabla_{\mathbf{x}}$.

BEMERKUNG 4.1. Die Abbildung \mathbf{x} spielt dieselbe Rolle wie ϕ im Kapitel 3 zur Elastizität. Wir wählen hier eine andere Notation, um die Entsprechung zwischen den beiden Koordinatensystemen $\boldsymbol{\xi} \leftrightarrow \mathbf{x}$ hervorzuheben.

Wir betrachten nun eine beliebige physikalische Größe φ gegeben in Eulerkoordinaten, also $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Für $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$ betrachten wir die Bahnkurve $t \mapsto \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$, die dieser Partikel durchläuft, und bezeichnen mit

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}, t) := \varphi(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t)$$

den Wert der Größe φ entlang dieser Kurve zum Zeitpunkt t . Anders gesagt ist Φ die Darstellung in Lagrange-Koordinaten der Größe φ . Für die Zeitableitung von Φ folgt mit der Kettenregel

$$\frac{d\Phi}{dt}(\boldsymbol{\xi}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(\boldsymbol{\xi}, t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t)$$

wegen (4.2a). Wir definieren nun die rechte Seite als neuen Differentialoperator, die sogenannte **materielle Ableitung**, nämlich

$$D_t \varphi(\mathbf{x}, t) := \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t)$$

oder kurz $D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$. Sie beschreibt also, wie sich eine Größe φ (gegeben in Eulerkoordinaten) entlang der Bahnkurve eines Partikels verändert, der durch das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} transportiert wird. Für Größen, die in Lagrangekoordinaten gegeben sind, ist die materielle Ableitung somit identisch zur reinen Zeitableitung. Da aber φ in Eulerkoordinaten gegeben ist, beschreibt $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$ die zeitliche Änderung der Größe φ am fixen Punkt \mathbf{x} .

Für Vektorfelder ist die materielle Ableitung als komponentenweise Anwendung von D_t definiert. Da die beiden Ausdrücke

$$(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = \left[\sum_{j=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right]_{i=1}^3 \quad \text{und} \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \left[\sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right]_{i=1}^3$$

identisch sind, können wir (4.2b) schreiben als $\mathbf{a} = D_t \mathbf{v}$.

4.2. Das Reynoldssche Transporttheorem

Bei Integralen von stetig differenzierbaren Funktionen über die Referenzkonfiguration ist die Zeitableitung des Integrals gleich des Integrals der Zeitableitung. Da wir nun **zeitlich veränderliche Gebiete** betrachten, gilt diese Kommutativität im Allgemeinen nicht mehr. Wir betrachten hierzu den folgenden Satz.

SATZ 4.2 (Reynoldssches Transporttheorem). Die Abbildung $\mathbf{x} : \Omega_0 \times (0, \tilde{t}) \rightarrow \mathbb{R}^d$ erfülle (4.1). Außerdem sei $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\boldsymbol{\xi}, t)$ stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $\varphi \in C^1(\Omega_t \times (0, \tilde{t}))$, dass

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \right] d\mathbf{x}.$$

BEWEIS. Wir geben den Beweis nur in einer Raumdimension, also $d = 1$. Für den allgemeinen Fall siehe [EGK11, Satz 5.4]. Mittels (4.2a) und der Koordinatentransformation $\xi \mapsto x(\xi, t)$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \varphi(x(\xi, t), t) \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \varphi(x, t) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{dx}{dt} \right] d\xi \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} v + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \varphi \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] d\xi \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi v) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] dx. \quad \square \end{aligned}$$

Man beachte, dass sich wegen der Produktregel (A.4) der Integrand auf der rechten Seite auch schreiben lässt als

$$\frac{d\varphi}{dt} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{v} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} = D_t \varphi + \varphi \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

4.3. Erhaltungssätze in Eulerkoordinaten

Wie üblich gehen wir bei der Herleitung unseres Modells von Erhaltungssätzen aus. Im Folgenden leiten wir die differenzielle Form des (MES), (IES) und (EES) in Eulerkoordinaten her.

4.3.1. Massenerhaltungssatz. Wir gehen wieder davon aus, dass eine Massendichtefunktion $\rho_m(\mathbf{x}, t)$ existiert, sodass die Gesamtmasse $m(\omega, t)$ in einem beliebigen Teilgebiet $\omega \subset \Omega_t$ zum Zeitpunkt t gegeben ist durch $m(\omega, t) = \int_{\omega} \rho_m(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$.

Sei $\omega_0 \subset \Omega_0$ ein beliebiges Teilgebiet und $\omega_t := \mathbf{x}(\omega_0, t)$. Das heißt, ω_0 ist das Referenzgebiet zum Gebiet ω_t zum Zeitpunkt t . Die in ω_t enthaltene Masse $m(\omega_t, t)$ ist somit zu jedem Zeitpunkt gleich der in ω_0 enthaltenen Masse $m(\omega_0, 0)$ zum Zeitpunkt 0. Somit ist $t \mapsto m(\omega_t, t)$ konstant, oder

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho_m(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0.$$

Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems liefert nun

$$\int_{\omega_t} \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) \right] d\mathbf{x} = 0.$$

Dies gilt für ein beliebiges Teilgebiet $\omega_t \subset \Omega_t$, da $\omega_0 \subset \Omega_0$ beliebig war. Somit folgt aus Lemma 1.1 die punktweise Identität

$$(MES) \quad \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho_m(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad \text{in } \Omega_t.$$

Dies ist der Massenerhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung), den wir bereits in Kapitel 1 kennengelernt haben, mit Massenflussdichte $\mathbf{q}_m = \rho_m \mathbf{v}$.

DEFINITION 4.3. Ein Material heißt **inkompressibel**, falls seine Massendichte zeitlich konstant ist, also

$$(4.3) \quad D_t \rho_m(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Viele Flüssigkeiten werden üblicherweise als (näherungsweise) inkompressibel modelliert, während Gase meist als kompressibel angenommen werden. Für inkompressible Materialien gilt per Definition

$$0 = D_t \rho_m = \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \rho_m \cdot \mathbf{v}.$$

Der (MES) lautet unter Anwendung der Produktregel (A.4)

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \rho_m \cdot \mathbf{v} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Da $\rho_m > 0$, folgt somit die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Materialien,

$$(4.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Inkompressibilität ist also gleichbedeutend mit der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfelds. Was bedeutet dies für das Volumen eines solchen Materials? Betrachten wir dazu wieder ein zeitabhängiges Gebiet $\omega_t = \mathbf{x}(\omega_0, t)$. Sein Volumen ist $V(t) = \int_{\omega_t} 1 \, d\mathbf{x}$. Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems mit $\varphi \equiv 1$ ergibt

$$(4.5) \quad \frac{dV}{dt}(t) = \int_{\omega_t} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} = \int_{\omega_t} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Ein inkompressibles Material kann somit zwar seine Form ändern, nicht aber sein Volumen.

4.3.2. Impulserhaltungssatz. Wir leiten nun den (IES) in differenzieller Form in Eulerkoordinaten her. Hierzu seien ω_0 und ω_t wie im letzten Abschnitt. Der Impulserhaltungssatz in integraler Form ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{t_2}} (\rho_m \mathbf{v})(\mathbf{x}, t_2) \, d\mathbf{x} - \int_{\omega_{t_1}} (\rho_m \mathbf{v})(\mathbf{x}, t_1) \, d\mathbf{x} \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\omega_t} \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega_t} \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) \, dS(\mathbf{x}) \right] dt, \end{aligned}$$

Dividieren durch $t_2 - t_1$ und $t_2 \rightarrow t_1$ liefert unter Verwendung von Lemma 1.1

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} (\rho_m \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{\omega_t} \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega_t} \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) \, dS(\mathbf{x}),$$

wobei wir zur besseren Notation t_1 durch t ersetzt haben. Komponentenweise Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems liefert nun

$$\int_{\omega_t} \frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \, d\mathbf{x} = \int_{\omega_t} \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega_t} \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) \, dS(\mathbf{x}).$$

Analog zum Fall von Lagrangekoordinaten (vgl. Lemma 3.3) folgert man die Existenz eines symmetrischen Spannungstensors $\vec{\vec{Z}}$ in Eulerkoordinaten, sodass $\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \vec{\vec{Z}}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$. Damit folgt mit dem Satz von Gauss

$$\int_{\omega_t} \frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\mathbf{v}(\rho_m \mathbf{v})^T) d\mathbf{x} = \int_{\omega_t} [\mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \vec{\vec{Z}}(\mathbf{x}, t)] d\mathbf{x}.$$

Da ω_t beliebig gewählt war und allgemein gilt, dass $\nabla \cdot (\mathbf{f}\mathbf{g}^T) = (\nabla\mathbf{f})\mathbf{g} + \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g})$ (siehe (A.5)), wie man leicht nachrechnet, folgt

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v}) \rho_m \mathbf{v}}_{=\mathbf{v}(\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}))=0} = \mathbf{F}_v + \nabla \cdot \vec{\vec{Z}}$$

aufgrund der Kontinuitätsgleichung. Insgesamt erhalten wir damit

$$(IES) \quad \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) - \nabla \cdot \vec{\vec{Z}} = \mathbf{F}_v$$

oder kurz $\rho_m D_t \mathbf{v} - \nabla \cdot \vec{\vec{Z}} = \mathbf{F}_v$. Dies ist der (IES) in differenzieller Form in Eulerkoordinaten. Man beachte die Ähnlichkeit zum differenziellen (IES) in Lagrangekoordinaten in Kapitel 3 – der einzige Unterschied ist die unterschiedliche Form des Beschleunigungsterms. Tatsächlich können wir mit (4.2b) die obige Identität schreiben als $\rho_m \mathbf{a} - \nabla \cdot \vec{\vec{Z}} = \mathbf{F}_v$.

Oft ist die Volumenkraftdichte durch $\mathbf{F}_v = \mathbf{f}_a \rho_m$ mit einer Beschleunigung \mathbf{f}_a gegeben. Ein typischer Fall ist $\mathbf{f}_a = -g\mathbf{e}_3$ mit der Erdbeschleunigung g , sodass \mathbf{F}_v die Erdanziehungskraft ist.

Eine kurze Überlegung zu den Einheiten: der (IES) hat die Einheit einer Volumenkraftdichte, $[\mathbf{F}_v] = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$, und somit hat der Spannungstensor die Einheit $[\vec{\vec{Z}}] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$.

4.4. Materialgesetze in der Strömungsdynamik

Wir haben nun allgemeine Erhaltungssätze in folgender Form hergeleitet:

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - \nabla \cdot \vec{\vec{Z}} = \mathbf{F}_v \quad (IES)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0 \quad (MES)$$

Zudem haben wir gesehen, dass sich im inkompressiblen Fall die zweite Gleichung zu $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ vereinfacht. In jedem Fall sind dies zusammen $d + 1$ Gleichungen mit $1 + d + \frac{d(d+1)}{2}$ Unbekannten, nämlich $\rho_m, \mathbf{v}, \vec{\vec{Z}}$ (man beachte wieder die Symmetrie des Spannungstensors $\vec{\vec{Z}}$). Wir benötigen also Materialgesetze, um die Zahl der Unbekannten zu reduzieren. Tatsächlich haben wir bei der Herleitung der obigen Gleichungen ja nur allgemeingültige Erhaltungssätze verwendet; sie sind daher auch etwa für Festkörper gültig, und der einzige Unterschied zu den entsprechenden Gleichungen in Kapitel 3 ist die Verwendung von Euler- statt Lagrange-Koordinaten.

Als **nichtviskose Strömung** bezeichnet man eine Strömung ohne innere Reibung. Dies ist physikalisch dann gegeben, wenn Wechselwirkungen zwischen benachbarten Partikeln vernachlässigbar sind, zum Beispiel im Fall von Gasen unter

niedrigem Druck. Der Spannungstensor ist dann gegeben durch

$$(4.6) \quad \vec{\mathbf{Z}} = -p\vec{\mathbf{I}},$$

wobei p der Druck ist ($[p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$). Dies bedeutet also, dass Oberflächenkräfte innerhalb des Materials nur parallel zum Normalenvektor wirken und nicht vom Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} abhängen. Den entsprechenden Ausdruck $\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{n}$ für den Druck haben wir auch schon in Kapitel 1 für die Herleitung der barometrischen Höhenformel verwendet.

Von einer **viskosen Strömung** spricht man, wenn es erhebliche Reibungseffekte innerhalb des Stoffes gibt. Schnelle Partikel geben dabei durch Wechselwirkungen einen Teil ihrer Bewegungsenergie an benachbarte langsamere Partikel ab und beschleunigen diese dadurch. In diesem Fall erhalten wir für den Spannungstensor zusätzliche Terme

$$(4.7) \quad \vec{\mathbf{Z}} = \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \vec{\mathbf{I}} - p\vec{\mathbf{I}}.$$

Man beachte, dass die beiden zusätzlichen Summanden dem Ausdruck (3.5) für den Spannungstensor im Fall der linearen isotropen Elastizität entsprechen, sich aber nun auf die Geschwindigkeit \mathbf{v} statt wie dort auf die Verschiebung beziehen. In der Strömungsmechanik bezeichnet man μ als **Scherviskosität** und λ als **Volumenviskosität**. Dabei beschreibt Scherviskosität Reibung, die aneinander vorbeifließende Flüssigkeitsschichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten aufeinander ausüben. Analog zu den Starrkörperverschiebungen in der Elastizität tritt keine solche Reibung auf, wenn die Geschwindigkeit konstant ist oder eine reine Rotation darstellt. Volumenviskosität beschreibt Reibung, die sich bei einer Volumensänderung (Expansion oder Kontraktion) des Materials ergibt – wir erinnern uns, dass $\nabla \cdot \mathbf{v}$ gemäß (4.5) die lokale Volumensänderung beschreibt. Wie der Druck wirkt auch die durch Volumenviskosität erzeugte Spannung immer in Normalenrichtung.

Da $[\vec{\mathbf{Z}}] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ und die Ortsableitungen der Geschwindigkeit die Einheit $\frac{1}{\text{s}}$ haben, haben die Viskositätsparameter die Einheit $[\mu] = [\lambda] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$.

Fluide (also Gase und Flüssigkeiten) werden immer als isotrop vorausgesetzt, ihre Eigenschaften sind also unabhängig von der betrachteten Richtung. Die zusätzlichen Terme in (4.7) erklären sich also wieder über den Satz von Rivlin-Ericksen. Zusätzlich zu diesen Termen haben wir auch den konstanten Druckterm $-p\vec{\mathbf{I}}$. Während wir bei der linearen Elastizität angenommen haben, dass eine Null-Verschiebung auch zu keinen Spannungen führt, so gibt es in Fluiden durch die Eigenbewegung der Partikel immer einen grundlegenden Druck, der auch bei Null-Geschwindigkeiten bestehen bleibt und sich als Normalspannung äußert. Der Spannungstensor $\vec{\mathbf{Z}}$ hängt also affin-linear statt homogen linear von $\nabla \mathbf{v}$ ab.

4.5. Die Navier-Stokes Gleichungen

Durch Einsetzen des allgemeinen isotropen Materialgesetzes (4.7) in die Erhaltungssätze erhalten wir die sogenannten Navier-Stokes Gleichungen für Strömungen. Dazu brauchen wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathbf{Z}} &= \nabla \cdot \left(\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \vec{\mathbf{I}} - p\vec{\mathbf{I}} \right) \\ &= \mu \Delta \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla p, \end{aligned}$$

wobei wir angenommen haben, dass das Fluid homogen ist, μ und λ also konstant sind. (Siehe die analoge Herleitung in Abschnitt 3.7). Die **kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen** lauten also

$$(4.8) \quad \begin{cases} \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - \mu \Delta \mathbf{v} - (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{F}_v, \\ \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0. \end{cases}$$

Im inkompressiblen Fall haben wir gesehen, dass sich die Kontinuitätsgleichung zu $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ vereinfacht. Somit ergeben sich die **inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen**

$$(4.9) \quad \begin{cases} \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{F}_v, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Beide Gleichungssysteme bestehen aus vier Gleichungen mit fünf Unbekannten (\mathbf{v}, p, ρ_m) . Im inkompressiblen Fall (also etwa für Flüssigkeiten wie Wasser) wird wegen (4.3) die Massendichte ρ_m als konstant angenommen (z.B. $\rho_m = 997 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ für Wasser). Dies ist aber nur dann korrekt, wenn sich die Temperatur nicht signifikant ändert.

Im kompressiblen Fall gilt für ideale Gase der Zusammenhang (vgl. auch Abschnitt 1.6)

$$p = R_s T \rho_m$$

mit einer materialabhängigen Gaskonstante R_s und der Temperatur T . Hier lässt sich für annähernd konstante Temperatur also ein linearer Zusammenhang zwischen p und ρ_m herstellen und somit eine der beiden Unbekannten eliminieren.

In beiden Fällen erhalten wir so schließlich vier Gleichungen mit vier Unbekannten. Wegen des konvektiven Terms $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ handelt es sich um ein nichtlineares Gleichungssystem, was die Lösung deutlich erschwert.

Betrachten wir wieder den inkompressiblen Fall und nehmen, wie oben diskutiert, ρ_m als konstant an. Weiters gehen wir wieder davon aus, dass die Volumenkraftdichte in der Form $\mathbf{F}_v = \mathbf{f}_a \rho_m$ mit einer Beschleunigung \mathbf{f}_a gegeben ist. Wir dividieren die erste Gleichung durch ρ_m und führen die sogenannte **kinematische Viskosität** $\eta := \frac{\mu}{\rho_m}$ ein ($[\eta] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$). Damit erhalten wir

$$(4.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \eta \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_m} \nabla p = \mathbf{f}_a, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

BEMERKUNG 4.4. Das nichtlineare System partieller Differentialgleichungen (4.10) ist analytisch bis heute nicht vollständig verstanden. Insbesondere die Frage der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für $d = 3$ ist ungeklärt und ist eines der sieben Millennium-Probleme des Clay-Instituts mit einer Million US-Dollar Preisgeld. Nichtsdestotrotz sind die Navier-Stokes Gleichungen äußerst nützlich in der numerischen Simulation von Strömungsphänomenen.

4.5.1. Entdimensionalisierung und Reynoldszahl. Wir wollen nun die Navier-Stokes-Gleichungen (4.10) entdimensionalisieren, um ein Gleichungssystem mit

dimensionslosen Größen zu erhalten. Wir gehen dazu wie in Kapitel 1 für die barometrische Höhenformel vor. Dazu betrachten wir die folgenden **charakteristischen Größen**

- v^* : charakteristische Größe für die Geschwindigkeit,
- x^* : charakteristische Größe für die Länge,
- p^* : charakteristische Größe für den Druck,
- $t^* := \frac{x^*}{v^*}$: charakteristische Größe für die Zeit,

und die entsprechenden **dimensionslosen Größen**

$$\tilde{\mathbf{v}} := \frac{\mathbf{v}}{v^*}, \quad \tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{x^*}, \quad \tilde{p} := \frac{p}{p^*}, \quad \tilde{t} := \frac{t}{t^*}.$$

Nun betrachten wir die einzelnen Terme mit Differentialoperatoren in (4.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= v^* \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{v^*}{t^*} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} \\ (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} &= \left[\sum_{j=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right]_{i=1}^3 = \left[v^{*2} \sum_{j=1}^d \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_j} \tilde{v}_j \right]_{i=1}^3 = \frac{v^{*2}}{x^*} (\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} \\ \Delta \mathbf{v} &= \left[\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right]_{i=1}^3 = \frac{v^*}{x^{*2}} \Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{v}} \\ \nabla p &= \left[\frac{\partial p}{\partial x_i} \right]_{i=1}^3 = \frac{p^*}{x^*} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{p} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{v^*}{x^*} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (4.10) liefert

$$\frac{v^*}{t^*} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{v^{*2}}{x^*} (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} - \eta \frac{v^*}{x^{*2}} \Delta \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\rho_m} \frac{p^*}{x^*} \nabla \tilde{p} = \mathbf{f}_a,$$

wobei sich Differentialoperatoren für Tilde-Funktionen auf die transformierte Ortsvariable $\tilde{\mathbf{x}}$ beziehen. Da $\frac{v^*}{t^*} = \frac{v^{*2}}{x^*}$, ergibt Multiplikation mit $\frac{x^*}{v^{*2}}$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} - \underbrace{\frac{\eta}{x^* v^*}}_{=: \text{Re}^{-1}} \Delta \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\rho_m} \frac{p^*}{v^{*2}} \nabla \tilde{p} = \underbrace{\mathbf{f}_a \frac{x^*}{v^{*2}}}_{=: \tilde{\mathbf{f}}_a},$$

wobei die dimensionslose Größe

$$\text{Re} = \frac{x^* v^*}{\eta}$$

die sogenannte **Reynoldszahl** ist. Mit der Wahl des charakteristischen Drucks $p^* := \rho_m v^{*2}$ (beachte: $[p^*] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{m}^3 \text{s}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$) erhalten wir also insgesamt die folgenden entdimensionalisierten Navier-Stokes-Gleichungen:

$$(4.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} - \text{Re}^{-1} \Delta \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}}_a \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0. \end{cases}$$

4.5.2. Grenzfälle. In vielen Fällen ist die Reynoldszahl besonders groß oder besonders klein. In solchen Situationen können wir die folgenden Grenzfälle der Navier-Stokes-Gleichungen betrachten.

Wenn Re sehr groß ist, ist der Term $\Delta\tilde{\mathbf{v}}$ vernachlässigbar. Wir erhalten dann

$$\begin{cases} \frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}} + \nabla\tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}}_a, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0. \end{cases}$$

Dies sind die **Euler-Gleichungen für nicht-viskose Strömungen**.

Wenn Re klein ist, dominiert $Re^{-1}\Delta\tilde{\mathbf{v}}$ den nicht-linearen Term $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}}$. Wir erhalten dann

$$\begin{cases} \frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} - Re^{-1}\Delta\tilde{\mathbf{v}} + \nabla\tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}}_a, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0. \end{cases}$$

Dies sind die **Stokes-Gleichungen** für langsame, viskose Strömungen. Im Gegensatz zu den allgemeinen Navier-Stokes-Gleichungen sowie den Euler-Gleichungen sind sie linear.

BEISPIEL 4.1. Die folgende Tabelle zeigt einige Beispiele für die charakteristischen Größen in verschiedenen Situationen und die daraus resultierenden Reynoldszahlen.

Beispiel	x^*	v^*	η	Re
Strömung um ein Flugzeug	100 m	300 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$3 \cdot 10^9$
Strömung um ein Auto	5 m	20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	10^7
Kleinstlebewesen im Wasser	10^{-3} m	$10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	1

BEMERKUNG 4.5. Wie die oben betrachteten Grenzfälle nahelegen, ist die Größe der Reynoldszahl wichtig für die Art der Strömung. Tatsächlich gibt es in vielen geometrisch ähnlichen Anordnungen einen kritischen Wert Re_c für die Reynoldszahl. Unterhalb dieses kritischen Wertes ist die Strömung **laminar**, oberhalb **turbulent**.

Laminar bezeichnet dabei eine Strömung, die sich in Schichten bewegt, die sich untereinander nicht mischen. Im Gegensatz dazu steht eine **turbulente** Strömung, bei der Verwirbelungen auftreten und die Schichten sich vermischen (siehe Abb. 1).

Für Wasserrohre mit kreisförmigem Querschnitt findet man beispielsweise experimentell $Re_c = 2300$ (siehe [Dem08, Abschnitt 8.8]). Durch Einsetzen der kinematischen Viskosität $\mu \approx 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ für Wasser erhalten wir, dass in so einem Rohr mit Durchmesser x^* eine Strömung unter der kritischen Geschwindigkeit

$$v \leq v_c = \frac{Re_c \mu}{x^*} = \frac{2300 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{x^*}$$

laminar bleibt. Bei einem Rohr von 1 cm Durchmesser muss die Geschwindigkeit also unter etwa $v_c = 0,23 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bleiben, um eine laminare Strömung zu gewährleisten, bei einem Meter Durchmesser schon unter $v_c = 0,23 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. In unserer makroskopischen Welt sind daher turbulente Strömungen der Regelfall, laminare die Ausnahme.

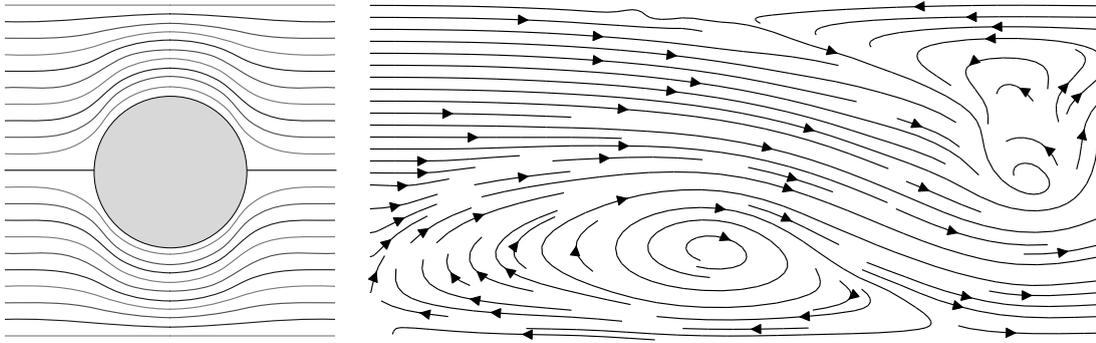


ABBILDUNG 1. Laminare (links) und turbulente (rechts) Strömung.

4.5.3. Die stationären Stokes-Gleichungen. Im Fall einer stationären Strömung, wenn sich also das Geschwindigkeitsfeld nicht mit der Zeit ändert, lauten die Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}^{-1} \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f}_a, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir die entdimensionalisierten Gleichungen voraussetzen und der Notation halber auf die Tilden verzichten. Wir nehmen zusätzlich die homogene Dirichlet-Randbedingung

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

an. Man beachte, dass für eine Lösung (\mathbf{v}, p) dieses Gleichungssystems auch $(\mathbf{v}, p+c)$ für eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist und somit der Druck nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

Multiplikation der ersten Gleichung mit einer geeigneten vektorwertigen Testfunktion \mathbf{w} , Integration über Ω und partielle Integration liefern

$$\operatorname{Re}^{-1} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_a \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in (H_0^1(\Omega))^3,$$

wobei die Randterme wieder wegen der Randbedingung wegfallen. Multiplikation der zweiten Gleichung mit einer skalaren Testfunktion q und Integration liefert

$$- \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q.$$

Wir können nun die Bilinearformen

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &:= \operatorname{Re}^{-1} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x}, \\ b(q, \mathbf{v}) &:= - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

eingeführen und dann die Variationsformulierung der stationären Stokes-Gleichungen schreiben als: finde $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^3$ und $p \in L_0^2(\Omega)$, sodass

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(p, \mathbf{w}) &= (\mathbf{f}_a, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in (H_0^1(\Omega))^3, \\ b(q, \mathbf{v}) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{aligned}$$

wobei

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

der Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit Mittelwert 0 ist. Dieser Raum ist darum sinnvoll, weil wie oben erwähnt p nur bis auf eine Konstante bestimmt ist und wir somit immer durch Subtrahieren des Mittelwerts $p \in L_0^2(\Omega)$ garantieren können.

Die obige Formulierung ist ein sogenanntes Sattelpunktproblem und ist schwieriger zu behandeln (sowohl was die Theorie der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, als auch die numerische Simulation am Computer betrifft) als ein elliptisches Problem (wie wir es etwa bei der Wärmeleitungsgleichung erhalten haben). Für diesen linearen Fall lassen sich jedoch, anders als bei den nichtlinearen Navier-Stokes-Gleichungen, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unter recht allgemeinen Voraussetzungen zeigen.

Wir gehen noch kurz auf einige mögliche Randbedingungen und deren physikalische Bedeutung ein. Wir geben hier drei mögliche Fälle an, die auch wieder gemischt an verschiedenen Teilen des Randes auftreten können.

- Wandhaftbedingung (engl. *no-slip condition*):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$$

Das Fluid befindet sich am entsprechenden Rand im Stillstand, "haftet" dort also an der Wand. Das ist vor allem für viskose Flüssigkeiten eine sinnvolle Annahme. Mathematisch ist dies eine homogene Dirichlet-Randbedingung. Diesen Fall haben wir oben angenommen.

- Einströmbedingung:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \neq 0$$

Hier ist die Geschwindigkeit am entsprechenden Rand fix vorgeschrieben durch eine gegebene Funktion \mathbf{v}_0 . Dies ist zum Beispiel dann eine sinnvolle Annahme, wenn Wasser mit einer bekannten und konstanten Geschwindigkeit in ein Rohr gepumpt wird. Es handelt sich um eine nichthomogene Dirichlet-Randbedingung.

- Ausströmbedingung:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0$$

Diese Bedingung kann (näherungsweise) dort verwendet werden, wo das Fluid aus dem Rechengebiet ausfließt und keine Änderung des Geschwindigkeitsfelds in Normalenrichtung zu erwarten ist. Dies ist eine homogene Neumann-Randbedingung.

In der Praxis werden auch kompliziertere Bedingungen verwendet, um bestimmte physikalische Effekte zu modellieren. Anstatt Randbedingungen für \mathbf{v} ist es manchmal auch möglich, Randbedingungen für den Druck p anzunehmen, wie wir in einem Beispiel sehen werden.

4.6. Beispiele

4.6.1. Beispiel 1: Die Couette-Strömung. Wir betrachten eine viskose Flüssigkeit, die sich zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten mit Normalenvektor \mathbf{e}_3 und Abstand h befindet, also

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < h\}.$$

Die untere Platte ruht, während sich die obere mit Geschwindigkeit $(v_0, 0, 0)^T$, $v_0 \in \mathbb{R}$ bewegt. Wir ignorieren den Einfluss der Schwerkraft. Wir haben also die Navier-Stokes-Gleichungen in Ω mit Wandhaft-Randbedingungen

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \mathbf{v}(x_1, x_2, h) = v_0, \quad \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

sowie rechter Seite $\mathbf{f}_a = 0$ zu lösen.

Wir suchen eine stationäre Lösung, und es ist naheliegend, einen Ansatz zu wählen, der nur von x_3 abhängt und dessen Geschwindigkeit nur in x_1 -Richtung liegt, also

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v(x_3), 0, 0)^T, \quad p(\mathbf{x}) = p(x_3).$$

Für diesen Ansatz gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= v(x_3) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} = 0, \\ \nabla p &= (0, 0, p'(x_3))^T, \\ \mu \Delta \mathbf{v} &= \mu (v''(x_3), 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Navier-Stokes-Gleichungen (4.9) ergibt somit

$$\mu \begin{pmatrix} v''(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p'(x_3) \end{pmatrix}.$$

Daher ist der Druck konstant und $v(\cdot)$ linear. Wegen der Randbedingungen ist also das Geschwindigkeitsfeld gegeben durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x_3 v_0}{h} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wächst also linear mit dem Abstand zur festen Platte.

4.6.2. Beispiel 2: Die Pouseille-Strömung. Wir betrachten wieder eine viskose Strömung zwischen zwei Platten wie bei der Couette-Strömung, aber nun sind beide Platten stationär, also

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{v}(x_1, x_2, h) = 0, \quad \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Die Strömung wird nun durch einen Druckunterschied in x_1 -Richtung angetrieben, nämlich

$$p(\mathbf{x}) = p_1 \quad \text{für } x_1 = 0, \quad p(\mathbf{x}) = p_2 \quad \text{für } x_1 = L.$$

Wir suchen wieder eine stationäre Lösung und machen den Ansatz

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v(x_3), 0, 0)^T.$$

Einsetzen in die Navier-Stokes-Gleichungen ergibt

$$\mu \begin{pmatrix} v''(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla p.$$

Somit ist p konstant in x_2 - und x_3 -Richtung, also $p(\mathbf{x}) = p(x_1)$. Da nun aber die linke Seite nur von x_3 und die rechte nur von x_1 abhängt, müssen beide Seiten

der Gleichung konstant sein. Somit ist der Druck p linear zwischen $p(0) = p_1$ und $p(L) = p_2$, also

$$p(x_1) = p_1 + \frac{x_1(p_2 - p_1)}{L}.$$

Somit gilt

$$\mu v''(x_3) = \frac{p_2 - p_1}{L},$$

was zusammen mit den Randbedingungen $v(0) = v(h) = 0$ die quadratische Lösung

$$v(x_3) = \frac{p_1 - p_2}{2L\mu} x_3(h - x_3)$$

ergibt. Wir erhalten also ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil in x_3 -Richtung, und die maximale Geschwindigkeit ist

$$v_{\max} = v(h/2) = \frac{p_1 - p_2}{8L\mu} h^2.$$

In diesem Fall gilt also: je größer die Scherviskosität μ , desto geringer ist die maximale Geschwindigkeit der Strömung.

KAPITEL 5

Elektromagnetismus

In diesem letzten Kapitel beschäftigen wir uns mit Wechselwirkungen von elektrischen und magnetischen Feldern. **Elektrische Felder** üben Kräfte auf geladene Teilchen aus und werden hervorgerufen von elektrischen Ladungen und durch zeitliche Änderungen magnetischer Felder. **Magnetfelder** werden verursacht durch magnetische Materialien, elektrische Ströme oder zeitliche Änderung eines elektrischen Feldes. Beide werden durch die **Maxwell-Gleichungen** beschrieben.

Die Herleitung der Maxwell-Gleichungen erfolgt *nicht* über den bisherigen allgemeinen Ansatz “Erhaltungssätze + Materialgesetze \Rightarrow Modell”. Maxwell führte sein Gleichungssystem 1864 ein. Streng genommen sind diese Gleichungen postuliert. Ihre Gültigkeit kann aber durch die folgenden Herleitungen plausibel gemacht werden.

5.1. Das elektrische Feld

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall zweier stationärer, elektrisch geladener Teilchen, eines am Ort \mathbf{x}_0 mit Ladung q_0 und eines am Ort \mathbf{x} mit Ladung q . Die Ladungen können positiv oder negativ sein und haben die Einheit $[q] = [q_0] = \text{C}$ (Coulomb), wobei $1 \text{ C} = 1 \text{ A s} \approx 6,24 \cdot 10^{18}$ Elektronenladungen.

Wir betrachten nun die Kraft, die die erste Ladung (“Quellladung”) auf die zweite (“Probeladung”) ausübt. Diese ist kollinear mit dem Richtungsvektor zwischen den beiden Ladungen, ist anziehend, wenn die Ladungen gleiches Vorzeichen haben und sonst abstoßend, und fällt ab mit dem Quadrat des Abstands. Das **Coulombsche Gesetz** lautet genauer

$$\mathbf{F} = k \frac{qq_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

mit einer Proportionalitätskonstante $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$, wobei ϵ ein Materialparameter des vorliegenden Mediums ist, genannt **Permittivität** oder **dielektrische Leitfähigkeit**, die die Durchlässigkeit des Materials für elektrische Felder angibt. Im Vakuum gilt $\epsilon = \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$, und dieser Wert wird **Dielektrizitätskonstante** genannt.

Die Wirkung der Quellladung q_0 auf eine Probeladung q am Ort \mathbf{x} wird beschrieben durch ein Vektorfeld, das **elektrische Feld** \mathbf{E} , definiert durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = q\mathbf{E}(\mathbf{x}),$$

womit gilt

$$\mathbf{E} = k \frac{q_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}, \quad [\mathbf{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Für ein elektrisches Feld, das von mehreren punktförmigen Quellladungen $q_0^{(j)}$ an den Orten $\mathbf{x}_0^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, generiert wird, gilt das sogenannte Superpositionsprinzip. Dieses besagt, dass das so erzeugte elektrische Feld einfach die Summe der

von den Punktladungen generierten elektrischen Felder ist, also

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \sum_{j=1}^N \frac{q_0^{(j)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^{(j)})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^{(j)}|^3},$$

und dessen Kraft auf eine Probeladung q an \mathbf{x} ist wieder $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = q\mathbf{E}(\mathbf{x})$. Siehe Abbildung 1 für ein Beispiel.

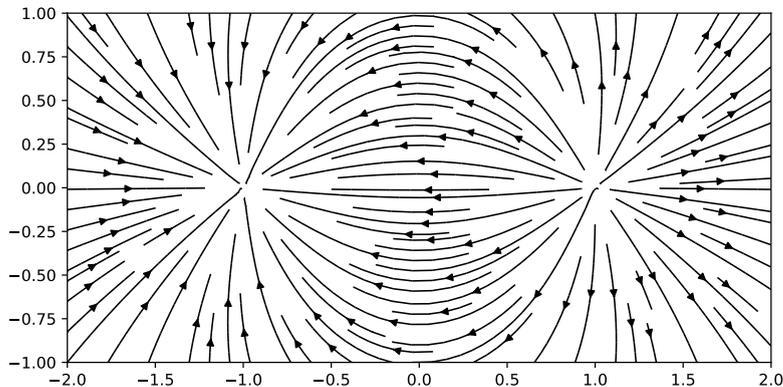


ABBILDUNG 1. Elektrisches Feld \mathbf{E} mit einer positiven ($q = 1$) Punktladung an $(1, 0)$ und einer negativen ($q = -1$) Punktladung an $(-1, 0)$.

Wir wollen letztendlich wieder ein Kontinuumsmodell des Elektromagnetismus, weshalb wir eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte ρ_q ($[\rho_q] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$) betrachten. Vergleiche dazu auch die in Abschnitt 1.3 getroffenen Überlegungen zu Teilchen- und Kontinuumsmodellen. Das dadurch generierte elektrische Feld ist dann durch Faltung definiert als

$$(5.1) \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_q(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}.$$

Die Kraft, die dieses elektrische Feld auf eine Probeladung q am Ort \mathbf{x} ausübt, ist wieder

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = q\mathbf{E}(\mathbf{x}).$$

Wir beobachten, dass

$$(5.2) \quad -\nabla V = \mathbf{E}$$

mit dem (skalaren) **elektrischen Potenzial**

$$(5.3) \quad V(\mathbf{x}) = k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_q(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y},$$

was eng mit der Vektoridentität (A.2)

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad \mathbf{x} \neq 0$$

zusammenhängt (die Singularität erfordert allerdings eine genauere analytische Betrachtung). Es gilt $\frac{[V]}{\text{m}} = [\mathbf{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}}$ und somit $[V] = \frac{\text{J}}{\text{C}} =: \text{V}$ (Volt). Da bekanntlich die Rotation des Gradienten 0 ist, folgt

$$(5.4) \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

womit \mathbf{E} ein **konservatives Vektorfeld** ist. Man könnte auch umgekehrt diese Relation direkt aus der Definition (5.1) beweisen und daraus die Existenz eines Potentials V folgern. Für eine Punktladung q_0 an \mathbf{x}_0 vereinfacht sich das Potenzial auf $V(\mathbf{x}) = \frac{kq_0}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}$.

Eine weitere wichtige Eigenschaft bezieht sich auf den Fluss des elektrischen Felds durch geschlossene Oberflächen. Wir betrachten hier zunächst den simpleren Fall einer Punktladung.

BEISPIEL 5.1. Gegeben sei eine Punktladung q_0 am Ursprung und somit

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_0 \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

Durch direkte Rechnung sehen wir zunächst $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ für $\mathbf{x} \neq 0$. Wir betrachten nun eine Kugel B mit Radius r um 0 und wollen den elektrischen Fluss durch die Kugeloberfläche berechnen. Es gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \int_{\partial B} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} dS(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \int_{\partial B} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} dS(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \int_{\partial B} \frac{1}{r^2} dS(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{\epsilon}$$

mit der Formel für die Kugeloberfläche $\int_{\partial B} 1 dS(\mathbf{x}) = 4\pi r^2$. Somit gilt

$$\int_{\partial B} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = q_0,$$

in anderen Worten: Der Fluss von $\epsilon \mathbf{E}$ durch die Kugeloberfläche ist gleich der gesamten in der Kugel enthaltenen Ladung.

Tatsächlich gilt dies nicht nur für die Kugel, sondern für ein beliebiges C^1 -Gebiet Ω mit $0 \in \Omega$. Um dies zu sehen, nehmen wir wieder eine Kugel B mit Radius r , der klein genug ist, dass $B \subset \Omega$. Wir erhalten dann mit dem Satz von Gauss

$$\int_{\partial \Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega \setminus B} \nabla \cdot \mathbf{E} dx + \int_{\partial B} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}).$$

Da $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ in $\Omega \setminus B$, folgt die gewünschte Aussage

$$\int_{\partial \Omega} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = q_0.$$

Man beachte, dass für $0 \notin \Omega$ sofort mit dem Satz von Gauss folgt

$$\int_{\partial \Omega} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} dx = 0.$$

Falls die Punktladung an einem allgemeinen Punkt \mathbf{x}_0 statt 0 liegt, folgen analoge Resultate einfach durch Verschiebung. Insbesondere ergibt die obige Herleitung, dass

$$(5.5) \quad \int_{\partial \Omega} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \begin{cases} 4\pi, & \mathbf{x}_0 \in \Omega, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Über das Superpositionsprinzip lassen sich die obigen Beobachtungen direkt auf den Fall mehrerer Punktladungen übertragen. Das heißt, das von einer Sammlung geladener Teilchen $(\mathbf{x}_0^{(j)}, q_0^{(j)})_{j=1}^N$ generierte elektrische Feld \mathbf{E} erfüllt

$$\int_{\partial \Omega} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \sum_{j: \mathbf{x}_0^{(j)} \in \Omega} q_0^{(j)}.$$

Die Verallgemeinerung auf eine kontinuierliche Ladungsverteilung liefert der folgende Satz.

SATZ 5.1 (Gesetz von Gauss). Für ein beliebiges C^1 -Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und ein elektrisches Feld \mathbf{E} der Form (5.1) gilt

$$(5.6) \quad \int_{\partial\Omega} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho_q \, d\mathbf{x}.$$

BEWEIS. Wir betrachten den Fall von konstantem ϵ . Per Definition gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}) &= \epsilon k \int_{\partial\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_q(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \, d\mathbf{y} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}) \\ &= \epsilon k \int_{\mathbb{R}^3} \rho_q(\mathbf{y}) \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}) \, d\mathbf{y} \\ &= 4\pi\epsilon k \int_{\mathbb{R}^3} \rho_q(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{\Omega}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \rho_q(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

wobei wir (5.5) verwendet haben und $\mathbf{1}_{\Omega}$ die charakteristische Funktion zu Ω ist. \square

Für den Fall, dass $\epsilon \mathbf{E}$ stetig differenzierbar ist, folgt mittels des Satzes von Gauss aufgrund der Beliebigkeit von Ω die differentielle Form

$$(5.7) \quad \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_q.$$

Zusammen bezeichnet man (5.4) und (5.7) auch als **Grundgleichungen der Elektrostatik**.

BEMERKUNG 5.2. Es sei an dieser Stelle explizit darauf hingewiesen, dass das Gesetz von Gauss (5.6) auch dann gültig ist, wenn $\epsilon \mathbf{E}$ nicht stetig differenzierbar ist (siehe Abschnitt 5.1.3).

Einsetzen von (5.2) in (5.7) liefert

$$(5.8) \quad -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_q.$$

Für den Fall eines homogenen Mediums (also $\epsilon \equiv \text{konst.}$) vereinfacht sich (5.8) zur **Poissongleichung**

$$-\Delta V = \rho_q / \epsilon.$$

Tatsächlich löst V aus (5.3) diese Gleichung.

5.1.1. Ladungsbilanz. Analog zum (MES) und (EES) ist der folgende Zusammenhang für die Ladung in einem Gebiet Ω sinnvoll: Die Änderung der Ladung in Ω im Zeitintervall (t_1, t_2) ist gegeben durch den gesamten Ladungsfluss durch $\partial\Omega$ im selben Zeitintervall. Den Ladungsfluss bezeichnen wir auch als **elektrische Stromdichte \mathbf{j}** , mit

$$[\mathbf{j}] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}.$$

Man beachte, dass \mathbf{j} die flächenbezogene Dichte der Stromstärke I mit $[I] = \text{A}$ ist. Damit lautet der Erhaltungssatz

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho_q}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}).$$

Mit dem Satz von Gauss und der Beliebigkeit von Ω folgt daraus die **Kontinuitätsgleichung**

$$(5.9) \quad \frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

5.1.2. Ohmsches Gesetz. Wir haben gesehen, dass elektrische Felder Kräfte auf elektrisch geladene Teilchen ausüben. Falls diese Teilchen beweglich sind, sich also in einem **elektrisch leitfähigen Material** befinden, werden sie durch diese Kräfte beschleunigt; dagegen wirkt der elektrische Widerstand. Mit der **Leitfähigkeit** σ gilt das **Ohmsche Gesetz**

$$(5.10) \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Falls $\sigma \equiv \textit{konst.}$, spricht man von einem **Ohmschen Material**. Es gilt $\frac{\text{A}}{\text{m}^2} = [\sigma] \frac{\text{N}}{\text{C}}$ und somit

$$[\sigma] = \frac{\text{A C}}{\text{N m}^2} = \frac{\text{A C}}{\text{m J}} = \frac{\text{A}}{\text{V m}} = \frac{1}{\Omega \text{ m}}$$

mit der Einheit Ohm $\Omega := \frac{\text{V}}{\text{A}}$.

BEMERKUNG 5.3. Für den Fall, dass keine Ströme fließen, also $\mathbf{j} \equiv 0$, ist nach dem Ohmschen Gesetz $\mathbf{E} \equiv 0$ und $V \equiv \textit{konst.}$ In diesem Fall herrscht im Leiter kein elektrisches Feld und der Leiter kann als Äquipotenzialebene betrachtet werden.

5.1.3. Elektrostatik in Leitern, Oberflächenladungen. Wir nehmen den stationären Fall an, also

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} \equiv 0.$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (5.9) folgt

$$\nabla \cdot \mathbf{j} \equiv 0.$$

Wir nehmen an, dass ein homogenes ohmsches Material vorliegt. Dann gilt aufgrund von (5.7) und (5.10)

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_q \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} \equiv 0,$$

was

$$\rho_q \equiv 0$$

impliziert.

INTERPRETATION. Im stationären Fall ist die Ladungsdichte im **Inneren** eines **leitfähigen ohmschen** Mediums gleich Null. Alle Ladung sammelt sich an dessen Oberfläche Γ .

Diese Überlegung drängt die Frage auf, wie sich das elektrische Feld an Γ verhält. Da alle Ladung auf Γ konzentriert ist, führen wir die **Flächenladungsdichte** ρ_Γ ein. Sei nun ω ein beliebiges Gebiet, für das $\omega \cap \Gamma \neq \emptyset$ gilt. Ferner definieren wir $\omega_1 := \omega \cap \Omega$ und $\omega_2 := \omega \setminus \overline{\Omega}$ (siehe Abbildung 2).

Da die gesamte Ladung auf der Oberfläche Γ lokalisiert ist, wissen wir wegen (5.7), dass in ω_1 und ω_2 gilt $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$. Daraus folgt

$$0 = \int_{\omega_1} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) \, d\mathbf{x} + \int_{\omega_2} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) \, d\mathbf{x}.$$

Man beachte, dass die rechte Seite im Allgemeinen **nicht** gleich $\int_{\omega} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) \, d\mathbf{x}$ ist, da $\epsilon \mathbf{E}$ bei $\omega \cap \Gamma$ nicht notwendigerweise stetig oder gar differenzierbar ist. Tatsächlich

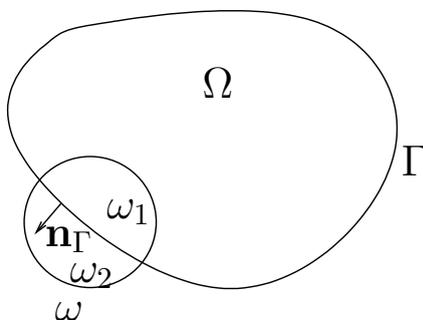


ABBILDUNG 2. Ohmsches Material in Ω mit Rand Γ und lokaler Randumgebung ω .

ist $\epsilon_1|_{\omega \cap \Gamma} \neq \epsilon_2|_{\omega \cap \Gamma}$, wobei ϵ_i , $i = 1, 2$, den zu ω_i gehörigen einseitigen Grenzwert von ϵ bezeichnet. Anwendung des Satzes von Gauss liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\omega_1} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) + \int_{\partial\omega_2} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\partial\omega} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma \cap \omega} \underbrace{(\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n}_\Gamma}_{=:[\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_\Gamma]} dS(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

wobei \mathbf{E}_i , $i = 1, 2$, den zu ω_i gehörigen einseitigen Grenzwert von \mathbf{E} und \mathbf{n}_Γ den Normalenvektor von ω_1 nach ω_2 bezeichnet.

Das Gesetz von Gauss (5.6) bezüglich ω hat die Form

$$\int_{\partial\omega} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma \cap \omega} \rho_\Gamma dS(\mathbf{x}).$$

Durch Einsetzen folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$0 = \int_{\Gamma \cap \omega} (\rho_\Gamma + [\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_\Gamma]) dS(\mathbf{x}),$$

und da ω beliebig gewählt war,

$$(5.11) \quad [\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_\Gamma] = -\rho_\Gamma.$$

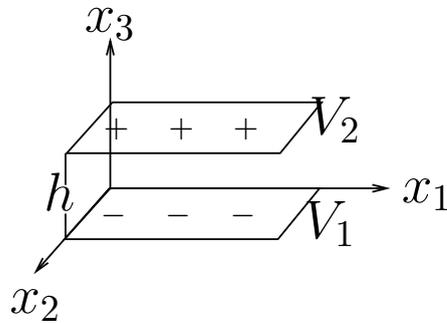
Mithilfe des elektrostatischen Potentials V lässt sich dies auch schreiben als

$$[\epsilon \nabla V \cdot \mathbf{n}_\Gamma] = \rho_\Gamma.$$

Diese beiden Beziehungen bezeichnet man als **Sprungbedingung**.

BEISPIEL 5.2 (Plattenkondensator). Wir betrachten zwei zur (x_1, x_2) -Ebene parallele Leiterplatten mit Abstand h (siehe Abbildung 3), wobei die Platte bei $x_3 = 0$ das konstante Potenzial V_1 und die bei $x_3 = h$ das konstante Potenzial V_2 besitzt. Ferner sei das Dielektrikum (Nichtleiter) zwischen den beiden Leiterplatten homogen mit Dielektrizitätskonstante ϵ . Wir sind interessiert am elektrischen Feld \mathbf{E} ; um die Rechnung zu vereinfachen, arbeiten wir stattdessen mit dem Potenzial $V(\mathbf{x})$. Aufgrund von Symmetrieüberlegungen gilt $V(\mathbf{x}) = V(x_3)$ und $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(x_3)$. Da im Dielektrikum keine Ladungen vorliegen, gilt wegen (5.8)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0, \quad V(x_3 = 0) = V_1, \quad V(x_3 = h) = V_2.$$

ABBILDUNG 3. Plattenkondensator mit Plattenabstand h .

Die eindeutige Lösung dieses Problems ist

$$V(x_3) = V_1 + x_3 \frac{V_2 - V_1}{h},$$

und es folgt

$$\mathbf{E}(x_3) = -\nabla V(x_3) \equiv \frac{V_1 - V_2}{h} \mathbf{e}_3.$$

Da wir uns im statischen Fall befinden, wo keine Ströme fließen, gilt in den Leiterplatten $\mathbf{E} \equiv 0$ (vgl. Bemerkung 5.3). Damit folgt aus der Sprungbedingung (5.11) für die Flächenladungsdichte $\rho_\Gamma^{(i)}$ der i -ten Platte

$$\rho_\Gamma^{(1)} = -[\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}] = \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{\epsilon}{h} (V_1 - V_2)$$

und

$$\rho_\Gamma^{(2)} = -[\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}] = -\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{\epsilon}{h} (V_2 - V_1).$$

In der Realität haben Leiterplatten natürlich einen endlichen Flächeninhalt A . Zwischen der gesamten Ladung $Q = A\rho_\Gamma$ auf einer Leiterplatte und der Potentialdifferenz $U = V_2 - V_1$ besteht dann der Zusammenhang

$$Q = \frac{\epsilon A}{h} U.$$

Die Größe $\frac{\epsilon A}{h} =: C$ bezeichnet man als **Kapazität** mit der Einheit $[C] = \frac{C}{V} = F$ (Farad). Die Potentialdifferenz U bezeichnet man als **(elektrische) Spannung**.

5.2. Das magnetische Feld

Wir beschäftigen uns nun mit stationären magnetischen Feldern. Bislang haben wir die Kraft betrachtet, die ruhende elektrische Ladungen auf andere Ladungen ausüben; dieser Effekt wird vom elektrischen Feld verursacht. Es stellt sich heraus, dass **bewegte** Ladungen, etwa solche, die durch einen Leiter fließen, eine Kraft auf andere bewegte Ladungen ausüben. Diese Kraft hängt ursächlich mit einem zweiten Vektorfeld zusammen, dem **Magnetfeld**.

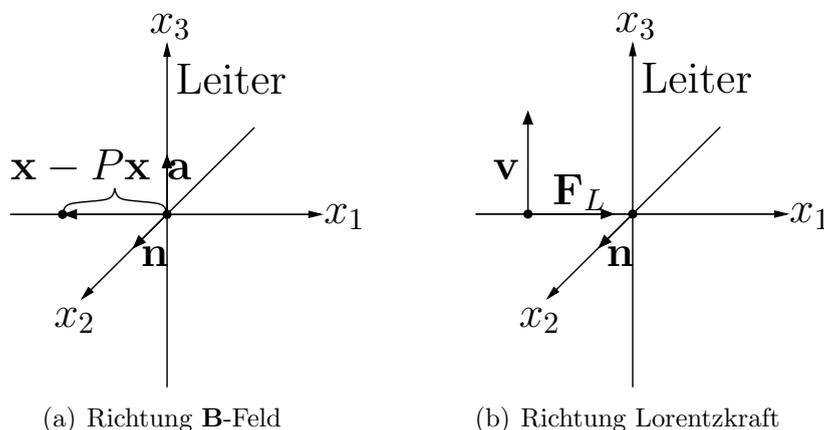


ABBILDUNG 4. Stromdurchflossener Leiter und Probeladung q an der Stelle \mathbf{x} mit Geschwindigkeit \mathbf{v} .

5.2.1. Die Lorentzkraft. Ähnlich wie das elektrische Feld übt auch das Magnetfeld eine Kraft auf geladene Teilchen aus – aber nur auf Teilchen in Bewegung. Sei \mathbf{x} der Ort eines geladenen Teilchens mit Ladung q und Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} . Gehen wir davon aus, dass ein **Magnetfeld** $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ vorliegt, auch genannt **magnetische Induktion** oder einfach **B-Feld**. Die auf das Teilchen wirkende Kraft ist dann die sogenannte **Lorentzkraft**

$$(5.12) \quad \mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Sie ist also normal zu \mathbf{v} und zu \mathbf{B} und ist 0, wenn das Teilchen ruht. Wenn wir auf beiden Seiten die Einheiten nehmen, erhalten wir $\text{N} = \frac{\text{C}}{\text{s}}[\mathbf{B}]$ und somit $[\mathbf{B}] = \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{\text{Js}}{\text{Cm}^2} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} =: \text{T}$ (Tesla). Liegt auch ein elektrisches Feld \mathbf{E} vor, so addieren sich die Kräfte, also

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Wir betrachten nun das Magnetfeld, das von einem geradlinigen stromdurchflossenen Leiter mit Richtungsvektor \mathbf{a} ($|\mathbf{a}| = 1$) und **Stromstärke** I erzeugt wird. Wir bezeichnen mit $P\mathbf{x}$ die orthogonale Projektion von \mathbf{x} auf den Leiter, also $(\mathbf{x} - P\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} = 0$. In diesem Fall ist das Magnetfeld gegeben durch

$$(5.13) \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{kI}{|\mathbf{x} - P\mathbf{x}|^2} \mathbf{a} \times (\mathbf{x} - P\mathbf{x})$$

mit einer Proportionalitätskonstante k . Seine Stärke ist also gegeben durch

$$|\mathbf{B}(\mathbf{x})| = \frac{k|I|}{|\mathbf{x} - P\mathbf{x}|^2} |\mathbf{a} \times (\mathbf{x} - P\mathbf{x})| = \frac{k|I|}{|\mathbf{x} - P\mathbf{x}|}$$

wegen der Identität $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ und ist somit proportional zur Stromstärke und zum reziproken Abstand zum Leiter. Seine Richtung ist gegeben durch

$$\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{\mathbf{a} \times (\mathbf{x} - P\mathbf{x})}{|\mathbf{a} \times (\mathbf{x} - P\mathbf{x})|} = \frac{\mathbf{a} \times (\mathbf{x} - P\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - P\mathbf{x}|} =: \mathbf{n},$$

also normal zu \mathbf{a} und $\mathbf{x} - P\mathbf{x}$ (siehe Abbildung 4, links). Wir bezeichnen mit \mathbf{n} den Normalenvektor der von diesen beiden Vektoren aufgespannten Ebene.

Durch Einsetzen in (5.12) erhalten wir also in diesem Fall die Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = \frac{kqI}{|\mathbf{x} - P\mathbf{x}|^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{x} - P\mathbf{x}))$$

mit Krafrichtung senkrecht zu \mathbf{v} und \mathbf{n} (siehe Abbildung 4, rechts).

Um zu einer **kontinuierlichen Formulierung** der Lorentzkraft zu gelangen, betrachten wir die zu \mathbf{F}_L und $q\mathbf{v}$ gehörigen Dichten \mathbf{f}_L und $\mathbf{j} = \rho_q \mathbf{v}$, mit $[\mathbf{f}_L] = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ und $[\mathbf{j}] = \frac{\text{Cm}}{\text{m}^3 \text{s}} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ (**elektrische Stromdichte**). Für eine Kugel $B_r(\mathbf{x})$ mit $r > 0$ ist dann die Lorentzkraft $\mathbf{F}_L(B_r(\mathbf{x}))$ auf die in $B_r(\mathbf{x})$ enthaltenen Ladungen $q(B_r(\mathbf{x}))$ gegeben durch

$$\mathbf{F}_L(B_r(\mathbf{x})) = q(B_r(\mathbf{x}))(\mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(r)),$$

wobei \mathbf{v} und \mathbf{B} als hinreichend glatt (etwa C^1) angenommen wurden. Division durch $|B_r(\mathbf{x})|$ und $r \rightarrow 0$ liefert nun

$$\mathbf{f}_L(\mathbf{x}) = \rho_q(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

und damit

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

BEISPIEL 5.3. Wir betrachten zwei gerade, zur x_3 -Achse parallele stromdurchflossene Leiter der Länge L mit Abstand a . Der erste Leiter schneide die x_1 -Achse an der Stelle 0, der zweite an der Stelle a . Die Stromstärke sei durch I_1 bzw. I_2 gegeben. Das \mathbf{B} -Feld des ersten Leiters ist dann

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) = \frac{kI_1}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_3 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{kI_1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt damit $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(x_1, x_2)$, was ohnehin aus Symmetriegründen klar ist. Damit ist die Lorentzkraft auf den zweiten Leiter gegeben durch

$$\mathbf{F}_{L,2} = \int_0^L I_2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_1(a, 0) dx_3 = LI_2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_1(a, 0) = \frac{LI_1 I_2 k}{a^2} \mathbf{e}_3 \times \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{LI_1 I_2 k}{a} \mathbf{e}_1.$$

Wie wir sehen, ist die Lorentzkraft **anziehend**, wenn die Ströme dieselbe Richtung haben. Ansonsten ist sie **abstoßend**.

BEMERKUNG 5.4. Laut SI-Definition ist 1 Ampère gerade die Stromstärke, die im Vakuum bei unendlich langen, geraden, parallelen Leitern mit einem gegenseitigen Abstand von 1 m eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N pro m Leiterlänge hervorruft. Die Proportionalitätskonstante in der Lorentzkraft ist daher $k = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$.

5.2.2. Grundgleichungen der Magnetostatik. Wir leiten nun zwei Gleichungen her, die das \mathbf{B} -Feld aus (5.13) im stationären Fall erfüllt. Konkret interessieren uns, analog zum elektrischen Feld, wieder die Divergenz und die Rotation des \mathbf{B} -Felds. Zur einfacheren Notation führen wir die Funktion

$$(5.14) \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}) := \frac{1}{|\mathbf{x} - P\mathbf{x}|^2} \mathbf{a} \times (\mathbf{x} - P\mathbf{x})$$

mit $|\mathbf{a}| = 1$ ein, sodass $\mathbf{B} = kI\mathbf{w}$.

SATZ 5.5. Sei γ_0 eine Gerade mit Richtungsvektor \mathbf{a} , P die Projektion auf γ_0 und für $\mathbf{x} \notin \gamma_0$ sei $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ gegeben durch (5.14). Sei

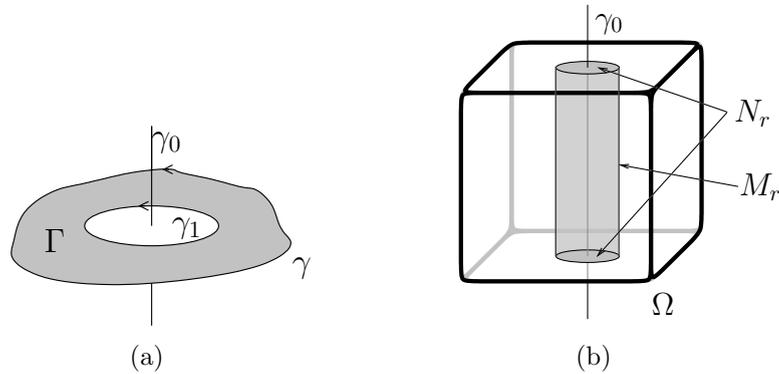


ABBILDUNG 5. Skizze zu Satz 5.5.

- γ eine glatte orientierte geschlossene Kurve mit $\gamma \cap \gamma_0 = \emptyset$, die γ_0 einmal in mathematisch positiver Richtung umläuft (siehe Abbildung 5(a)).
- Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$. Die Schnittmenge $\partial\Omega \cap \gamma_0$ bestehe aus isolierten Punkten, in denen die Tangentialebene von $\partial\Omega$ nicht parallel zu γ_0 verlaufe (siehe Abbildung 5(b)).

Dann gilt

$$(1) \oint_{\gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{x} = 2\pi,$$

$$(2) \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = 0.$$

BEWEIS. O.B.d.A. nehmen wir an, dass unser kartesisches Koordinatensystem $\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}$ erfüllt und der Ursprung auf γ_0 liegt. Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ mit $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ gilt

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_3 \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man verifiziert durch direktes Nachrechnen, dass für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ gilt

$$(5.15) \quad \nabla \times \mathbf{w} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0.$$

(1) Sei γ_1 ein orientierter Kreis in der (x_1, x_2) -Ebene mit Radius r , der γ_0 in positiver Richtung umläuft, parametrisiert durch

$$\mathbf{x} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x}(\varphi) := [r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), 0].$$

Da $\frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} = [-r \sin(\varphi), r \cos(\varphi), 0]$, gilt damit

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_1} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{x_1(\varphi)^2 + x_2(\varphi)^2} \begin{bmatrix} -x_2(\varphi) \\ x_1(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

Damit ist (1) für Kreise gezeigt. Sei nun Γ eine Fläche mit Rand $\gamma \cup \gamma_1$. Dann gilt wegen (5.15) und des Satzes von Stokes

$$0 = \int_{\Gamma} \nabla \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \oint_{\gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{x} - \underbrace{\oint_{\gamma_1} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{x}}_{=2\pi} \Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{x} = 2\pi.$$

(2) Falls γ_0 das Gebiet Ω nicht schneidet, dann folgt die gewünschte Aussage sofort mit dem Satz von Gauss aus (5.15). Sei ansonsten $N_r := \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \gamma_0) \leq r\}$. Offensichtlich gilt dann

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \int_{N_r} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega \setminus N_r} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}).$$

Sei nun $\Omega_r := \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \gamma_0) > r\}$ und $M_r := \{\mathbf{x} \in \partial\Omega_r \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \gamma_0) = r\}$ die Mantelfläche des aus Ω_r herausgeschnittenen Zylinders. Mit diesen Definitionen gilt $\partial\Omega_r = (\partial\Omega \setminus N_r) \cup M_r$. Aufgrund von (5.15) und des Satzes von Gauss wissen wir dann, dass

$$0 = \int_{\Omega_r} \nabla \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_r} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega \setminus N_r} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) + \int_{M_r} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}).$$

Auf M_r ist $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ parallel zu $\mathbf{x} - P\mathbf{x}$ und daher $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$. Das letzte Integral verschwindet somit. Es folgt, dass

$$\int_{\partial\Omega \setminus N_r} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = 0$$

für alle $r > 0$ und es bleibt zu zeigen, dass $\int_{N_r} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow 0$. Für $0 < t \leq r$ sei $n_t := \{\mathbf{x} \in N_r \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \gamma_0) = t\}$. Da die Tangentialebenen von $\partial\Omega$ in $\partial\Omega \cap \gamma_0$ nicht parallel zu γ_0 verlaufen und es nur endlich viele Schnittpunkte gibt, gilt $|n_t| = \mathcal{O}(t)$. Damit folgt

$$\left| \int_{N_r} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) \right| \leq \int_0^r \int_{n_t} \underbrace{|\mathbf{w}|}_{=\frac{1}{t}} \underbrace{|\mathbf{n}|}_{=1} ds dt \leq C \int_0^r dt = Cr \rightarrow 0 \text{ mit } r \rightarrow 0. \quad \square$$

Multiplikation von (1) und (2) aus Satz 5.5 mit kI liefert

$$(5.16) \quad \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \mu I \quad \text{und} \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = 0,$$

wobei $\mu := 2\pi k$ die **magnetische Permeabilität** bezeichnet. Im Vakuum gilt $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$. Unter Verwendung der kontinuierlichen Stromdichte \mathbf{j} legt dies (analog zum stetigen Fall des Gesetzes von Gauss, Satz 5.1) den Zusammenhang

$$(5.17) \quad \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mu \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x})$$

nahe, wobei Γ eine beliebige Fläche mit Rand γ ist und der Normalenvektor \mathbf{n} so orientiert ist, dass γ ihn im positiven Sinn umkreist. Um zu zeigen, dass die rechte Seite für verschiedene Flächen mit Rand γ gleich ist, betrachten wir Γ_1 und Γ_2 mit Rand γ . Sei Ω das von Γ_1 und Γ_2 eingeschlossene Volumen. Im stationären Fall haben wir aufgrund der Kontinuitätsgleichung (5.9) $\nabla \cdot \mathbf{j} \equiv 0$. Somit gilt

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{j} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_1 dS(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_2 dS(\mathbf{x}),$$

was die gewünschte Aussage war.

Mittels des Satzes von Stokes folgt aus (5.17)

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mu \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}).$$

Da γ mit entsprechendem Γ beliebig gewählt war, folgt

$$(5.18) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (\text{Ampèresches Gesetz}).$$

Aufgrund der zweiten Gleichung in (5.16) folgt mittels des Satzes von Gauss und der Beliebbarkeit von Ω

$$(5.19) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

wobei \mathbf{B} als hinreichend glatt angenommen wurde. (5.18) und (5.19) bezeichnet man auch als **Grundgleichungen der Magnetostatik**.

5.3. Die Maxwell-Gleichungen

Wir fassen nun die Ergebnisse der beiden vorherigen Abschnitte zusammen. Aus (5.4), (5.19), (5.7) und (5.18) erhalten wir

$$(5.20) \quad \left(\begin{array}{c} \text{Stationäre} \\ \text{Maxwell-Gleichungen} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_q, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}. \end{array} \right.$$

Dies sind die **stationären Maxwell-Gleichungen**, d.h. \mathbf{B} und \mathbf{E} sind zeitlich konstant. Experimentell beobachtet man im instationären Fall die folgenden zwei Phänomene:

- (1) Zeitlich veränderliche \mathbf{B} -Felder erzeugen \mathbf{E} -Felder.
- (2) Zeitlich veränderliche \mathbf{E} -Felder erzeugen \mathbf{B} -Felder.

5.3.1. Zeitlich veränderliche B-Felder. Sei γ eine geschlossene Kurve und Γ eine Fläche mit Rand γ . Der **magnetische Fluss** durch Γ ist definiert als $\int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x})$.

Experimentell findet man, dass der Strom entlang γ proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses ist, also

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}) \sim \oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{x}.$$

Seien γ und Γ mit Rand γ beliebig, aber zeitlich konstant. Aus dem Ohmschen Gesetz wissen wir, dass \mathbf{j} proportional zu \mathbf{E} ist. Mit einer Proportionalitätskonstante k gilt also

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}) = k \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}.$$

Der Satz von Stokes impliziert nun

$$\int_{\Gamma} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}) = k \int_{\Gamma} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{x}),$$

wobei wir verwendet haben, dass Γ zeitlich konstant ist. Da Γ beliebig ist, gilt

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} - k \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Im SI-Einheitensystem ist die Proportionalitätskonstante gerade -1 . Damit gilt also

$$(5.21) \quad \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

was man als **Faradaysches Induktionsgesetz** bezeichnet.

BEMERKUNG 5.6. Im elektrostatischen Fall haben wir hergeleitet, dass $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Wie wir nun sehen, ist das im zeitabhängigen Fall nicht mehr gültig; stattdessen ist die Rotation des elektrischen Felds gegeben durch die zeitliche Änderung des magnetischen Felds.

5.3.2. Zeitlich veränderliche E-Felder. Aufgrund von (5.7) und der Kontinuitätsgleichung (5.9) wissen wir, dass

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_q \quad \text{und} \quad \frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Ableiten der ersten Gleichung nach t liefert $\nabla \cdot (\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \frac{\partial \rho_q}{\partial t}$. Einsetzen dieses Ausdrucks in die zweite Gleichung ergibt

$$\nabla \cdot \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) = 0.$$

Damit folgt aus einem bekannten Satz der Vektoranalysis (siehe z.B. [Jän02, Kapitel 29]), dass ein Vektorpotenzial ϕ zu $\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$ existiert, also

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = \nabla \times \phi.$$

Da im stationären Fall $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$ gilt, **postulierte** Maxwell, dass $\phi = \mu^{-1} \mathbf{B}$. Damit gilt

$$(5.22) \quad \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} + \mu \mathbf{j} = 0,$$

was man als **Ampère-Maxwellsches Gesetz** bezeichnet.

5.3.3. Instationäre Maxwell-Gleichungen. Zusammenfassend erhalten wir mit (5.7), (5.19), (5.21) und (5.22),

$$(5.23) \quad \left(\begin{array}{c} \text{Instationäre} \\ \text{Maxwell-Gleichungen} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_q, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{j}. \end{array} \right.$$

Ein sehr wichtiges Teilgebiet des Elektromagnetismus sind **elektromagnetische Wellen**, deren Existenz aus den Maxwell-Gleichungen hergeleitet werden kann. Anwendungen elektromagnetischer Wellen sind z.B. Funk, Radio, Fernsehen, Radar, Röntgen, Licht, ...

Wir betrachten die instationären Maxwell-Gleichungen für den Fall $\mathbf{j} \equiv 0$ und $\rho_q \equiv 0$. Anwendung von $\frac{\partial}{\partial t}$ bzw. $\nabla \times$ auf die vierte bzw. dritte Maxwell-Gleichung liefert

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Durch Summieren ergibt dies

$$\epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Da $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ und da wegen der ersten Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ gilt, folgt

$$\epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0.$$

Diese hyperbolische partielle Differentialgleichung bezeichnet man auch als **Wellengleichung**. Mit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ folgt

$$(5.24) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = 0.$$

Analog erhält man durch Anwendung von $\frac{\partial}{\partial t}$ bzw. $\nabla \times$ auf die dritte bzw. vierte Maxwell-Gleichung die Wellengleichung für das **B**-Feld,

$$(5.25) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{B} = 0.$$

Wir setzen nun

$$(5.26) \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - t).$$

Da, wie man leicht berechnet,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x_i^2} = -\mathbf{E}_0 k_i^2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - t),$$

ist (5.26) eine Lösung von (5.24), wobei $\mathbf{E}_0 = \text{const.}$ die **Amplitude** und \mathbf{k} der **Wellenvektor** mit $|\mathbf{k}| = c^{-1}$ ist. Die Richtung von \mathbf{k} gibt die Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ an, und der Betrag $|\mathbf{k}|$ die inverse Geschwindigkeit. Damit ist c die **Lichtgeschwindigkeit**. Tatsächlich gilt mit den früher genannten Werten ϵ_0 und μ_0 im Vakuum

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3,0 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Abschließend betrachten wir nun noch, wie die Richtungen der Vektoren \mathbf{E}_0 , \mathbf{k} und \mathbf{B} zueinander stehen. Da $\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv 0$, gilt für die ebene Welle (5.26)

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot (\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - t)) \\ &= \mathbf{E}_0 \cdot \nabla \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - t) \\ &= \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - t). \end{aligned}$$

Daher ist $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$, das heißt, die Amplitude des **E**-Feldes ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (**transversale Welle**). Im Gegensatz dazu stehen **longitudinale Wellen**, deren Amplitude in Richtung der Ausbreitungsrichtung liegt; dies ist etwa bei Schallwellen der Fall. Einsetzen von (5.26) in die dritte Maxwell-Gleichung liefert

$$0 = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - t).$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - t)$$

gegeben. Somit hat das \mathbf{B} -Feld eine Wellenform ganz ähnlich zum \mathbf{E} -Feld (5.26) mit gleichem Wellenvektor \mathbf{k} und gleicher Phase, jedoch mit einer Amplitude $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0$, die senkrecht sowohl zur Ausbreitungsrichtung als auch zum elektrischen Feld steht.

ANHANG A

Rechenregeln

Im Folgenden ist \vec{A} ein Matrixfeld, \mathbf{u}, \mathbf{v} sind Vektorfelder, und ρ ist ein skalares Feld. Alle diese Funktionen hängen von der Ortsvariablen \mathbf{x} ab, auf die sich alle Differentialoperatoren beziehen.

$$(A.1) \quad \nabla |\mathbf{x}|^2 = 2\mathbf{x}$$

$$(A.2) \quad \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad \text{für } \mathbf{x} \neq 0$$

$$(A.3) \quad \nabla |\mathbf{v}|^2 = 2(\nabla \mathbf{v}^T) \mathbf{v}$$

Alle folgenden Produktregeln lassen sich aus der skalaren Produktregel durch komponentenweise Betrachtung herleiten.

$$(A.4) \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$(A.5) \quad \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{v}^T) = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} + \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$(A.6) \quad \nabla \cdot (\vec{A} \mathbf{u}) = (\nabla \cdot \vec{A}^T) \cdot u + \vec{A}^T : \nabla \mathbf{u}$$

Literaturverzeichnis

- [BS08] Brenner, S. und R. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Band 15 der Reihe *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third Auflage, 2008.
- [Dem08] Demtröder, W.: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2008.
- [EGK11] Eck, C., H. Garcke und P. Knabner: *Mathematische Modellierung*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2011.
- [Jän02] Jänich, K.: *Mathematik 2*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2002.

Index

- q , 4
- Coulombsches Gesetz, 51
- DES, *siehe* Drehimpulserhaltungssatz
- Dielektrizitätskonstante, 51
- Drehimpulserhaltungssatz, 6
- Druck, 2, 7, 37, 42
- ebener Spannungszustand, 36
- ebener Verzerrungszustand, 35
- EES, *siehe* Energieerhaltungssatz
- Elastizitätstensor, 29
- elektrische Spannung, 57
- elektrische Stromdichte, 54
- elektrisches Feld, 51
- elektrisches Potenzial, 52
- Energieerhaltungssatz, 5
- Entdimensionalisierung, 8, 43
- Erhaltungssatz, 4, 7
- Euler-Gleichungen, 45
- Eulersche Koordinaten, 37
- Fluss, 4
- Fouriersches Wärmeleitgesetz, 11
- Greenscher Verzerrungstensor, 22
- homogen, 32
- Hookesches Gesetz, 30
- hyperelastisch, 27
- ideales Gas, 8, 43
- IES, *siehe* Impulserhaltungssatz
- Impulserhaltungssatz, 6, 40
- isotrop, 11, 30
- Kapazität, 57
- Kinematik, 21
- kinematische Viskosität, 43
- Kontinuumsmodell, 2
- Lagrangesche Koordinaten, 21, 37
- Lamé-Parameter, 32
- Massendichte, 3, 37
- Massenerhaltungssatz, 5, 40
- Materialgesetz, 7, 8
- materielle Ableitung, 38
- MES, *siehe* Massenerhaltungssatz
- Modell, 7
- Navier-Stokes Gleichungen, 42
- Normalspannung, 27
- Ohm, 55
- Ohmsches Gesetz, 55
- Permittivität, 51
- Poissonsche Querkontraktionszahl, 32
- Reynoldszahl, 44
- Scherspannung, 27
- Scherviskosität, 42
- SI-Einheiten, 1
- Spannungstensor, 24, 41
- spezifische Wärmekapazität, 12
- Stokes-Gleichungen, 45
- Variationsformulierung, 15
- Volt, 52
- Volumenviskosität, 42
- Wärmeübergangszahl, 13
- Wärmeleitungstensor, 11
- Youngscher Elastizitätsmodul, 32